

УДК 534.26

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВОГО СИГНАЛА В ВОЛНОВОДЕ СО СКАЧКООБРАЗНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

М. А. БУЛАНАЯ, В. Т. МАЦЫПУРА

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Получено 11.11.2008

Проаналізовано розповсюдження тонального і імпульсного звукових сигналів в плоскому нерегулярному волноводі з скачкообразним зміною поперечного розміру (неоднорідність типу “ступенька”). Вычислены энергетические коэффициенты прохождения волны сквозь зону неоднородности при различных волновых размерах волновода. Исследованы характерные изменения структуры исходного импульсного сигнала при его прохождении сквозь зону неоднородности.

Проаналізовано поширення тонального та імпульсного звукових сигналів у плоскому нерегулярному хвилеводі зі стрибкоподібною зміною поперечного розміру (неоднорідність типу “сходінка”). Обчислені енергетичні коефіцієнти проходження хвилі крізь зону неоднорідності при різних хвилевих розмірах хвилеводу. Досліджені характерні зміни структури вихідного імпульсного сигналу при його проходженні крізь зону неоднорідності.

The paper deals with analyzing the propagation of tonal and pulse sound signals in a plane irregular waveguide with a stepwise cross-size change. Energy coefficients of wave transmission through inhomogeneity zone have been calculated for various waveguide wave dimensions. Typical changes of structure of the initial pulse signal passing through the inhomogeneity zone have been studied.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассмотрен процесс распространения звукового импульса в плоском регулярном волноводі, заповненому ідеальною стисливою рідиною. В даній статті досліджені процеси розповсюдження тонального і імпульсного сигналів в плоскому нерегулярному волноводі з скачкообразним зміною його поперечного розміру (так називається неоднорідність типу “ступенька”). Замітимо, що неоднорідності, для яких характерно різке змінення параметрів волновода, знаходять широке застосування в акустичних [2] і радіоелектронних [3] пристроях.

Если теория одномодовых нерегулярных волноводов разработана хорошо [2], то теория волноводов с неоднородностями, характерный размер которых сравним с длиной волны, развита значительно слабее. Как следствие, ощущается дефицит литературных источников, содержащих соответствующие количественные данные. Исследования подобных задач проводились также специалистами в области электродинамики, особо следует отметить монографию [3]. Что же касается особенностей распространения импульсных сигналов в нерегулярных волноводах с неоднородностями ступенчатого типа, то они гораздо менее изучены [4].

1. ПОСТАНОВКА И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

На рис. 1 изображен волновод, образованный в результате стыковки двух полубесконечных плоскопараллельных волноводов разного сечения. При этом в сечении $x=0$ образуется своеобразная ступенька, характеризующаяся скачкообразным изменением его поперечного размера от h_1 к h_2 . Волновод заповнений ідеальною стисливою рідиною з густиною ρ і швидкістю звуку c . Все границі будемо вважати акустично жорсткими, т. е. на їх поверхностях S рівна нулю нормальна складова колибательної швидкості:

$$v_n = \frac{1}{i\omega\rho} \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_S = 0. \quad (1)$$

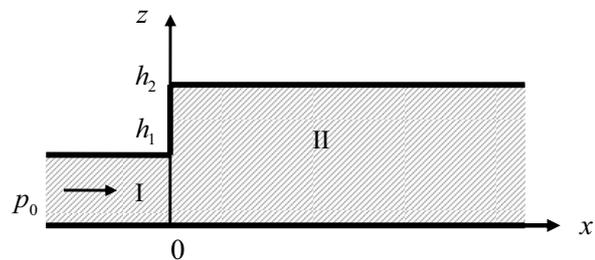


Рис. 1. Схема плоского волновода с неоднородностью типа “ступенька”

Здесь p – звуковое давление; n определяет нормаль к соответствующей границе волновода.

Рассмотрим распространение в волноводе гармонической волны с частотой ω_0 . Пусть слева набегаёт плоская волна давления, то есть нулевая мода волновода, с единичной амплитудой

$$p_0(x, t) = \exp[-i(\omega_0 t - k_0 x)], \quad (2)$$

где $k_0 = \omega_0/c$. Для решения задачи применим метод частичных областей [5, 6], в соответствии с которым всю область существования звукового поля естественным образом разделим на две частичных области (см. рис. 1):

$$I: \quad x \leq 0, \quad 0 \leq z \leq h_1;$$

$$II: \quad x \geq 0, \quad 0 \leq z \leq h_2.$$

При падении плоской волны p_0 на границу раздела областей I и II образуется отраженная волна p_1 и прошедшая в область II волна p_2 . Поле в области II представим как суперпозицию нормальных волн плоского волновода с характерным размером h_2 , а именно:

$$p_2(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h_2}\right) \exp[-i(\omega_0 t - \gamma_n x)], \quad (3)$$

где

$$\gamma_n = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{h_2}\right)^2}, & \text{если } k_0 > \frac{n\pi}{h_2}, \\ i\sqrt{\left(\frac{n\pi}{h_2}\right)^2 - k_0^2}, & \text{если } k_0 < \frac{n\pi}{h_2}. \end{cases} \quad (4)$$

Аналогичную структуру имеет поле давления в области I. Падающая волна (2) задана, а отраженную волну представим в виде

$$p_1(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h_1}\right) \exp[-i(\omega_0 t + \eta_n x)], \quad (5)$$

где

$$\eta_n = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{h_1}\right)^2}, & \text{если } k_0 > \frac{n\pi}{h_1}, \\ i\sqrt{\left(\frac{n\pi}{h_1}\right)^2 - k_0^2}, & \text{если } k_0 < \frac{n\pi}{h_1}. \end{cases} \quad (6)$$

В приведенных выражениях содержатся две последовательности произвольных величин A_n и B_n , $n=0, 1, 2, \dots$. Благодаря их подбору можно точно

выполнить условия сопряжения звуковых полей на границе раздела областей I и II:

$$p_0 + p_1 = p_2, \quad x = 0, \quad z = [0, h_1], \quad (7)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial(p_0 + p_1)}{\partial x}, & x = 0, \quad z = [0, h_1], \\ 0, & x = 0, \quad z = [h_1, h_2]. \end{cases} \quad (8)$$

Обоснование такого утверждения следует из общих свойств рядов Фурье, ведь совокупности функций $\cos(n\pi z/h_2)$ и $\cos(n\pi z/h_1)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) образуют полные и ортогональные системы функций соответственно на отрезках $[0, h_2]$ и $[0, h_1]$.

Подставив соотношения (2), (3) и (5) в условия (7), (8), получим следующую функциональную систему уравнений:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{h_2} z\right) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{h_1} z\right), \quad (9)$$

$$z = [0, h_1],$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \gamma_n \cos\left(\frac{n\pi}{h_2} z\right) =$$

$$\begin{cases} k_0 - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \eta_n \cos\left(\frac{n\pi}{h_1} z\right), & z = [0, h_1], \\ 0, & z = [h_1, h_2]. \end{cases} \quad (10)$$

Используя свойство ортогональности наборов функций $\cos(n\pi z/h_2)$ и $\cos(n\pi z/h_1)$, $n=0, 1, 2, \dots$, систему (9), (10) можно свести к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода [5, 6]:

$$-h_1 \varepsilon_{mm} A_m + \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_{mn}^{(B)} = h_1 \varepsilon_{m0}, \quad (11)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \eta_n P_{mn}^{(A)} + h_2 \gamma_m \varepsilon_{mm} B_m = k_0 P_{m0}^{(A)}, \quad (12)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь $\varepsilon_{00} = 1$; $\varepsilon_{mm} = 0.5$ при $m > 0$; $\varepsilon_{mn} = 0$ при $m \neq n$;

$$P_{mn}^{(B)} = \int_0^{h_1} \cos\left(\frac{m\pi z}{h_1}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{h_2}\right) dz;$$

$$P_{mn}^{(A)} = \int_0^{h_1} \cos\left(\frac{m\pi z}{h_2}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{h_1}\right) dz.$$

Вопрос о возможности решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода методом редукции с наперед заданной точностью можно определить в процессе числового эксперимента, постепенно увеличивая порядок конечной системы уравнений. Правильность численного решения контролируется выполнением следующих условий [5]:

- сопряжение параметров поля на границах частичных областей выполняется с определенной точностью;
- наблюдается сходимость полученного решения при увеличении порядка системы уравнений в процессе редукции;
- с определенной точностью выполняется закон сохранения энергии.

Поскольку давление и колебательная скорость представлены как комплексные числа, то возможны несколько вариантов их сравнения на границе раздела частичных областей. Определим отклонения звуковых полей по давлению δ_p и колебательной скорости δ_v на границе $x=0, z=[0, h_1]$ областей I и II соотношениями

$$\delta_p = \frac{|p_0 + p_1 - p_2|}{|p_0|}, \quad (13)$$

$$\delta_v = \frac{|v_{x0} + v_{x1} - v_{x2}|}{|v_{x0}|}.$$

Очевидно, что на акустически жесткой поверхности $x=0, z=[h_1, h_2]$ последний параметр имеет вид соответственно

$$\delta_v = \frac{|v_{x2}|}{|v_{x0}|}. \quad (14)$$

Здесь $|p_0|$ и $|v_{x0}|$ – амплитуды давления и колебательной скорости в падающей волне (1).

В качестве примера на рис. 2 показаны типичные расчеты отклонений δ_p (кривая 1) и δ_v (кривая 2) для волновода с размерами $h_1=0.3\lambda_0, h_2=0.9\lambda_0$ ($\lambda_0=\omega_0/c$ – длина звуковой волны). При этом в области I учитывалось десять мод, а в области II, исходя из соотношения их геометрических размеров, – тридцать. Из графиков видно, что величины отклонений достаточно малы, за исключением узкой зоны вблизи ребра $x=0, z=h_1$. При этом погрешность выполнения закона сохранения энергии составляет не более 0.1 %.

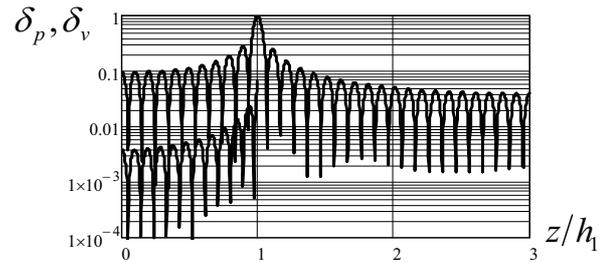


Рис. 2. Диаграммы отклонений в сечении $x=0, z=[0, h_2]$ при $h_1=0.3\lambda_0, h_2=0.9\lambda_0$:
1 – $\delta_p, 2 - \delta_v$

2. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

2.1. Тональный сигнал

Представляют интерес энергетические характеристики проникновения звуковой волны сквозь зону скачкообразного изменения сечения волновода. Естественно определить коэффициент прохождения W как отношение среднего потока мощности волны в области II к среднему потоку мощности падающей волны (2) в области I:

$$W = \frac{\int_0^{h_2} \left(p_2 \left(\frac{\partial p_2}{\partial x} \right)^* + p_2^* \frac{\partial p_2}{\partial x} \right) dx}{\int_0^{h_1} \left(p_0 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^* + p_0^* \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) dx}. \quad (15)$$

Здесь * – знак комплексного сопряжения. Подставляя выражения (2) и (3) в соотношение (15) и проводя соответствующие преобразования, получаем формулу для коэффициента прохождения нулевой моды сквозь зону стыка областей I и II волновода:

$$W = \sum_{n=0}^{N_2} W_n, \quad (16)$$

где

$$W_n = \frac{\varepsilon_{nn} h_2 \mathbf{Re}(\gamma_n)}{k_0 h_1} |B_n|^2; \quad (17)$$

а N_2 определяет количество однородных мод в области II. Согласно выражениям (16) и (17), коэффициент прохождения W представлен в виде суммы энергетических коэффициентов возбуждения W_n мод в области II. Иными словами, выражение (16) можно рассматривать как сумму коэффициентов трансформации нулевой моды области I в моды области II.

Аналогично, коэффициент отражения V , который определяется как отношение среднего потока

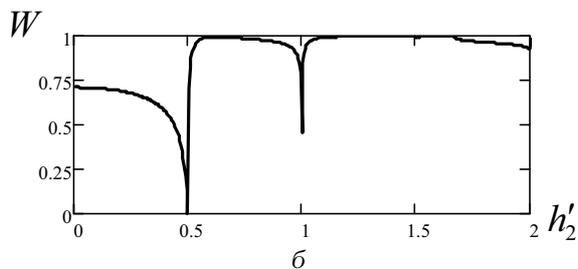
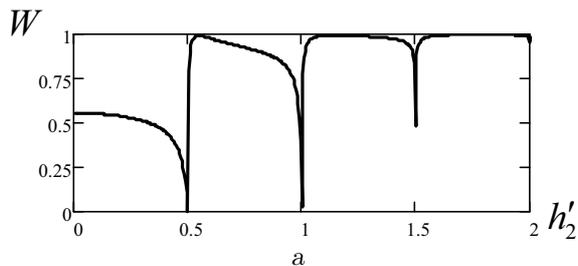


Рис. 3. Частотные характеристики коэффициента прохождения W :
 а – $h_1/h_2=0.2$, б – $h_1/h_2=0.3$

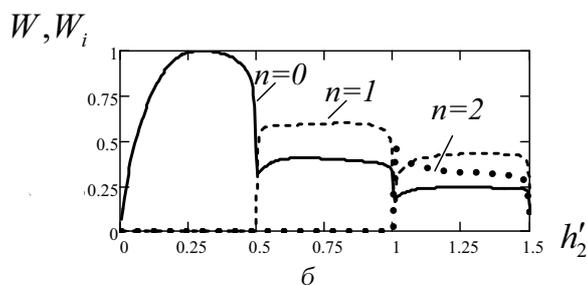
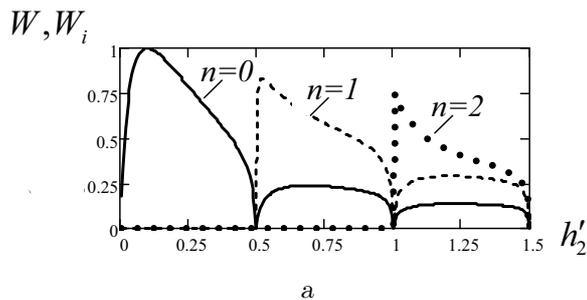


Рис. 5. Зависимость энергетических коэффициентов возбуждения W_n , $n=0, 1, 2$ нормальных волн области II от волнового размера h'_2 :
 а – $h'_1=0.1$, б – $h'_1=0.3$

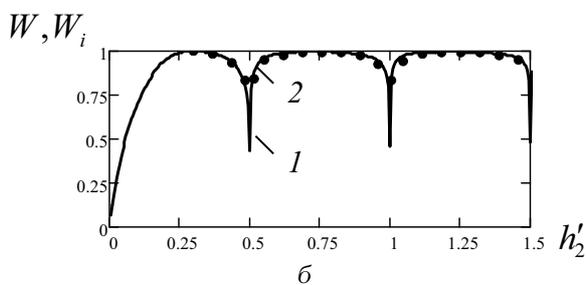
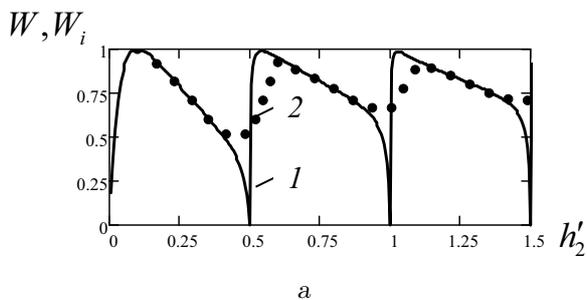


Рис. 4. Зависимость коэффициента прохождения от волнового размера h'_2 области II:
 а – $h'_1=0.1$, б – $h'_1=0.3$;
 1 – W (для тонального сигнала),
 2 – W_i (для импульсного сигнала)

мощности в отраженной волне к среднему потоку мощности в падающей волне (1), представляется в виде

$$V = \sum_{n=0}^{N_1} V_n, \quad V_n = \frac{\varepsilon_{nn} \text{Re}(\eta_n)}{k_0} |A_n|^2, \quad (18)$$

где N_1 определяет количество однородных мод в отраженной волне p_1 . Из закона сохранения энергии вытекает необходимость выполнения равенства $V+W=1$.

Исследуем энергетические характеристики процесса прохождения плоской гармонической волны сквозь неоднородность волновода типа “ступенька”, причем основное внимание сосредоточим на скачкообразном расширении волновода ($h_1 < h_2$). Нормируя пространственные величины к длине звуковой волны λ_0 , будем использовать такие обозначения: $h'_1 = h_1/\lambda_0$, $h'_2 = h_2/\lambda_0$, $x' = x/\lambda_0$, $z' = z/\lambda_0$.

На рис. 3 показаны примеры частотных характеристик коэффициента прохождения W при разных значениях отношения характерных размеров волновода h_1/h_2 . Вдоль оси абсцисс отложен волновой размер h'_2 . Если волновые размеры h_1 и h_2 малы ($h'_1 \ll 1$ и $h'_2 \ll 1$), то представленные результаты хорошо согласуются с теорией однододового волновода, согласно которой энергетический коэффициент прохождения нулевой нормальной волны сквозь неоднородность волновода типа ступенька определяется в виде [2]

$$W^{(0)} = \frac{4h_1/h_2}{(1 + h_1/h_2)^2}. \quad (19)$$

Например, при $h_1/h_2=0.2$ получаем $W^{(0)} \approx 0.556$, а при $h_1/h_2=0.3$ – $W^{(0)} \approx 0.71$, что совпадает с дан-

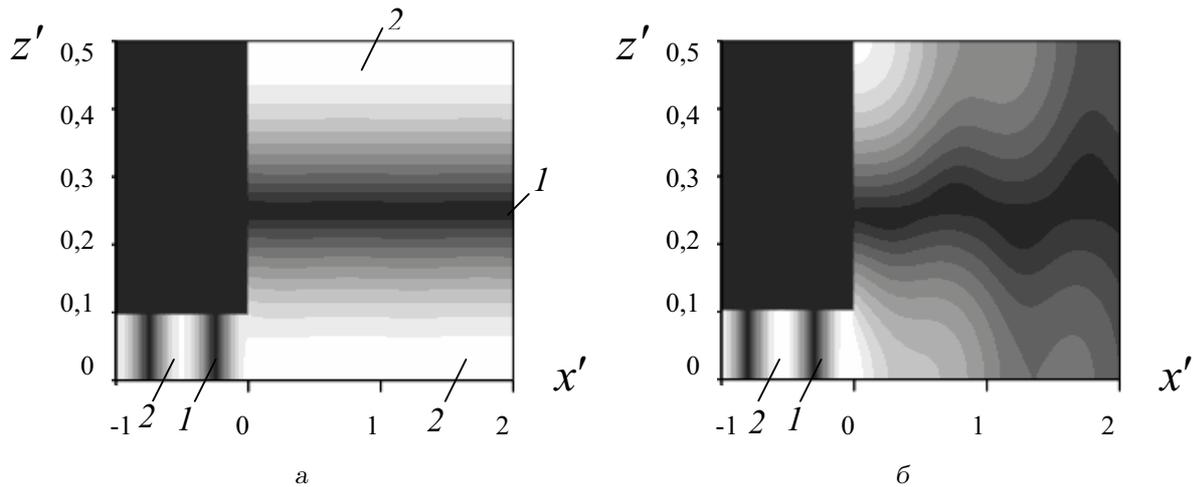


Рис. 6. Структура поля амплитуды давления в окрестности неоднородности волновода типа “ступенька”:
 а – $h'_1=0.1$, $h'_2=0.5$, б – $h'_1=0.1$, $h'_2=0.497$

ными графика.

Характерная черта кривых на рис. 3 – наличие резких спадов, которые появляются при последовательном увеличении частоты. При этом их количество тем больше, чем меньше величина отношения h_1/h_2 . Дальнейший рост частоты звуковой волны при заданной величине скачка делает неоднородность в волноводе практически звукопрозрачной. Так, при условии, что $h_1/h_2=0.3$ (см. рис. 3, б) для значений $h'_2 > 1.05$ коэффициент прохождения весьма близок к единице.

Такое поведение кривых на рис. 3 связано с модовой структурой звукового поля в области II. Обсудим этот момент более детально. Будем считать, что область I – одномодовый волновод, т. е. ее характерный размер $h_1 < \lambda_0/2$, и при построении конкретной характеристики величина h_1 остается постоянной. Характерный волновой размер области II h_2/λ_0 полагаем переменным. На рис. 4 показана зависимость энергетического коэффициента прохождения W (кривая 1) от волнового размера области II h'_2 . Рис. 4, а отвечает волновому размеру области I $h'_1=0.1$, а рис. 4, б – $h'_1=0.3$. Как видно, изменение величины энергетического коэффициента W имеет периодический характер с периодом, соответствующим половине длины волны – $\lambda_0/2$. Обращает на себя внимание наличие резких провалов кривой 1 при h_2 , кратном $\lambda_0/2$. Глубина провалов существенно зависит от волновой величины поперечного размера h'_1 области I. Если при $h'_1 \leq 0.2$ в указанных выше точках характеристик коэффициент прохождения W практически равен нулю, то при увеличении h'_1 эти провалы уменьшаются и при $h'_1 > 0.4$ ($h_2 > h_1$) “ступенька” становится практически звукопрозрачной.

Чтобы лучше понять характер кривых на рис. 3 и 4, рассмотрим рис. 5, где приведены зависимости энергетических коэффициентов возбуждения мод W_n , $n=0, 1, 2$, в области II от волнового размера h'_2 при падении на “ступеньку” в области I нулевой моды. При этом рис. 5, а отвечает волновому размеру области I $h'_1=0.1$, а рис. 5, б – $h'_1=0.3$. Согласно графику (см. также формулу (4)), кратные $\lambda_0/2$ значения h_2 отвечают зарождению очередной моды в области II. Если волновой размер области I $h'_1 \leq 0.2$, то при зарождении очередной моды области II коэффициенты возбуждения других мод W_n практически равны нулю (см. рис. 5, а). Поэтому, как следует из рис. 4, а, при h_2 , кратном $\lambda_0/2$, “ступенька” волновода фактически полностью отражает падающую волну.

Природу этого явления иллюстрирует рис. 6, а, на котором при $h'_1=0.1$ и $h'_2=0.5$ показано поле амплитуды давления в окрестности неоднородности (здесь черный цвет соответствует нулевой, а белый – максимальной амплитуде давления). При принятых волновых размерах системы амплитудные коэффициенты, определяющие звуковые поля в областях I и II, имеют следующие значения: $A_0 \approx 1$, $A_n \approx 0$ при $n > 0$; $B_0 \approx 0$, $B_1 \approx 2$, $B_n \approx 0$ при $n > 1$ (приближенный характер равенств обусловлен численным решением усеченной конечной системы уравнений (11), (12)). Рис. 6, а отображает ситуацию зарождения первой моды области II. Этот момент связан с образованием стоячей волны вдоль оси Oz ; распределение амплитуды давления отвечает первой моде области II. Согласно рис. 6, а, нулевое значение давления (так называемый узел – 1) располагается при $z=h_2/2$, а в плоскостях $z=0$ и $z=h_2$ – максимумы давления

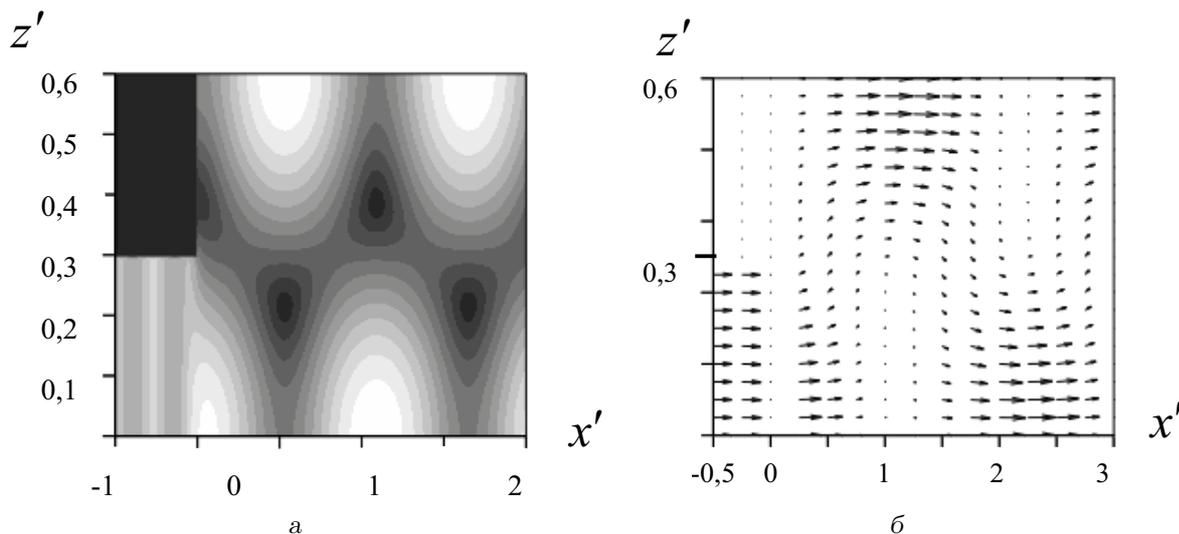


Рис. 7. Поле амплитуды давления (а) и вектора интенсивности (б) в окрестности неоднородности волновода типа “ступенька” при $h'_1=0.3$, $h'_2=0.6$

(пучности – 2). Понятно, что при таких обстоятельствах поток энергии в области II равняется нулю. В области I в результате суперпозиции падающей и отраженной волн образуется стоячая (вдоль оси Ox) волна с характерным чередованием узлов 1 (черные полосы) и пучностей 2 (белые полосы) звукового давления.

Немного уменьшив размер области II, сделав тем самым все ее моды, кроме нулевой, неоднородными. Пусть $h'_2=0.497$. В этом случае $|A_0|=0.964$, $|A_1|=0.113$, $|A_n|\ll|A_0|$ при $n>1$; $B_0=0.190$, $|B_1|=1.923$, $|B_n|\ll|B_1|$ при $n>1$. Полученные числовые значения, а также рис. 4, а показывают, что падающая нулевая мода p_0 практически полностью отражается, а в области II в окрестности зоны скачка сечения волновода доминирует первая неоднородная мода. На рис. 6, б показано распределение амплитуды давления вблизи “ступеньки”. Как видим, при подходе к ней в области II звуковое поле определяется первой неоднородной модой. Поэтому при удалении от сечения $x=0$ в области II амплитуда давления уменьшается. В области I, в результате суперпозиции падающей и отраженной волн, образуется стоячая (вдоль оси Ox) волна с характерным чередованием узлов и пучностей звукового давления.

Если $h'_1>0.2$, то при зарождении очередной моды коэффициенты возбуждения других мод W_n уже не будут малыми величинами (см. рис. 5, б). Как следствие, имеем частичное проникновение звука сквозь ступеньку (см. рис. 4, б).

На рис. 7 представлены картинки структуры

звукового поля для случая, когда $h'_1=0.3$, $h'_2=0.6$. В данной ситуации первая мода области II является однородной и звуковая энергия практически вся перетекает сквозь зону неоднородности волновода (см. рис. 4, б). На рис. 7, а показано распределение амплитуды давления, а на рис. 7, б – поле вектора интенсивности в окрестности зоны неоднородности (длина каждой стрелки пропорциональна модулю вектора, а ее начало определяет точку, в которой вычислены характеристики звукового поля). Энергетический коэффициент прохождения здесь $W=0.985$, а значения модулей амплитудных коэффициентов таковы: $|A_0|=0.122$, $|A_1|=0.269$, $|A_n|\ll|A_0|$ при $n>1$; $|B_0|=0.447$, $|B_1|=1.03$, $|B_n|\ll|B_1|$ при $n>1$. Видно, что суперпозиция двух однородных мод области II, нулевой и первой, образует периодические структуры, которые распространяются вдоль оси Ox волновода. В области I доминирует падающая нулевая мода (энергетический коэффициент отражения $V=0.015$). Поэтому оттенки серого цвета в областях минимума и максимума давлений мало отличаются, что говорит о достаточной близости этих величин.

2.2. Импульсный сигнал

Пусть теперь временная зависимость исходного сигнала имеет вид бесконечной последовательности отрезков синусоиды [1]:

$$p_0(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t), & 0 \leq t \leq \tau_i, \\ 0, & \tau_i \leq t \leq T_i, \end{cases} \quad (20)$$

где частота несущей ω_0 на временном промежутке длительности импульса τ_i – постоянная величина; T_i – период следования импульсов. Введем параметры, которые широко используются в импульсной технике, а именно, скважность $q = T_i/\tau_i$ и количество $N = \tau_i/T_0$ периодов T_0 несущей частоты $\omega_0 = 2\pi/T_0$, которые образуют импульс длительностью τ_i .

При проведении расчетов удобно оперировать безразмерными параметрами. Безразмерное время определим как нормированное к длительности импульса $\tau_i = NT_0$, то есть $t' = t/\tau_i$, а пространственные величины, как и ранее, будем нормировать к длине звуковой волны $\lambda_0 = cT_0$ на частоте несущей ω_0 . Тогда формулу (20) можно переписать в виде

$$p_0(t') = \begin{cases} \sin(2\pi Nt'), & 0 \leq t' \leq 1, \\ 0, & 1 \leq t' \leq q. \end{cases} \quad (21)$$

Представим исходный сигнал (20) в виде ряда Фурье

$$p(t) = \sum_{s=1}^{\infty} [a_s \cos(\omega_s t) + b_s \sin(\omega_s t)], \quad (22)$$

или, используя безразмерные величины N и q ,

$$p(t') = \sum_{s=1}^{\infty} \left[a_s \cos\left(\frac{2\pi}{q} st'\right) + b_s \sin\left(\frac{2\pi}{q} st'\right) \right], \quad (23)$$

где коэффициенты a_s и b_s определяются известными формулами, величины $p_s = \sqrt{a_s^2 + b_s^2}$ имеют смысл амплитуд отдельных гармонических составляющих. Частоты гармоник $\omega_s = 2\pi f_s = s\omega_1 = s\Omega_i$, $s = 1, 2, 3, \dots$, кратны частоте следования импульсов $\Omega_i = 2\pi/T_i$. Согласно формуле (20), постоянная составляющая ($s=0$) в ряде (22) отсутствует.

Каждое слагаемое суммы (22) образует в области I нулевую моду с частотой $\omega_s = s\omega_1 = s\Omega_i$. Следовательно, поле падающей волны p_0 в области I имеет вид суперпозиции нулевых мод с соответствующими частотами ω_s , $s = 1, 2, 3, \dots$:

$$p_0(x, z, t) = \sum_{s=1}^{\infty} (a_s + ib_s) \exp[-i(\omega_s t - k_s x)], \quad (24)$$

где постоянная распространения s -ой составляющей $k_s = \omega_s/c$.

Решив поставленную задачу для каждой гармонической составляющей ряда (24) и применив принцип суперпозиции, получим следующее выра-

жение для поля давления в области II:

$$p_2(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ (a_s + ib_s) \exp(-i\omega_s t) \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[B_{sn} \cos\left(\frac{n\pi z}{h_2}\right) \times \exp\left(i\frac{\omega_s}{c} x \sqrt{1 - \frac{n\pi c}{\omega_s h_2}}\right) \right] \right\} \quad (25)$$

или, используя безразмерные величины,

$$p_2(t') = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ (a_s + ib_s) \exp\left(-i\frac{2\pi s}{q} t'\right) \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[B_{sn} \cos\left(\frac{n\pi z'}{h_2'}\right) \times \exp\left(i\frac{2\pi s}{Nq} x' \sqrt{1 - \frac{n}{s} \frac{Nq}{2h_2'}}\right) \right] \right\}. \quad (26)$$

Поле давления отраженной волны в области I имеет схожий вид:

$$p_1(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ (a_s + ib_s) \exp(-i\omega_s t) \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{sn} \cos\left(\frac{n\pi z}{h_1}\right) \times \exp\left(-i\frac{\omega_s}{c} x \sqrt{1 - \frac{n\pi c}{\omega_s h_1}}\right) \right] \right\}. \quad (27)$$

Энергетический коэффициент W_i прохождения импульсного сигнала (24) сквозь “ступеньку” волновода определим как отношение энергии, которая проходит через произвольное сечение волновода в области II за промежутки времени $[0, T_i]$, к энергии E_i падающей волны (24), проходящей через произвольное сечение волновода в области I за промежутки времени $[0, \tau_i]$, т. е.

$$W_i = \frac{1}{E_i} \int_0^{h_2} \int_0^{T_i} \mathbf{Re}(p_2) \mathbf{Re}(v_{x2}) dt dz, \quad (28)$$

где

$$E_i = \int_0^{h_1} \int_0^{\tau_i} \mathbf{Re}(p_0) \mathbf{Re}(v_{x0}) dt dz.$$

Соответственно, коэффициент отражения будет

$$V_i = \frac{1}{E_i} \int_0^{h_1} \int_0^{T_i} \mathbf{Re}(p_1) \mathbf{Re}(v_{x1}) dt dz. \quad (29)$$

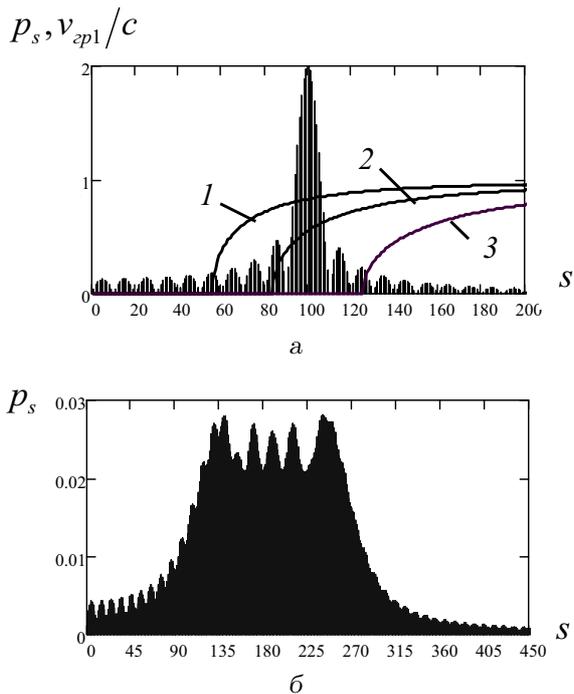


Рис. 8. Амплитудные спектры сигналов (23) – а и (31) – б. На графике а также даны значения относительных групповых скоростей первой моды области II:
 1 – $h'_2=0.9$, 2 – $h'_2=0.6$, 3 – $h'_2=0.4$

Положим в расчетах такие значения параметров: $N=10$, $q=10$, см. работу [1]. На рис. 8, а представлен амплитудный спектр $p_s = \sqrt{a_s^2 + b_s^2}$, $s=1, 2, \dots, 200$ сигнала (23) для первых двухсот гармонических составляющих. Его можно считать узкополосным, поскольку 90 % энергии сигнала удерживает полоса частот $[\omega_{90}, \omega_{110}]$. Отметим, что частота сотой гармоники равна частоте несущей – $\omega_{100} = \omega_0$.

Перейдем к анализу результатов. На рис. 4 кривые 2 определяют коэффициент прохождения импульсного сигнала W_i сквозь ступеньку волновода. Поскольку при выбранных параметрах сигнал (23) является узкополосным, ход кривой 1 для тонального сигнала с частотой ω_0 близок к поведению кривой 2, за исключением некоторых зон, формируемых вокруг значений h'_2 , которые кратны $\lambda_0/2$. Здесь, благодаря наличию дополнительных спектральных составляющих, провалы кривых для коэффициента прохождения W_i значительно меньше, чем провалы кривых для коэффициента прохождения W тонального сигнала с частотой ω_0 .

Теперь обратимся к временным зависимостям давления в волноводе. Положим координату точки наблюдения равной нулю ($z=0$), а волновой раз-

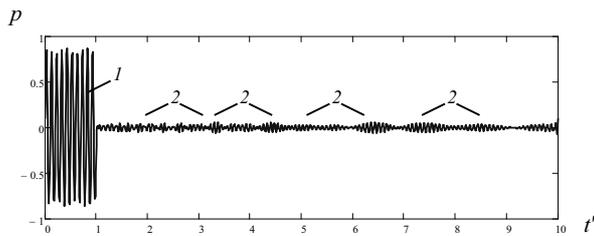


Рис. 9. Временная зависимость давления в точке с координатами $x'=40$, $z=0$ при $h'_1=0.3$, $h'_2=0.4$

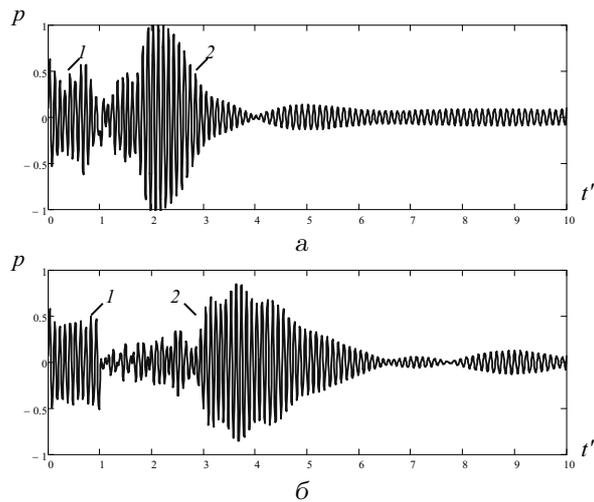


Рис. 10. Временные зависимости давления в разных точках наблюдения при $h'_1=0.3$, $h'_2=0.6$, $z=0$:
 а – $x'=20$, б – $x'=40$

мер области I – $h'_1=0.3$. Таким образом, относительно несущей частоты ω_0 область I представляет собой одномодовый волновод. Пусть волновой размер области II будет $h'_2=0.4$, т. е. область II – также одномодовый волновод относительно ω_0 . На рис. 9 показана временная зависимость давления в точке наблюдения с координатой $x'=40$. При этом из общего времени вычтено время распространения импульса со скоростью c до точки наблюдения. Как видим, импульсный сигнал 1 практически сохраняет свою форму, поскольку в основном формируется нулевыми модами с частотами $\omega_s = s\omega_1 = s\Omega_i$, $s=1, 2, 3, \dots$ Это обусловлено тем, что для данного узкополосного сигнала первая мода области II становится однородной для гармонических составляющих с частотами $\omega > \omega_{125}$ (см. рис. 8, а, кривая 3). Они имеют относительно малые амплитуды (см. рис. 8, а) и, как следствие, образуют малые возмущения 2, соответствующие первой моде, которые приходят в точку наблюдения после основного сигнала 1 с некоторой задержкой (см. рис. 9).

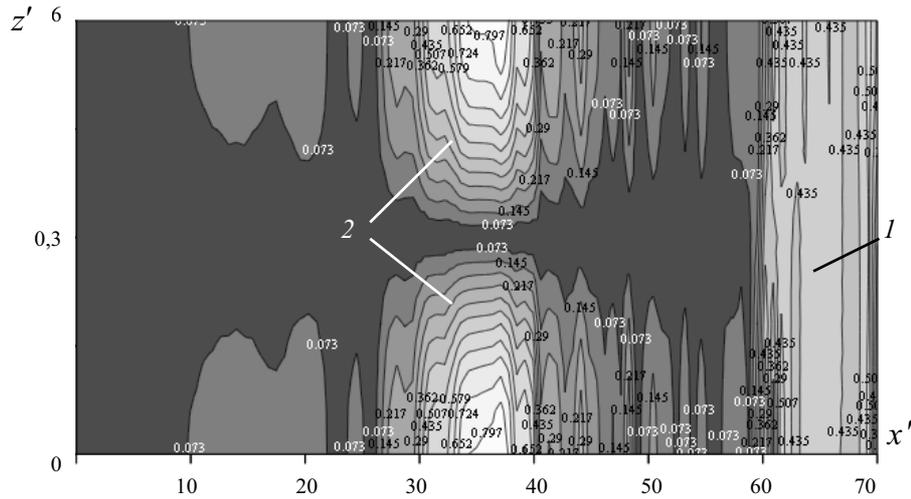


Рис. 11. Пространственное распределение амплитуды давления в области II волновода для момента времени $t' = 7$ при $h'_1 = 0.3$, $h'_2 = 0.6$

Увеличим волновой размер второй области II до величины $h'_2 = 0.6$ (рис. 10). Это приводит к появлению двух однородных мод в области II (нулевой и первой), для которых гармонические составляющие импульсного сигнала располагаются в энергонесущей части спектра исходного сигнала. Действительно, гармоники первой моды с частотами ω_s , $s > 83$ – однородные волны (см. кривую 2 на рис. 8, а); вторая мода однородна для гармоник с частотами ω_s , $s > 166$. Как следует из рис. 10, вследствие дисперсионных свойств первой моды, исходный сигнал в процессе распространения разделяется практически на два импульса, обозначенные как 1 и 2. Первый из них формируется бездисперсионными нулевыми модами с частотами ω_s , $s \geq 1$, а второй, со временем изменяющий свою форму, – дисперсионными первыми модами с частотами ω_s , $s > 83$. Для определенного конечного расстояния распространения сигнала можно выделить путь, в котором сосредоточена основная доля энергии сигнала 2. В этом случае можно говорить о задержке прихода сигнала 2 в точку наблюдения по отношению к сигналу 1. Например, на расстоянии $x' = 40$ (см. рис. 10, б) временной интервал между импульсом 1 и пучком импульса 2 составляет приблизительно $2\tau_i$.

Иллюстрацией к сказанному служит рис. 11, на котором показано пространственное распределение амплитуды давления в области II волновода для нормированного момента времени $t' = 7$. Нормированная величина пространственной длительности исходного импульса соответствует

$$\frac{c\tau_i}{\lambda_0} = \frac{\tau_i}{T_0} = N -$$

количеству периодов N несущей частоты (напомним, что в наших исследованиях $N = 10$). Нормированное расстояние, которое проходит импульс со скоростью звука c :

$$x' = \frac{x}{\lambda_0} = \frac{ct}{\lambda_0} = \frac{t}{\tau_i} N = t' N,$$

т. е. при $t' = 7$ получаем $x' = 70$.

Как видно из рис. 11, подобно временным зависимостям давления в некоторой точке наблюдения (см. рис. 10), исходный импульс разделяется на два пространственных возмущения 1 и 2. Возмущение 1 представляет собой импульс, который образован нулевыми модами области II с частотами $\omega_s = s\omega_1 = s\Omega_i$, $s = 1, 2, 3, \dots$. Его передний фронт в момент времени $t' = 7$ имеет координату $x' = 70$, а задний – $x' = 60$. По сечению волновода в зоне пространственного возмущения 1 сохраняется практически постоянная амплитуда давления. Как и следовало ожидать, вследствие отсутствия дисперсии у нулевой моды возмущение 1 распространяется со скоростью c , сохраняя при этом свою пространственную структуру.

Возмущение 2 на рис. 11 образовано суперпозицией первых мод области II с частотами ω_s , $s > 83$. Первой моде соответствует косинусоидальное распределение амплитуды давления вдоль сечения волновода, а именно, $\cos(\pi z/h_2)$. При этом вследствие дисперсионных свойств первой моды путь, в котором сосредоточена основная доля энергии возмущения 2, приходит с задержкой по отношению к возмущению 1. Пространственная протяженность сигнала 2 в целом увеличена.

Временные зависимости давления на рис. 10 со-

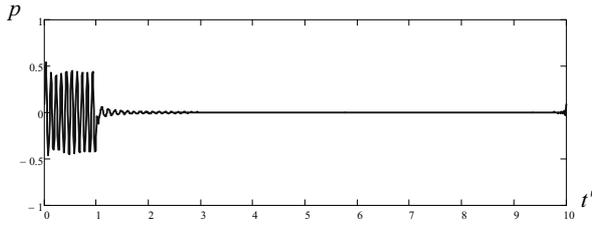


Рис. 12. Временная зависимость давления в точке с координатой $x'=40$, $z=h_2/2$ при $h_1'=0.3$, $h_2'=0.6$

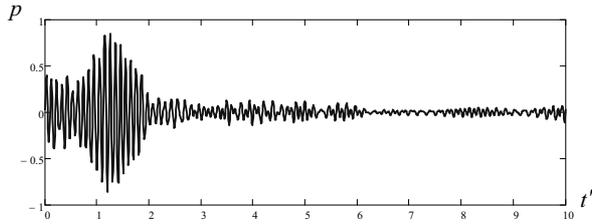


Рис. 13. Временная зависимость давления в точке с координатой $x'=40$, $z=0$ при $h_1'=0.3$, $h_2'=0.9$

ответствуют точкам наблюдения с координатой $z=0$. Поверхность $z=0$ в данной задаче считается акустически жесткой, поэтому для любой моды волновода значение амплитуды давления на ней максимально. Если же перемещать регистрирующий прибор вдоль координаты z , то постоянство амплитуды давления будет сохраняться только для нулевой моды. Поэтому в точках наблюдения с координатой $z=h_2/2$, которые соответствуют нулевым значениям давления в первой моде, временные зависимости будут представлять практически неискаженный исходный сигнал, который формируется нулевыми модами области II с частотами $\omega_s = s\omega_1 = s\Omega_i$, $s=1, 2, 3, \dots$ и амплитудами, которые определяются коэффициентом прохождения импульса через зону скачкообразного изменения сечения волновода. Представленные соображения наглядно иллюстрирует рис. 12, на котором показана временная зависимость давления в точке с координатой $x'=40$, $z=h_2/2$ ($h_1'=0.3$, $h_2'=0.6$).

Увеличим характерный размер области II до величины $h_2'=0.9$, оставляя в энергонесущей части спектра сигнала нулевую и первую однородные моды. На рис. 13 дана временная зависимость давления в точке с координатами $x'=40$, $z=0$. Сравнивая рис. 13 с рис. 10, б, отмечаем, что теперь влияние дисперсионных свойств первой моды на исходный импульс при его распространении в области II проявляется меньше. Для объяснения этого явления обратимся к рис. 8, а, где вместе с графиком амплитудного спектра исходного

сигнала показаны частотные зависимости групповых скоростей первой моды области II для трех величин волнового размера h_2' : кривая 1 – $h_2'=0.9$, кривая 2 – $h_2'=0.6$ и кривая 3 – $h_2'=0.4$. Как видим, значения групповой скорости первой моды при $h_2'=0.9$ в энергонесущей части спектра сигнала ($[\omega_{90}, \omega_{110}]$) отличаются от скорости нулевой моды в меньшей степени, чем при $h_2'=0.6$, что и приводит к уменьшению искажений.

Рассмотрим теперь распространение в волноводе частотно модулированного сигнала, в котором частота несущей на временном промежутке длительности импульса τ_i увеличивается от ω_0 до $\omega_0(1+\alpha\tau_i)$. Временная зависимость такого исходного сигнала имеет вид [1]

$$p(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t(1 + \alpha t)), & 0 \leq t \leq \tau_i, \\ 0, & \tau_i \leq t \leq T_i. \end{cases} \quad (30)$$

Используя безразмерные параметры, перепишем выражение (30) следующим образом:

$$p(t') = \begin{cases} \sin(2\pi N t'(1 + \beta t')), & 0 \leq t' \leq 1, \\ 0, & 1 \leq t' \leq q. \end{cases} \quad (31)$$

Здесь $\beta = \alpha\tau_i$. Оставляем неизменными значения безразмерных параметров $N=10$, $q=10$ и положим $\beta=0.9$, см. работу [1]. При таких параметрах сигнал (31) следует отнести к широкополосным, ведь если для сигнала (21) 90 % энергии сигнала удерживает полоса частот $[\omega_{90}, \omega_{110}]$, то теперь энергонесущим становится частотный диапазон $[\omega_{90}, \omega_{260}]$ (см. рис. 8, б).

На рис. 14 показаны временные зависимости давления в четырех точках наблюдения (с координатой $z=0$) при распространении частотно модулированного сигнала в волноводе с характерными размерами $h_1'=0.3$, $h_2'=0.6$. При таких его размерах гармонические составляющие первой моды однородны на частотах $\omega > \omega_{83}$, второй моды – на $\omega > \omega_{167}$, третьей – на $\omega > \omega_{250}$.

Амплитудный спектр возбуждения первых трех мод области II $|(a_s + ib_s)B_{sn}|$ ($n=0, 1, 2$) на частотах $\omega_s = s\omega_1 = s\Omega_i$ показан на рис. 15. Как видно из графиков, основная часть энергии сигнала при его распространении в области II сосредоточена в нулевой и первой модах.

Следует отметить существенные отличия временных зависимостей рис. 14 от рис. 10 (для немодулированного импульсного сигнала). Во-первых, значительно сократился временной интервал между возмущениями нулевой и первой моды, на которые разделяется в процессе распространения исходный сигнал. Во-вторых, для возмущения

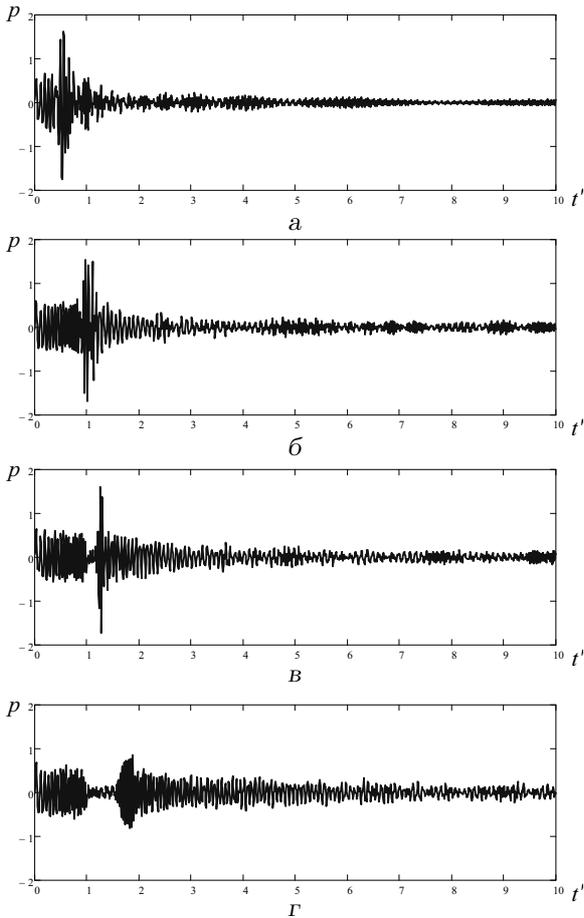


Рис. 14. Временные зависимости давления в разных точках наблюдения при распространении в волноводе частотно модулированного сигнала, $h'_1=0.3$, $h'_2=0.6$, $z=0$:
 а - $x'=10$, б - $x'=40$, в - $x'=70$, г - $x'=150$

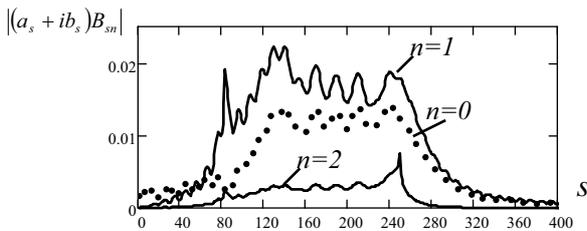


Рис. 15. Амплитуды возбуждения низших трех мод области II (кривые $n=0, 1, 2$) на частотах $\omega_s = s\omega_1 = s\Omega_i$ при $h'_1=0.3$, $h'_2=0.6$

первой моды наблюдается явление дисперсионной фокусировки, о котором шла речь в работе [1]. Интересно отметить, что значительный рост на малом пространственно-временном промежутке амплитуды сигнала наблюдается именно вблизи зоны неоднородности (см. рис. 14, а) и сохраняется

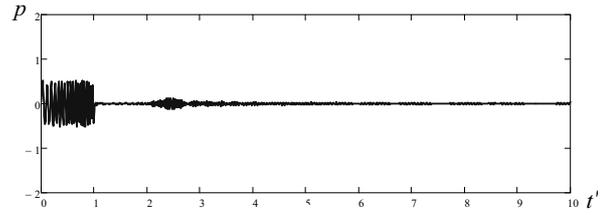


Рис. 16. Временная зависимость давления в точке с координатами $x'=40$, $z=h_2/2$ при $h'_1=0.3$, $h'_2=0.6$

при распространении на его определенное расстояние (см. рис. 14, в). Для выбранных размеров волновода разрушение образованного скачка давления происходит приблизительно при $x' > 100$. В качестве примера на рис. 14, г показана временная зависимость в точке наблюдения с координатой $x'=150$. Понятно, что образование и разрушение скачка давления как эффект дисперсионной фокусировки обусловлен интерференционными процессами между гармоническими составляющими импульсного сигнала.

Поместим теперь точку наблюдения на плоскости нулевого значения давления в первой моде (например, $x'=40$, $z=h_2/2$, рис. 16). Как видим, в отличие от соответствующего графика для немодулированного импульса (см. рис. 12), в паузе исходного сигнала наблюдается регистрация некоторого звукового давления, хотя и с относительно малой амплитудой. Для пояснения этого факта обратимся к рис. 15. Гармонические составляющие второй моды становятся однородными на частотах $\omega > \omega_{167}$, поэтому для модулированного импульсного сигнала в основном именно они определяют наличие искажающего “хвоста” относительно малой амплитуды, даже если точка наблюдения располагается в плоскости $z=h_2/2$.

Понимание природы дисперсионной фокусировки на основе модовой структуры поля в волноводе позволяет говорить о том, что есть возможность повысить ее эффективность благодаря отсутствию нулевой моды в области II. В таком случае более энергонасыщенной станет первая мода. Если поверхность волновода $x \geq 0$, $z=h_2$ положить идеально мягкой, то нулевая мода в области II будет отсутствовать. В этом случае формулы (3) и (4) для давления в области II при распространении в области I гармонической плоской волны приобретут вид

$$p_2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi z}{2h_2}\right) \times \exp[-i(\omega_0 t - \gamma_n x)], \quad (32)$$

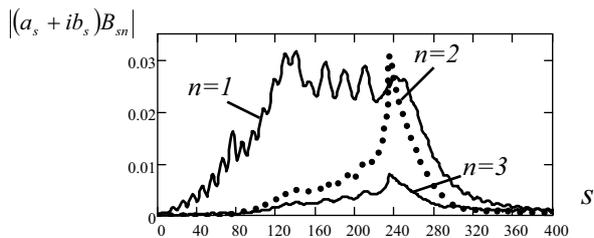


Рис. 17. Амплитуды возбуждения первой, второй и третьей мод области II на частотах $\omega_s = s\omega_1 = s\Omega_i$ при $h'_1 = 0.17$, $h'_2 = 0.32$ (граница $x \geq 0$, $z = h_2$ области II – идеально мягкая)

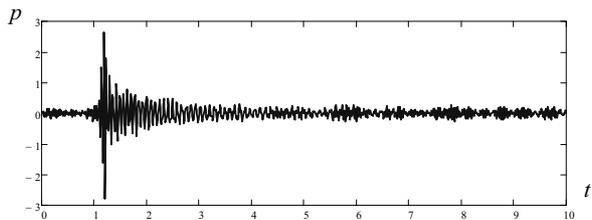


Рис. 18. Временная зависимость давления в точке с координатами $x' = 70$, $z = 0$ при $h'_1 = 0.17$, $h'_2 = 0.32$ (граница $x \geq 0$, $z = h_2$ области II – идеально мягкая)

где

$$\gamma_n = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - \left[\frac{(2n-1)\pi}{2h_2}\right]^2}, & \text{если } k_0^2 > \frac{(2n-1)\pi}{2h_2}, \\ i\sqrt{\left[\frac{(2n-1)\pi}{2h_2}\right]^2 - k_0^2}, & \text{если } k_0^2 < \frac{(2n-1)\pi}{2h_2}. \end{cases} \quad (33)$$

Дальнейшая коррекция выражений для импульсного сигнала очевидна.

Положим $h'_1 = 0.17$, $h'_2 = 0.32$. Выбор таких волновых размеров обусловлен тем, что при них гармонические составляющие первой моды будут однородными на частотах $\omega > \omega_{78}$, а второй – на частотах $\omega > \omega_{234}$. Амплитудный спектр возбуждения первых трех мод области II для этого случая показан на рис. 17. Как видим, основная часть энергии сигнала при его распространении в области II сосредоточена в первой моде.

Как следствие, на расстояниях $x' \approx 20 \dots 100$ наблюдается скачок давления, значение которого на поверхности $x \geq 0$, $z = 0$ превышает амплитуду падающей из области I волны более, чем в два раза (на рис. 18 показана временная зависимость давления в точке с координатами $x' = 70$, $z = 0$).

ВЫВОДЫ

1. Решена задача о распространении тонального и импульсного звуковых сигналов в плоском нерегулярном волноводе с жесткими поверхностями и с неоднородностью в виде скачкообразного изменения поперечного размера волновода.
2. Проанализирован процесс распространения тонального звукового сигнала в волноводе при скачкообразном расширении его поперечного размера ($h_1 < h_2$). Установлено, что энергетический коэффициент прохождения волны сквозь зону неоднородности зависит от волновых размеров волновода. Выявлено, что при поперечном размере $h'_1 > 0.4$ зона скачкообразного расширения волновода становится практически звукопрозрачной. Если $h'_1 < 0.4$, то в характеристиках для коэффициента прохождения возникают провалы при значениях h_2 , кратных половине длины звуковой волны. Глубина этих провалов тем больше, чем меньше значение h_1 . Показано, что природа этого явления обусловлена модовой структурой звукового поля в области II. Так, при h_2 , кратном половине длины звуковой волны, в области II волновода происходит зарождение очередной моды. При этом в случае относительно малых волновых размеров области I ($h'_1 < 0.2$) коэффициенты возбуждения остальных мод области II крайне малы, что определяет практически полное отражение волны от скачкообразного расширения волновода. При $h'_1 > 0.2$ и значениях h_2 , кратных половине длины звуковой волны, однородные моды имеют ненулевые коэффициенты возбуждения, что и влечет за собой частичное проникновение звука в область II.
3. Проанализирован процесс распространения узкополосного импульсного звукового сигнала в волноводе со скачкообразным расширением. Установлено, что в ситуации, когда весь нерегулярный волновод является одномодовым, исходный импульсный сигнал практически сохраняет свою пространственно-временную структуру. При этом его изменения связаны с величиной амплитуды несущей. Если увеличение поперечного размера области II приводит к появлению однородных первых мод определенных частот, то при распространении импульсного сигнала его пространственно-временная структура претерпевает изменения. Постепенно исходный импульс разделя-

ется на два, первый из которых формируется нулевыми, а второй – первыми модами области II соответствующих частот. При этом вследствие дисперсионных свойств первой моды второй сигнал в процессе распространения растягивается в пространстве и времени. Показано, что в случае однородных нулевой и первой мод области II изменение формы исходного узкополосного сигнала существенно зависит от поперечного размера области II. Это связано со степенью близости групповых скоростей первых мод области II в энергонесущей части спектра исходного импульса к скорости звука в среде, наполняющей волновод.

4. Проанализирован процесс распространения частотно модулированного импульсного звукового сигнала в нерегулярном волноводе. В частности, установлена возможность возникновения дисперсионной фокусировки, о которой шла речь в работе [1]. Показано, что для выбранных размеров волновода ($h'_1=0.3$, $h'_2=0.6$) разрушение скачка давления, образованного вблизи неоднородности волновода, происходит на расстояниях $x' > 100$. Показана возможность усиления эффекта дисперсион-

ной фокусировки за счет отсутствия нулевой моды в области II в случае, когда поверхность волновода $x \geq 0$, $z = h_2$ можно принять идеально мягкой.

5. Полученные количественные данные могут оказаться полезными при проектировании воздушных звукопроводов (например, вентиляционных каналов), а также при изучении распространения звука в мелком море.
1. Буланая М. А., Гринченко В. Т., Вовк И. В., Мацыпура В. Т. Особенности распространения звукового импульсного сигнала в плоском регулярном волноводе // Акуст. вісн.– 2008.– 11, N 4.– С. 9–23.
 2. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука.– М.: Изд-во МГУ, 1960.– 335 с.
 3. Шестопапов В. П., Кириленко А. А., Рудь Л. А. Резонансное рассеяние волн. Том 2. Волноводные неоднородности.– К.: Наук. думка, 1986.– 214 с.
 4. Сиренко Ю. К. Моделирование и анализ переходных процессов в открытых периодических, волноводных и компактных резонаторах.– Харьков: ЭДЭНА, 2003.– 363 с.
 5. Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках.– К.: Наук. думка, 1986.– 240 с.
 6. Грінченко В. Т., Вовк І. В., Маціпура В. Т. Основи акустики.– К.: Наук. думка, 2007.– 640 с.