

УДК 534.26

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВОГО ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА В ПЛОСКОМ РЕГУЛЯРНОМ ВОЛНОВОДЕ

М. А. БУЛАНАЯ*, И. В. ВОВК**, В. Т. ГРИНЧЕНКО**, В. Т. МАЦЫПУРА*

*Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

**Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 07.07.2008

Проанализированы особенности распространения звукового импульсного сигнала в плоском регулярном волноводе с идеальными границами. В качестве исходной выбрана модель сигнала в виде периодической во времени последовательности отрезков синусоиды при отсутствии или наличии частотной модуляции. Рассмотрены два варианта пространственной структуры исходного сигнала: одномодовая и многомодовая. При распространении импульсного сигнала в волноводе его пространственно-временная структура претерпевает изменения вследствие дисперсии и за счет свойств волновода как фильтра. Исследованы характерные изменения структуры исходного сигнала. Вычислен ряд параметров, которые дают количественную оценку этим изменениям.

Проаналізовано особливості поширення звукового імпульсного сигналу у плоскому регулярному хвилеводі з ідеальними межами. За вихідну вибрано модель сигналу у вигляді періодичної у часі послідовності відрізків синусоїди за наявності або відсутності частотної модуляції. Розглянуто два варіанти просторової структури вихідного сигналу: одномодова й багатомодова. При поширенні імпульсного сигналу у хвилеводі його просторово-часова структура зазнає змін внаслідок дисперсії і за рахунок властивостей хвилеводу як фільтра. Досліджено характерні зміни структури вихідного сигналу. Обчислено ряд параметрів, котрі дають кількісну оцінку цих змін.

Propagation features of a sound pulse signal in a regular plane waveguide with ideal boundaries have been analyzed. The periodic time sequence of sinusoidal segments without or with frequency modulation is chosen as a model of the initial signal. Two variants of spatial structure of an initial signal are considered: the single- and multimode one. When the pulse signal propagates in the waveguide, its spatial-time structure is affected by the dispersion and filtering features of the waveguide. The typical changes of the initial signal structure have been studied. Some parameters providing the quantitative estimation of such changes have been calculated.

ВВЕДЕНИЕ

Распространение звука в волноводных структурах наблюдается в природе и разнообразных технических устройствах. К естественным волноводам относятся различные среды, ограниченные поверхностями, хорошо отражающими звуковые волны (например, моря и океаны, для которых верхней границей является воздух, а нижней – донные грунты). Кроме того, встречаются волноводы, в которых границы определены не резко – они образуются в толще атмосферы или океана за счет особого распределения значений скорости звука в их сечении [1].

В инженерной практике широкое применение нашли волноводные системы для упругих и электромагнитных волн. В прикладной электродинамике теория волноводов получила толчок к своему развитию благодаря появлению радиолокационной техники и освоению деци- и сантиметрового диапазонов длин электромагнитных волн. Вызванные практическими потребностями теоретические и экспериментальные исследования позволили создать элементную базу для конструиро-

вания радиосистем различного назначения. Волноводные структуры для упругих волн, наполненные газом или жидкостью и твердотельные, встречаются в устройствах различного назначения. Так, в ультразвуковых технологических приборах твердые звукопроводы служат для передачи продольных, изгибных или крутильных колебаний от электроакустического преобразователя к объекту ультразвукового воздействия. В устройствах, использующих принцип поверхностных акустических волн, волноводы служат для канализации энергии волны, изменения направления ее распространения, увеличения времени задержки и т.п. Таких примеров можно привести много, поэтому проблеме распространения в волноводе возмущений разной природы большое внимание уделяется во многих работах [2–7].

Характер волноводного распространения сигнала довольно сложен. Он определяется геометрической конфигурацией волновода, свойствами граничных поверхностей и способом возбуждения волнового движения. Необходимо подчеркнуть, что в подавляющем большинстве работ волноводное распространение изучалось для гармониче-

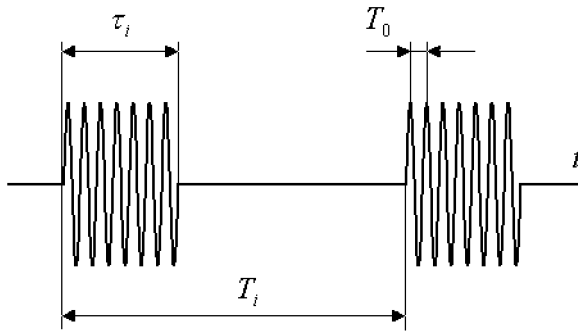


Рис. 1. Временная зависимость давления в исходном сигнале

ского во времени сигнала. Тем не менее, реальный сигнал всегда имеет конечную во времени продолжительность или, другими словами, представляет собой некоторый импульс. Распространение импульса в волноводе сопровождается рядом специфических эффектов, что вызывает большой интерес к изучению именно нестационарных процессов [8]. Принимая это во внимание, авторы намерены посвятить цикл публикаций исследованию особенностей волноводного распространения импульсного звукового сигнала. В данной статье рассмотрено прохождение звукового импульса в волноводе с наиболее простой геометрией границ.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИСХОДНОГО ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА

Пусть временная зависимость исходного сигнала представляет собой бесконечную периодическую последовательность импульсов в виде отрезка синусоиды (рис. 1). Часто такой сигнал называют радиоимпульсом. Можно выделить две причины, обуславливающие использование в качестве математической модели сигнала не одиночный импульс, а радиоимпульс. Во-первых, это дает возможность ограничить рассмотрение волнового процесса интервалом периода следования импульсов T_i . Во-вторых, такие сигналы широко применяются в локационных устройствах разного назначения, например, в локаторах с использованием электромагнитных или упругих волн, медицинских сканерах и т. д. Этот подход позволяет наиболее просто использовать данные о распространении гармонического сигнала для получения количественных оценок распространения импульса.

При распространении импульсного сигнала в

волноводе его пространственно-временная структура подвергается воздействию со стороны волновода посредством двух основных механизмов. Один из них обусловлен тем, что волновод служит фильтром, поскольку на частотах, меньше критической, соответствующая нормальная волна оказывается неоднородной, а второй определяется дисперсией волн, распространяющихся в волноводе. Проявление этих двух механизмов может иметь свои особенности при распространении различных сигналов. Это стимулирует рассмотрение более общей, чем на рис. 1, ситуации, при которой частота несущей изменяется (модулированный импульсный сигнал).

Исходя из сказанного, введем в рассмотрение три варианта временной зависимости давления в исходном сигнале:

- сигнал 1 – частота несущей ω_0 на временном промежутке продолжительности импульса τ_i постоянна –

$$p(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t), & 0 \leq t \leq \tau_i, \\ 0, & \tau_i \leq t \leq T_i, \end{cases} \quad (1)$$

- сигнал 2 – частота несущей на временном промежутке продолжительности импульса τ_i увеличивается от ω_0 до $\omega_0(1+\alpha\tau_i)$ –

$$p(t) = \begin{cases} \sin[\omega_0 t(1 + \alpha t)], & 0 \leq t \leq \tau_i, \\ 0, & \tau_i \leq t \leq T_i, \end{cases} \quad (2)$$

- сигнал 3 – частота несущей на временном промежутке продолжительности импульса τ_i уменьшается от $\omega_0(1+\alpha\tau_i)$ до ω_0 –

$$p(t) = \begin{cases} \sin[\omega_0(\tau_i - t) \times \\ \times (1 + \alpha(\tau_i - t))], & 0 \leq t \leq \tau_i, \\ 0, & \tau_i \leq t \leq T_i. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $T_i = 2\pi/\Omega_i$; Ω_i и T_i – частота и период следования импульсов; постоянная α определяет скорость изменения несущей со временем. Очевидно, амплитудные спектры сигналов 2 и 3 будут одинаковы, поскольку они являются “зеркально отраженными” во времени.

Введем параметры, которые широко используются в импульсной технике: скважность q и количество N периодов T_0 несущей с неизменной частотой $\omega_0 = 2\pi/T_0$, которые образуют импульс продолжительностью τ_i :

$$q = \frac{T_i}{\tau_i}, \quad N = \frac{\tau_i}{T_0}, \quad \text{тогда} \quad Nq = \frac{T_i}{T_0}. \quad (4)$$

Представим исходный сигнал (1), или (2), или (3) в виде ряда Фурье

$$p(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)], \quad (5)$$

где коэффициенты a_k и b_k определяются по известным формулам, а величины $p_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ имеют смысл амплитуд отдельных гармонических составляющих. Частоты гармоник $\omega_k = 2\pi f_k = k\omega_1 = k\Omega_i$, $k = 1, 2, 3, \dots$ кратны частоте следования импульсов Ω_i . Согласно формулам (1)–(3), постоянная составляющая ($k=0$) в ряде (5) отсутствует.

При проведении численных расчетов удобно оперировать безразмерными величинами N, q . Кроме того, безразмерное время определим как время, нормированное к продолжительности импульса $\tau_i = NT_0$, т. е. $t' = t/\tau_i$, а пространственные величины будем нормировать к длине звуковой волны $\lambda_0 = cT_0$ на частоте несущей ω_0 : $x' = x/\lambda_0$, $z' = z/\lambda_0$, $h' = h/\lambda_0$. Тогда формулы (1)–(3) и (5) можно переписать в виде

$$p(t') = \begin{cases} \sin(2\pi N t'), & 0 \leq t' \leq 1, \\ 0, & 1 \leq t' \leq q, \end{cases} \quad (6)$$

$$p(t') = \begin{cases} \sin(2\pi N t'(1 + \beta t')), & 0 \leq t' \leq 1, \\ 0, & 1 \leq t' \leq q, \end{cases} \quad (7)$$

$$p(t') = \begin{cases} \sin[2\pi N(1 - t') \times \\ \times (1 + \beta(1 - t'))], & 0 \leq t' \leq 1, \\ 0, & 1 \leq t' \leq q, \end{cases} \quad (8)$$

$$p(t') = \sum_{k=1}^K \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi}{q} k t'\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{q} k t'\right) \right], \quad (9)$$

здесь $\beta = \alpha\tau_i$. При расчетах положим $N=10$, $q=10$, откуда $Nq=100$. Как будет показано ниже, такой выбор величины N позволяет рассматривать сигнал 1 как сигнал с узким спектром. Значение скважности $q=10$ определяет временной интервал между импульсами в исходном сигнале, который оказывается вполне достаточным для последующего исследования формы сигнала при его распространении в волноводе.

На рис. 2 представлены величины амплитудных коэффициентов $p_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $k = 1, 2, \dots, K$ гармонических составляющих ряда (9). Другими словами, здесь показан амплитудный спектр исходного сигнала. При этом рис. 2, а соответствует сигналу

1, а рис. 2, б – частотно-модулированному сигналу 2 или 3 при значении постоянной $\beta=0.9$. Количество членов K конечного ряда (9) взято равным $K=500$.

Согласно рис. 2, а, для сигнала 1 максимальную амплитуду имеет сотая гармоника, отвечающая частоте несущей ω_0 . Действительно, из равенства $\omega_k \equiv k\Omega_i = \omega_0$, принимая во внимание формулы (4), получаем $k = T_i/T_0 = Nq = 100$. Частотный отрезок $\Delta\omega$ сигнала 1 между частотами $\omega_0 - 2\pi/\tau_i$ и $\omega_0 + 2\pi/\tau_i$ называется эффективной полосой спектра [9]. Номера гармоник, определяющих крайние частоты этой полосы, находятся из соотношений $\omega_0 \pm 2\pi/\tau_i = k\Omega_i$. Отсюда, используя безразмерные параметры N и q , получаем $k = q(N \pm 1)$, т. е. $k = 90$ и $k = 110$. Поскольку

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{110 - 90}{100} = 0.2 < 1,$$

то имеем так называемый узкополосный сигнал, для которого в эффективной полосе спектра содержится 90 % всей энергии.

Спектр сигналов 2 или 3, отображенный на рис. 2, б, является более широким. Если для сигнала 1 большую часть энергии удерживает полоса частот $[\omega_{90}; \omega_{110}]$, то для рассматриваемых частотно-модулированных сигналов такой полосой на шкале частот будет отрезок $[\omega_{90}; \omega_{260}]$.

Оценку погрешности аппроксимации исходного сигнала (6)–(8) конечным рядом Фурье (9) проведем с помощью энергетического соотношения

$$\delta = \frac{1}{\int_0^q [p(t')]^2 dt'} \times \int_0^q \left[p(t') - \sum_{k=1}^K \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{q} k t'_k\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{q} k t'_k\right) \right) \right]^2 dt'. \quad (10)$$

Здесь $p(t')$ – исходный сигнал, определяемый по одной из формул (6)–(8). Согласно выбранным численным значениям N, q, K , для сигнала 1 погрешность составляет $\delta \approx 7.5 \cdot 10^{-6}$, а для частотно-модулированного (2 или 3) – $\delta \approx 1.5 \cdot 10^{-4}$. Понятно, что эти погрешности очень малы. Если резко снизить количество составляющих ряда (9), например, взять $K=200$, то для сигнала 1 получим $\delta \approx 5.8 \cdot 10^{-4}$, что еще вполне приемлемо. Однако для частотно-модулированного сигнала ситуация будет совсем другой – здесь $\delta \approx 0.44$.

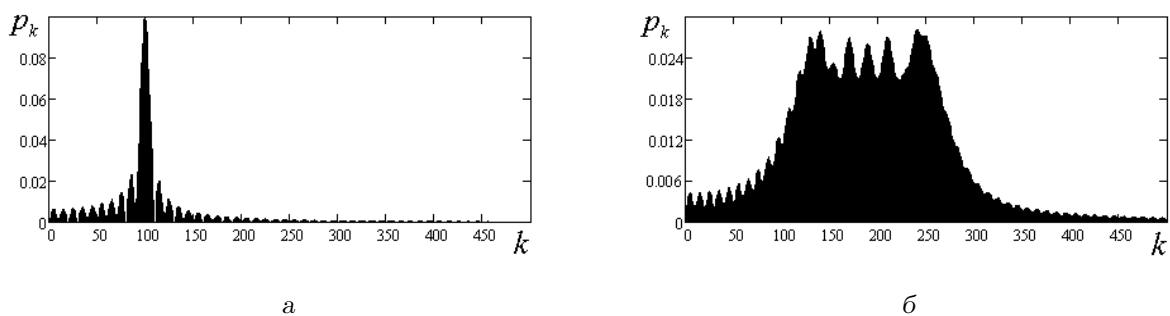


Рис. 2. Амплитудный спектр исходного сигнала, $N=10$, $q=10$, $K=500$:
 а – сигнал 1, б – сигналы 2 и 3 ($\beta=0.9$)

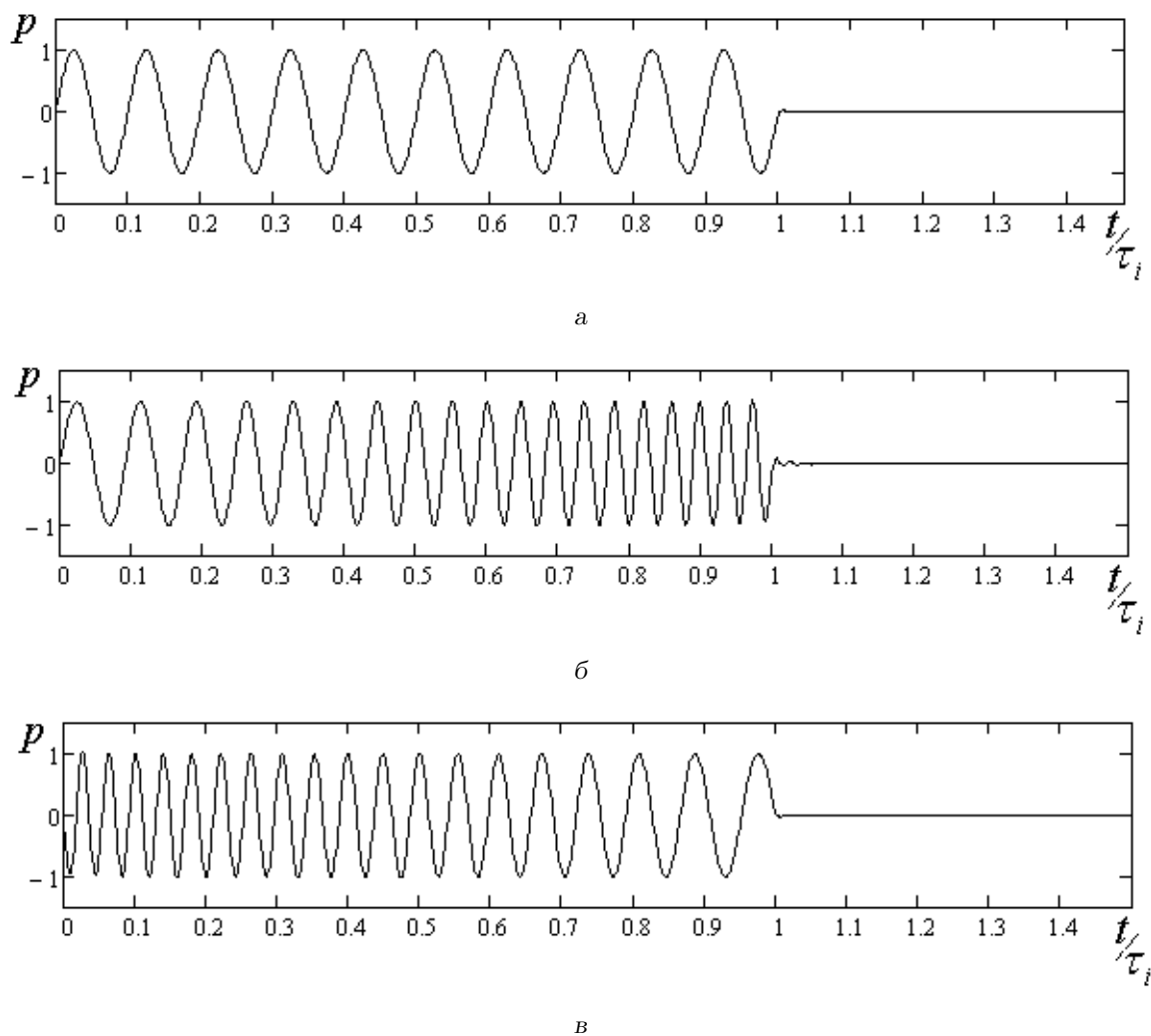


Рис. 3. График исходного сигнала, образованного конечным рядом Фурье (9) при удержании $K=500$ составляющих ряда:
 а – сигнал 1, б – сигнал 2 ($\beta=0.9$), в – сигнал 3 ($\beta=0.9$)

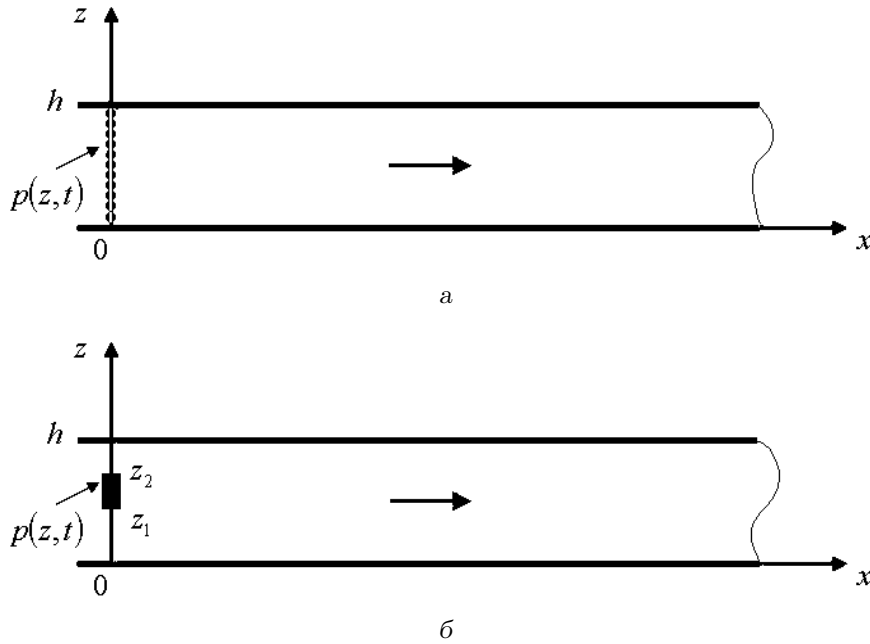


Рис. 4. Плоскопараллельный волновод:

а – в сечении $x=0$ задается распределение амплитуды давления, соответствующее первой моде волновода;
 б – в сечении $x=0$ на отрезке $z=[z_1, z_2]$ задается равномерное распределение амплитуды давления, вне его давление равно нулю

На рис. 3 представлены графики исходного сигнала, образованного конечной суммой гармоник ряда (9) ($K=500$). Для сигнала 1 (рис. 3, а) имеем десять периодов $T_0=2\pi/\omega_0$ несущей на продолжительности импульса τ_i , а сигналы 2 (рис. 3, б) и 3 (рис. 3, в) на том же отрезке времени содержат по девятнадцать периодов переменной величины.

Заметим, что предлагаемая модель сигнала не позволяет рассматривать задачу распространения импульса в волноводе на произвольном отрезке времени. Имея в виду наличие в нем дисперсии, можно сказать, что такое представление импульса пригодно до тех пор, пока запаздывание импульса не сравнится с периодом следования импульсов.

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА С ОДНОМОВОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРОЙ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Пусть в плоскопараллельном волноводе с акустически мягкими границами (рис. 4, а) в сечении $x=0$ задается распределение давления, отвечающее первой моде волновода с временной зависимостью (1), (2) или (3). Например, для сигнала 2 при $x=0$ давление должно изменяться согласно

закону

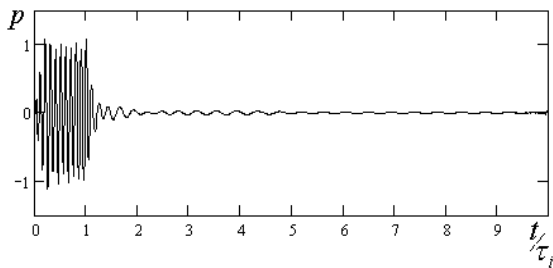
$$p(z, t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \times \\ \times \sin(\omega_0 t(1 + \alpha t)), & 0 \leq t \leq \tau_i, \\ 0, & \tau_i \leq t \leq T_i, \end{cases} \quad (11)$$

где h – ширина волновода. Волновод считаем заполненным идеальной жидкостью с плотностью ρ и скоростью звука c . Задача симметрична относительно сечения $x=0$, поэтому далее будем исследовать волновой процесс только для $x \geq 0$.

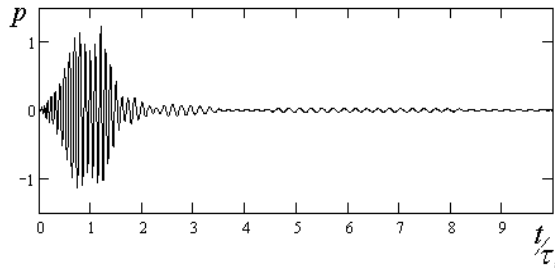
Представим исходный сигнал 1, 2 или 3 в сечении $x=0$ в виде конечного ряда Фурье:

$$p(z, t) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \times \sum_{k=1}^K \left[a_k \cos(\omega_k t) + b_k \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega_k t\right) \right]. \quad (12)$$

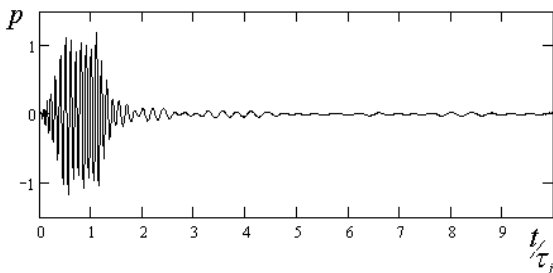
Каждая составляющая этой суммы образует в волноводе первую моду с частотой $\omega_k = k\omega_1 = k\Omega_i$. Тогда поле в волноводе будет иметь вид суперпозиции первых мод с соответ-



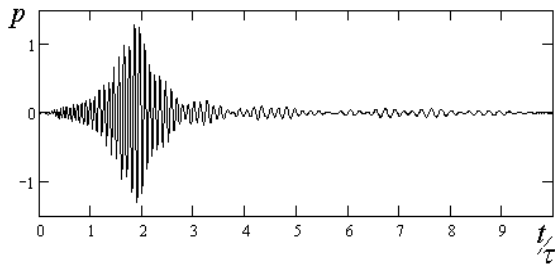
а



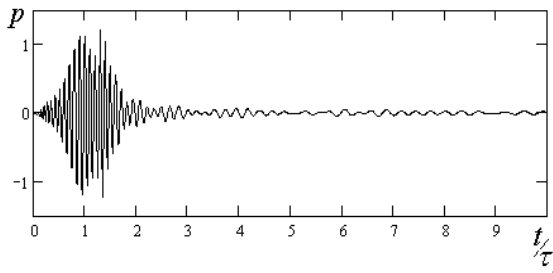
а



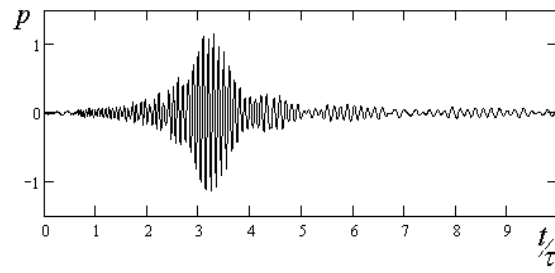
б



б



в



в

Рис. 5. Временные зависимости давления при распространении сигнала 1, $\omega_{kp1}/\Omega_i = 20$, $z/h = 0.5$:
а - $x' = 50$, б - $x' = 150$, в - $x' = 300$

Рис. 6. Временные зависимости давления при распространении сигнала 1, $\omega_{kp1}/\Omega_i = 40$, $z/h = 0.5$:
а - $x' = 50$, б - $x' = 150$, в - $x' = 300$

ствующими частотами ω_k , $k = 1, 2, \dots, K$:

$$p(x, z, t) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \times \sum_{k=1}^K (a_k + ib_k) \exp[-i(\omega_k t - \gamma_k x)], \quad (13)$$

где постоянная распространения k -ой составляющей

$$\gamma_k = \frac{\omega_k}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{kp1}^2}{\omega_k^2}}. \quad (14)$$

Здесь $\omega_{kp1} = \pi c/h$ – критическая частота первой моды. Используя безразмерные параметры, представим выражение $\omega_k t - \gamma_k x$ в формуле (13) следу-

ющим образом:

$$\omega_k t - \gamma_k x = \frac{2\pi}{q} k t' - \frac{2\pi}{Nq} k x' \sqrt{1 - \left(\frac{1}{k} \frac{\omega_{kp1}}{\Omega_i}\right)^2}, \quad (15)$$

где отношение $\omega_{kp1}/\Omega_i \equiv \omega_{kp1}/\omega_1 = Nq/(2h')$ – новый безразмерный параметр задачи.

Понятно, что из-за наличия дисперсии первой моды в ходе распространения сигнала в нем будут накапливаться искажения. Очевидно, что их характер существенно зависит от нормированной критической частоты первой моды $\omega_{kp1}/\Omega_i \equiv \omega_{kp1}/\omega_1$, ведь величина этого параметра определяет количество нормальных волн, которые будут неоднородными. Соответственно, нормальные волны, для которых $k > \omega_{kp1}/\Omega_i$, будут однородными, т.е. такими, которые создают дальнейшее поле акустического источника.

Сначала сосредоточим наше внимание на распространении сигнала 1. На рис. 5–7 показаны временные зависимости давления в точках наблюдения с координатами $x' = 50, 150, 300$, $z/h = 0.5$ при разных значениях параметра $\omega_{кp1}/\Omega_i = 20, 40, 60$. Вдоль оси абсцисс отложено нормированное время $t' = t/\tau_i$. При этом отброшено время \tilde{t} распространения импульса со скоростью c , т. е. $\tilde{t}' = x/c \cdot 1/\tau_i = x'/N$. Анализируя графики на рис. 5–7, можно отметить две характерные особенности в изменении структуры исходного сигнала 1, которые накапливаются при его распространении. Первая из них – задержка сигнала в сравнении со временем распространения \tilde{t} , вторая – растягивание во времени продолжительности сигнала в сравнении с начальной длительностью импульса τ_i .

Как видно, отмеченные эффекты существенно зависят от величины критической частоты первой моды $\omega_{кp1}/\Omega_i$. Для объяснения этой зависимости обратимся к графикам на рис. 8, которые определяют фазовую $v_{\phi}^{(1)}$ и групповую $v_{гр}^{(1)}$ скорости первой моды составляющих сигнала (13) при разных значениях параметра $\omega_{кp1}/\Omega_i$. Напомним, что в полосе частот $[\omega_{90}; \omega_{110}]$ сосредоточено 90 % всей энергии сигнала 1 (рис. 5, а). Как видим, чем меньше величина параметра $\omega_{кp1}/\Omega_i$, тем в меньшей степени изменяются значения скоростей $v_{\phi}^{(1)}$ и $v_{гр}^{(1)}$ в окрестности частоты несущей $\omega_0 = \omega_{100}$ и, следовательно, тем дольше будет сохраняться исходная форма сигнала при его распространении.

Попытаемся количественно оценить характерные изменения в структуре исходного сигнала. Сначала рассмотрим эффект задержки сигнала 1 при его распространении в сравнении со временем \tilde{t} . Здесь возможны различные подходы, поскольку возникает необходимость фиксировать момент прихода импульсного сигнала, претерпевающего изменение формы в процессе распространения. Проведем выкладки, опираясь на понятие групповой скорости. Поскольку сигнал 1 (см. рис. 2, а) можно считать узкополосным, то его групповую скорость определим как групповую скорость первой моды на частоте несущей ω_0 , т. е.

$$v_{гр} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{кp1}^2}{\omega_0^2}} = c \sqrt{1 - \left(\frac{1}{Nq} \frac{\omega_{кp1}}{\Omega_i} \right)^2}. \quad (16)$$

Зависимость групповой скорости от параметра $\omega_{кp1}/\Omega_i$, показанная на рис. 9, позволяет оценить уменьшение $v_{гр}$ при увеличении критической частоты. Временную задержку Δt прихода импульсного возмущения в точку наблюдения с координатой x' , в сравнении со временем распространения

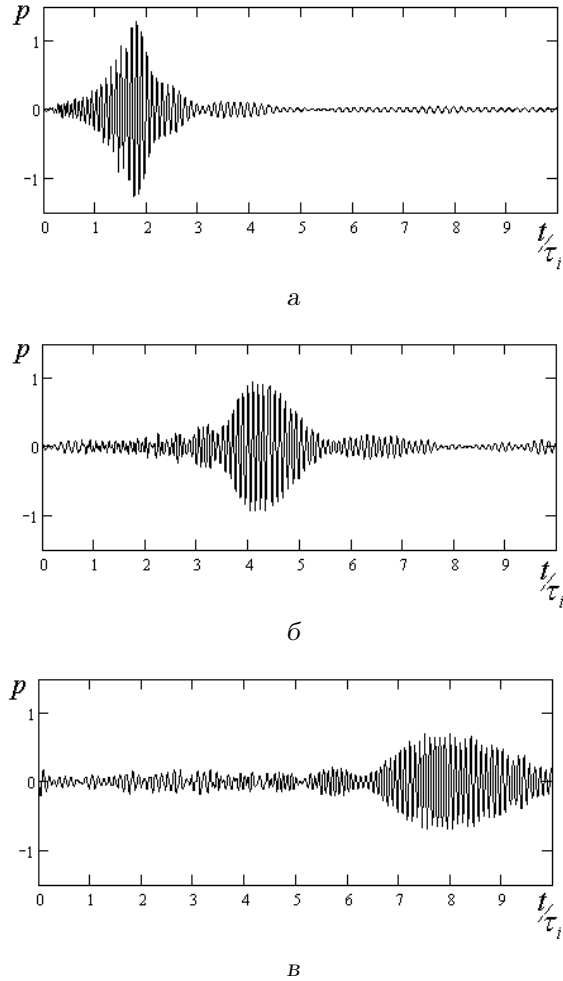


Рис. 7. Временные зависимости давления при распространении сигнала 1, $\omega_{кp1}/\Omega_i = 60$, $z/h = 0.5$:
а – $x' = 50$, б – $x' = 150$, в – $x' = 300$

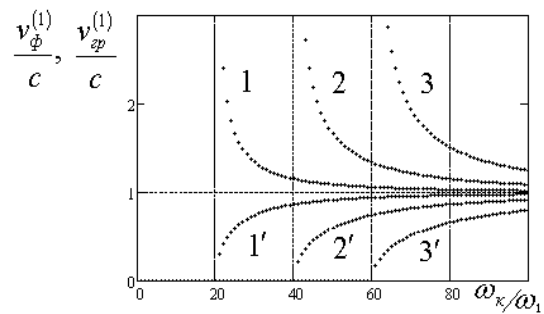


Рис. 8. Значения фазовой (кривые 1, 2, 3) и групповой (кривые 1', 2', 3') скоростей первой моды составляющих сигнала (13) при разной величине параметра $\omega_{кp1}/\Omega_i$:
1, 1' – $\omega_{кp1}/\Omega_i = 20$, 2, 2' – $\omega_{кp1}/\Omega_i = 40$,
3, 3' – $\omega_{кp1}/\Omega_i = 60$

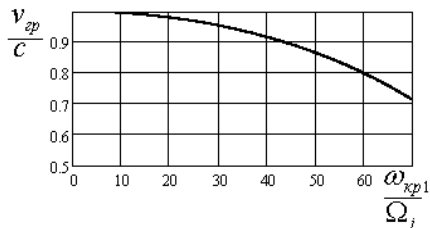


Рис. 9. Зависимость групповой скорости распространения сигнала 1 от параметра ω_{kp1}/Ω_i при величине $Nq=100$

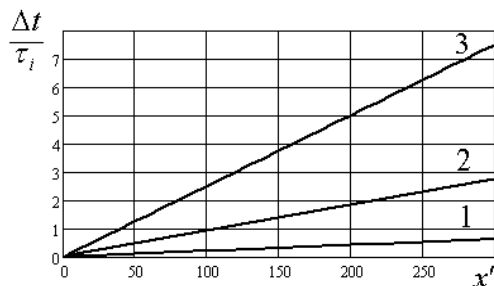


Рис. 10. Зависимость временной задержки $\Delta t'$ от расстояния пробега x' сигнала 1 для разных значений параметра ω_{kp1}/Ω_i ; $Nq=100$:

1 - $\omega_{kp1}/\Omega_i=20$, 2 - $\omega_{kp1}/\Omega_i=40$,
3 - $\omega_{kp1}/\Omega_i=60$

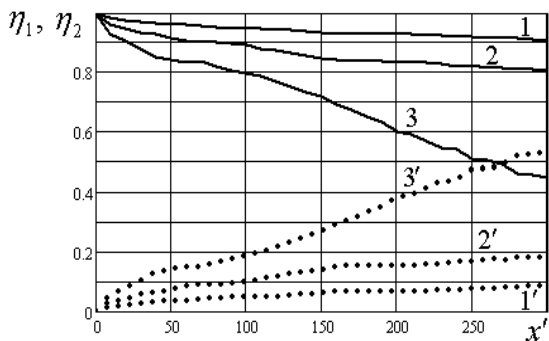


Рис. 11. Зависимость энергетических коэффициентов η_1 (кривые 1, 2, 3) и η_2 (кривые 1', 2', 3') от пути распространения x' сигнала 1 для разных значений параметра ω_{kp1}/Ω_i :

1, 1' - $\omega_{kp1}/\Omega_i=20$, 2, 2' - $\omega_{kp1}/\Omega_i=40$,
3, 3' - $\omega_{kp1}/\Omega_i=60$

\tilde{t} , определим следующим образом:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\tau_i} = \tilde{t}' - t'_{гр}. \quad (17)$$

Здесь

$$\tilde{t}' = \frac{x}{c} \frac{1}{\tau_i} = \frac{x'}{N},$$

$$t'_{гр} = \frac{x}{v_{гр}} \frac{1}{\tau_i} = \frac{x'}{N \sqrt{1 - \left(\frac{1}{Nq} \frac{\omega_{kp1}}{\Omega_i}\right)^2}}. \quad (18)$$

На рис. 10 показана зависимость временной задержки $\Delta t'$ от нормированного расстояния $x' = x/\lambda_0$ пробега сигнала 1 для разных значений параметра ω_{kp1}/Ω_i . Как видим, рост этой величины существенно увеличивает задержку сигнала $\Delta t'$ и растягивает его во времени (см. рис. 5–7).

Для описания эффекта “размывания” сигнала 1 при его распространении введем два энергетических коэффициента η_1 и η_2 (т. е. отношения некоторой энергии к энергии исходного сигнала):

- коэффициент η_1 определяет поток энергии, который проходит сквозь сечение волновода с координатой x' за время длительности импульса τ_i , т. е. на отрезке времени от $t_{гр}$ до $t_{гр} + \tau_i$, или для нормированного времени – $[t'_{гр}; t'_{гр} + 1]$;
- коэффициент η_2 определяет поток энергии, который проходит сквозь то же сечение в “паузе” исходного сигнала $[\tau_i; T_i]$, т. е. на отрезке времени от $t_{гр} + \tau_i$ до $t_{гр} + q\tau_i$, или для нормированного времени – $[t'_{гр} + 1; t'_{гр} + q]$.

Учитывая сказанное, расчетные формулы будут иметь вид:

$$\eta_1(x') = \frac{1}{E_i} \int_0^h \int_{t'_{гр}}^{t'_{гр}+1} \mathbf{Re} [p(x', z, t')] \times \mathbf{Re} [v_x(x', z, t')] dz dt' \quad (19)$$

$$\eta_2(x') = \frac{1}{E_i} \int_0^h \int_{t'_{гр}+1}^{t'_{гр}+q} \mathbf{Re} [p(x', z, t')] \times \mathbf{Re} [v_x(x', z, t')] dz dt'. \quad (20)$$

Здесь

$$E_i = \int_0^h \int_0^1 \mathbf{Re} [p(0, z, t')] \mathbf{Re} [v_x(0, z, t')] dz dt' -$$

поток энергии сигнала 1 через сечение $x'=0$. В формулах (19) и (20) колебательная скорость v_x ,

так же как и давление (13), определяется суммой составляющих нормальных волн:

$$v_x(x, z, t) = \sum_{k=1}^K v_{xk}(x, z, t).$$

Для каждой гармонической компоненты с частотой $\omega_k = k\Omega_i$, $k=1, 2, \dots, K$ колебательная скорость будет

$$v_{xk} = \frac{1}{i\omega_k \rho} \frac{\partial p_k}{\partial x},$$

где (см. формулу (13)) соответствующее давление k -ой моды определяется выражением

$$p_k = (a_i + ib_i) \sin \frac{\pi z}{h} \exp[-i(\omega_k t - \gamma_k x)].$$

На рис. 11 показана зависимость энергетических коэффициентов η_1 и η_2 от нормированного расстояния $x' = x/\lambda_0$ для разных значений параметра $\omega_{кр1}/\Omega_i$. Как видно, на расстоянии $x' \leq 300$ при $\omega_{кр1}/\Omega_i \leq 40$ (кривые 1, 1', 2, 2') соотношение между энергетическими коэффициентами η_1 и η_2 довольно стабильно. Однако при $\omega_{кр1}/\Omega_i = 60$ ход кривых 3, 3' существенно отличается от 1, 1' и 2, 2', что говорит о значительном перераспределении энергии между указанными отрезками времени. Например, уже при $x' \geq 270$ кривая 3' проходит выше кривой 3, т. е. наблюдается значительное растягивание сигнала 1 во времени (см. рис. 7, в). Напомним, что понятие групповой скорости имеет определенные границы применения: оно соответствует узкополосному импульсному сигналу на ограниченных расстояниях распространения.

Теперь рассмотрим распространение в волноводе частотно-модулированных сигналов 2 и 3, которые нельзя считать узкополосными (см. рис. 2, б). На рис. 12, а, в, д показаны временные зависимости давления при распространении сигнала 2, а на рис. 12, б, г – для сигнала 3 в точках наблюдения с координатами $x' = 50$ (рис. 12, а, б) и $x' = 150$ (рис. 12, в, г, д) при $z/h = 0.5$ и значении критической частоты первой моды $\omega_{кр1}/\Omega_i = 60$. Сравнивая эти рисунки, можно заключить следующее.

1. Наблюдается формирование резкого переднего фронта сигнала 2. При этом, как видно из рис. 12, а, в, пиковые значения давления превышают амплитуду давления исходного сигнала 2 в сечении $x=0$ более чем в два раза. На рис. 12, д показан фрагмент начального участка импульса, который отображен на рис. 12, в. Расчеты показывают, что пиковые значения давления, которые превышают амплитуду исходного сигнала более чем в два раза, наблюдаются при выбранных параметрах волновода на расстояниях $x' \approx 40 \dots 200$.

2. Для импульсного сигнала 2 пространственное “размывание” значительно меньше, чем для сигнала 3. При этом на относительно небольших расстояниях x' можно наблюдать сжатие сигнала 2 во времени и пространстве.

3. Скорость распространения переднего фронта сигнала, в котором сосредоточена основная часть энергии, для сигнала 3 больше, чем для сигнала 2.

Объяснение этим особенностям распространения сигналов 2 и 3 можно найти, анализируя частотные зависимости фазовой и групповой скоростей первой моды, представленные на рис. 8. Как видим, с ростом частоты первой моды ω (при $\omega > \omega_{кр1}$) групповая скорость увеличивается. Вследствие этого пространственно-временная эволюция сигнала 2 на некотором пути распространения приводит к его “сжатию” (рис. 12, а, в). Понятно, что с увеличением пути распространения сигнала 2 дисперсия, которая по началу привела к его пространственно-временному сжатию, в дальнейшем все же способствует его “размыванию”. Для сигнала 3 наблюдается пространственно-временное “размывание” сигнала (рис. 12, б, г) на протяжении всего пути его распространения. Очевидно, что при этом скорость переднего фронта сигнала 3 будет большей, чем для сигнала 2.

Дополнительной иллюстрацией к сказанному служит таблица, в которой для частотно-модулированных сигналов 2 и 3 представлены оценки задержки $\Delta t'$ и энергетических коэффициентов η_1, η_2 на разных расстояниях x' от источника возмущения ($x=0$). При этом нормированная критическая частота первой моды составляла $\omega_{кр1}/\Omega_i = 60$. Момент прихода импульса определялся при достижении давления, равного одной десятой от максимального давления в импульсном сигнале. Отметим, что сумма энергетических коэффициентов $\eta_1 + \eta_2$ не равна единице, поскольку при $\omega_{кр1}/\Omega_i = 60$ нормальные волны первой моды с частотами ω_k , $k=1, 2, \dots, 60$, являются неоднородными. Представленные в таблице приближенные оценки показывают как для исходно различающихся пространственно-временных структур сигналов 2 и 3 с увеличением пути распространения импульсов вследствие дисперсии формируются близкие оценки определенных выше параметров.

В заключение этого анализа необходимо отметить следующее. Эффект формирования резкого переднего фронта в процессе распространения частотно-модулированного сигнала, который сопровождается аномальным ростом его амплитуды, хорошо известен в лазерной оптике и называ-

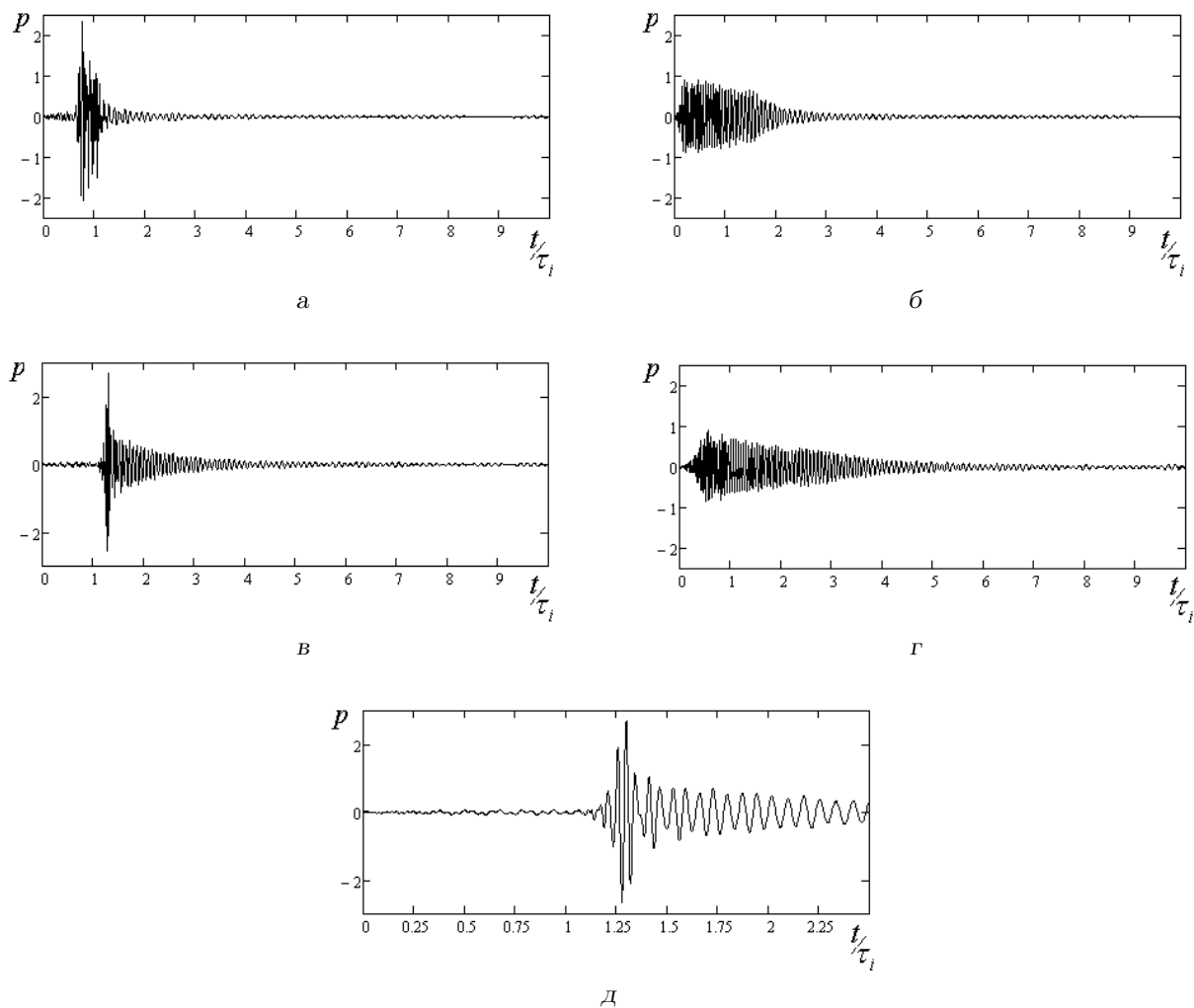


Рис. 12. Временные зависимости давления при распространении сигнала в точке с координатой x' ; $\omega_{кр1}/\Omega_i = 60$, $z/h = 0.5$:
 а – сигнал 2, $x' = 50$; б – сигнал 3, $x' = 50$; в – сигнал 2, $x' = 150$;
 г – сигнал 3, $x' = 150$; д – сигнал 2, $x' = 150$

Таблица. Оценки задержки и энергетических коэффициентов на разных расстояниях от источника возмущения

x'	50	100	150	200	250	300
$\Delta t'$, сигнал 2	0.70	1.00	1.22	1.40	1.52	1.65
$\Delta t'$, сигнал 3	0.14	0.20	0.30	0.50	0.70	0.80
η_1 , сигнал 2	0.949	0.926	0.866	0.766	0.692	0.631
η_1 , сигнал 3	0.692	0.563	0.488	0.456	0.422	0.384
η_2 , сигнал 2	0.042	0.065	0.125	0.225	0.299	0.360
η_2 , сигнал 3	0.299	0.427	0.502	0.535	0.568	0.607

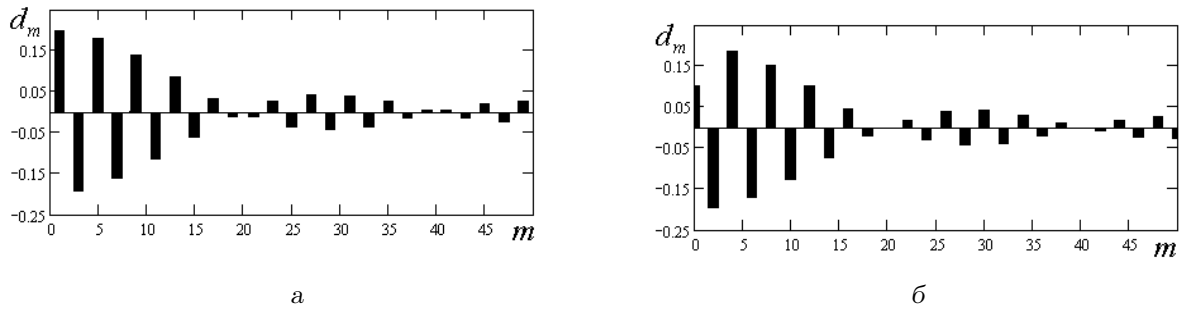


Рис. 13. Значение первых пятидесяти коэффициентов ряда Фурье (22):
 а – акустически мягкий волновод, б – акустически жесткий волновод

ется дисперсионным фокусированием [10]. Такой термин был введен, чтобы не путать его с геометрическим фокусированием, которое можно обеспечить, например, за счет использования параболического отражателя волн или линзы. Проведенные выкладки позволили убедиться, что дисперсионное фокусирование можно наблюдать и в акустике.

Интересно отметить, что явления подобного рода наблюдаются также и при распространении гравитационных волн на морской поверхности. На поверхности моря неоднократно фиксировалось внезапное возникновение аномально высоких одиночных волн, имеющих большую разрушительную силу. Такие волны часто называют “волнами-убийцами”. Известны случаи, когда их столкновение с морскими судами приводило к катастрофическим последствиям [11].

3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА С МНОГОМОДОВОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРОЙ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Теперь считаем, что в плоскопараллельном волноводе в сечении $x=0$ задано равномерное распределение амплитуды давления на некотором отрезке $[z_1, z_2]$ (см. рис. 4, б):

$$p(z) = \begin{cases} 1, & z = [z_1, z_2], \\ 0, & z \neq [z_1, z_2], \end{cases} \quad (21)$$

а временная зависимость определяется формулой (1), т. е. рассматриваем сигнал 1.

Представим исходное распределение давления (21) в виде ряда Фурье по собственным формам $g_m(z)$ мод плоскопараллельного волновода:

$$p(z) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m g_m(z), \quad (22)$$

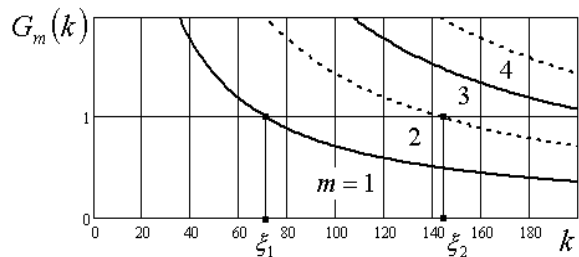


Рис. 14. График функции $G_m(k)$ при величине $h' = 0.7$ ($m = 1, 2, 3, 4$)

где для волновода с акустически мягкими границами $g_m(z) = \sin(m\pi z/h)$, а с акустически жесткими – $g_m(z) = \cos(m\pi z/h)$; коэффициенты d_m определяются по известным формулам с использованием свойства ортогональности собственных форм $g_m(z)$ на отрезке $z = [0; h]$.

Будем считать, что функция (21) симметрична относительно плоскости $z = h/2$ волновода, полагая $z_1 = 0.45h$ и $z_2 = 0.55h$. На рис. 13 отображены соответствующие значения первых пятидесяти коэффициентов d_m , $m = 0, 1, \dots, 50$. Как видим, для волновода с акустически мягкими границами (рис. 13, а) обнуляются парные коэффициенты d_m , а с жесткими (рис. 13, б) – непарные. Понятно, что это является следствием акустических свойств границ волновода и симметрии относительно плоскости $z = h/2$ функции (21).

Поле давления в волноводе имеет вид двойной суммы

$$p(x, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} d_m (a_k + ib_k) g_m(z) \times \exp[-i(\omega_k t - \gamma_{mk} x)], \quad (23)$$

где постоянная распространения

$$\gamma_{mk} = \sqrt{\frac{\omega_k^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2}.$$

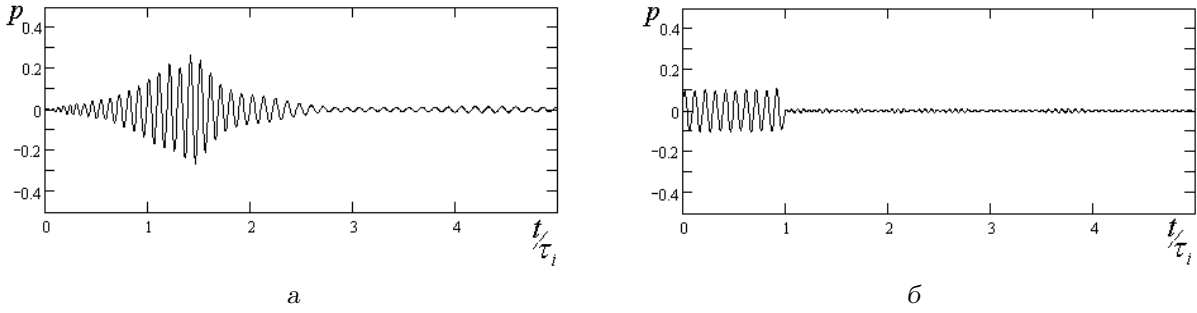


Рис. 15. Временная зависимость давления при распространении сигнала 1, $h' = 0.7$, $x' = 20$, $z/h = 0.5$:
 а – акустически мягкий волновод, б – акустически жесткий волновод

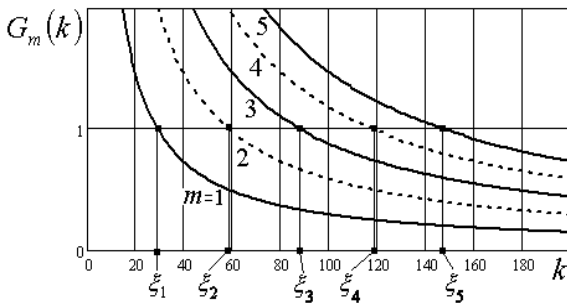


Рис. 16. График функции $G_m(k)$ при величине $h' = 1.7$ ($m = 1, 2, 3, 4, 5$)

Таким образом, каждая m -ая собственная форма $g_m(z)$ определяет создание m -ой моды с частотами ω_k , $k = 1, 2, \dots$ и соответствующими амплитудными множителями $d_m p_k = d_m \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$. Перепишем выражение $(\omega_k t - \gamma_{mk} x)$ в формуле (23), используя безразмерные параметры:

$$\omega_k t - \gamma_{mk} x = k \frac{2\pi}{q} t' - k \frac{2\pi}{Nq} x' \sqrt{1 - \left(\frac{m}{k} \frac{Nq}{2h'}\right)^2} \quad (24)$$

Согласно соотношению (24), условие того, что m -ая нормальная волна на частоте ω_k будет распространяющейся, примет вид

$$\frac{m}{k} \frac{Nq}{2h'} < 1. \quad (25)$$

Итак, будет нормальная волна однородной или неоднородной зависит (при фиксированной величине $Nq = 100$) от номера моды m , числа k , определяющего частоту волны $\omega_k = k\Omega_i$, и волновой ширины волновода $h' = h/\lambda_0$ ($\lambda_0 = cT_0$ – длина волны на частоте ω_0).

Попробуем разобраться в особенностях волнового распространения сигнала 1, последователь-

но увеличивая величину волновой ширины волновода h' . Для начала, примем $h' = 0.7$. Введем вспомогательную функцию

$$G_m(k) = \frac{m}{k} \frac{Nq}{2h'},$$

которая при заданных величинах m и h' ($Nq = 100$) определяет принадлежность m -ой моды к однородным или неоднородным. На рис. 14 показаны зависимости $G_m(k)$, $m = 1, 2, 3, 4$, от аргумента $k = \omega_k/\omega_1$. Как уже говорилось, непарные моды ($m = 1, 2, \dots$) определяют поле в волноводе с акустически мягкими границами, а парные ($m = 0, 2, 4, \dots$) – с акустически жесткими. Для нулевой моды ($m = 0$) дисперсия отсутствует, так как она является обычной однородной плоской волной на любой частоте. Точка пересечения кривой с горизонтальной прямой на уровне единицы определяет число $\xi_m = \omega_{крm}/\omega_1$ и, соответственно, критическую частоту m -ой моды $\omega_{крm}$. Таким образом, волны, для которых $k > \xi_m$ (а значит и $\omega_k > \omega_{крm}$), будут однородными.

Напомним, что амплитуда давления m -ой моды с частотой ω_k определяется произведением $d_m p_k$ (здесь коэффициенты d_m представлены на рис. 11) и, согласно рис. 2, а, 90 % энергии сигнала 1 сосредоточено в составляющих с частотами ω_k , $k = 90, 91, \dots, 100$.

Анализируя рис. 14, можно сделать вывод: в случае волновода с акустически мягкими границами энергонесущими будут первые моды с частотами ω_k , $k \geq 72$, (здесь $\xi_1 \approx 71.4$), а для волновода с акустически жесткими границами фактически вся энергия будет сосредоточена в нулевой моде ($\xi_0 = 0$) (вторая мода будет однородной только на частотах ω_k , $k \geq 143$, (здесь $\xi_2 \approx 142.9$)). Как следствие, звуковые поля в этих волноводах будут существенно отличаться. Действительно, если в акустически жестком волноводе дисперсионные явления практически отсутствуют (рис. 15, б), то

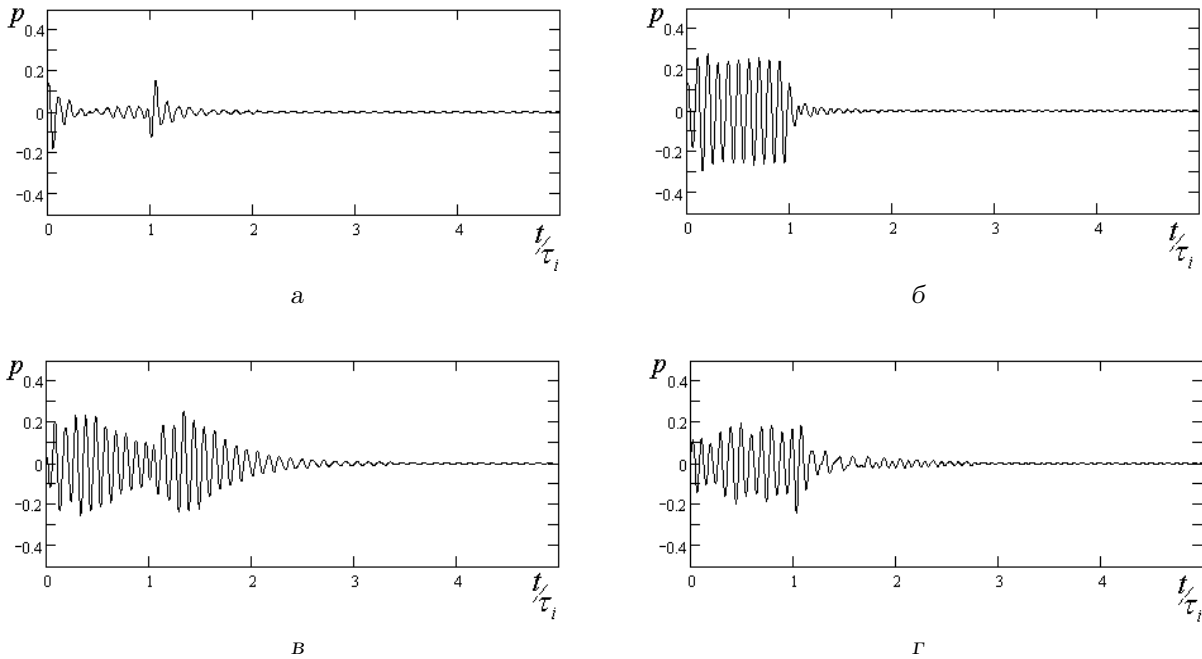


Рис. 17. Временные зависимости давления при распространении сигнала 1, $h' = 1.7$, $z/h = 0.5$:

а – акустически мягкий волновод, $x' = 1$, б – акустически жесткий волновод, $x' = 1$,
 в – акустически мягкий волновод, $x' = 7$, г – акустически жесткий волновод, $x' = 7$

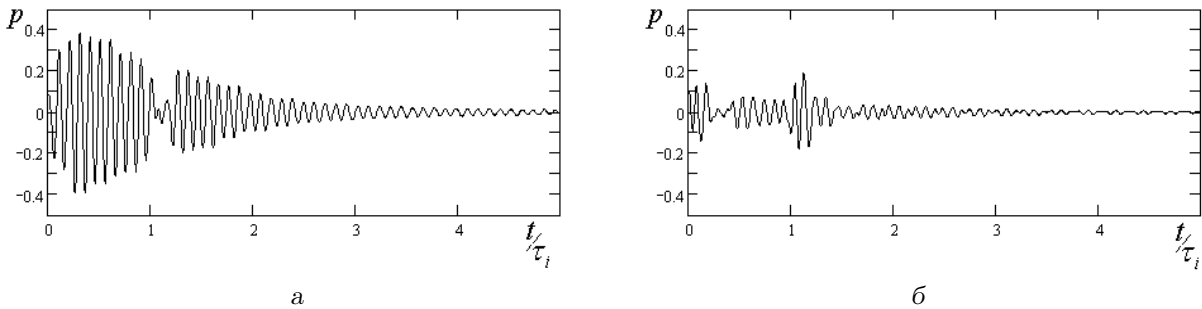


Рис. 18. Временные зависимости давления при распространении сигнала 1, $h' = 2.7$, $x' = 5.5$, $z/h = 0.5$:

а – акустически мягкий волновод, б – акустически жесткий волновод

для акустически мягкого волновода (рис. 15, а) они проявляются в полной мере.

Увеличим размер волновода до $h' = 1.7$ и обратимся к рис. 16, где представлены соответствующие графики функции $G_m(k)$. Поскольку $\xi_4, \xi_5 > 110$, теперь волновой процесс далеко от источника возмущения ($x = 0$) практически полностью формируют две моды: для акустически мягкого волновода – первая ($\xi_1 \approx 29.4$) и третья ($\xi_3 \approx 88.2$), а для акустически жесткого – нулевая ($\xi_0 = 0$) и вторая ($\xi_2 \approx 58.8$). Поэтому, наряду с эффектом “размывания” сигнала, возможны и более существенные изменения его формы. Иллюстрацией к сказанному служат графики на рис. 17.

Для акустически мягкого волновода на расстоянии всего $x' = 1$ (см. рис. 17, а) имеем деструктивную интерференцию волн разных частот первой и третьей моды, а на расстоянии $x' = 7$ (см. рис. 17, в) интерференция тех же волн образует своеобразный “двойной” импульс. В то же время, в акустически жестком волноводе на указанных расстояниях (рис. 17, б, г) удается удержать форму исходного сигнала 1 за счет доминирования нулевой моды.

Дальнейшее увеличение h' еще более усложняет анализ структурных изменений импульсного возмущения в процессе его распространения. На рис. 18 представлены временные зависимости дав-

ления при величине $h' = 2.7$ на расстоянии $x' = 5.5$. В этой ситуации существенный вклад вносят уже три моды волновода (для акустически мягкого волновода – первая, третья и пятая, а для акустически жесткого – нулевая, вторая и четвертая). Теперь явление деструктивной интерференции наблюдается и в акустически жестком волноводе (см. рис. 18, б). Таким образом, видно, что сохранить форму исходного сигнала в процессе его распространения в многомодовом волноводе практически невозможно.

ВЫВОДЫ

1. Для исследования особенностей распространения акустического импульса в волноводе предложена модель исходного сигнала в виде периодической последовательности временных отрезков синусоиды при отсутствии или наличии частотной модуляции. Представление сигнала в виде ряда Фурье позволило записать поле в волноводе как суперпозицию нормальных волн на дискретной совокупности частот. С одной стороны, такой подход предоставляет возможность довольно простой реализации численных расчетов на ЭВМ. С другой, это представление сигнала позволяет получить содержательные количественные оценки параметров, которые удобны для физического толкования результатов. Исследование проведено для наиболее простого случая – плоского регулярного волновода с идеальными границами.
2. Установлено, что при распространении в волноводе импульсного сигнала его пространственно-временная структура претерпевает изменения вследствие дисперсии и влияния волновода как фильтра. Представленные в статье расчеты временных зависимостей давления в волноводе дают наглядную картину характера и степени искажения формы исходного сигнала в процессе его распространения.
3. Показано, что при распространении в волноводе импульсного сигнала с постоянной частотой несущей (сигнал 1) и одномодовой пространственной структурой в нем накапливаются характерные искажения типа “размывания” импульса во времени и пространстве. Как следствие, растет задержка его энерго-несущей части по сравнению с распространением импульсного сигнала при отсутствии

дисперсии. При распространении частотно-модулированных сигналов 2 и 3 волноводные эффекты могут проявляться по-разному. Так, при выбранной критической частоте первой моды пространственно-временная эволюция сигнала 2 (с увеличивающейся частотой несущей на временном промежутке продолжительности импульса) на определенном пути его распространения приводит к дисперсионному фокусированию. Этот эффект обуславливает формирование резкого переднего фронта сигнала с аномально высоким пиковым значением давления и (на относительно небольших расстояниях x') приводит к его сжатию во времени и пространстве. При дальнейшем распространении сигнала 2 процессы “размывания” его пространственно-временной структуры становятся доминирующими. Наоборот, для сигнала 3 (с уменьшающейся частотой несущей на временном промежутке продолжительности импульса) имеем существенное растягивание исходного сигнала и снижение амплитуды давления на всем пути его распространения. Этот эффект можно рассматривать как дисперсионное расфокусирование.

4. В волноводе с многомодовой пространственной структурой исходного сигнала искажения имеют более сложный характер, временами, с резкими изменениями. Например, в некоторой точке наблюдения импульсный сигнал может практически угаснуть вследствие интерференции его гармонических составляющих. Вообще же, сохранить форму исходного сигнала при его распространении в многомодовом волноводе практически невозможно.
5. Наряду с временными зависимостями давления рассчитаны энергетические соотношения, дающие возможность сравнить накопление энергии в сигнале на интервале его исходной продолжительности и в паузе исходного сигнала. Показано, что для обоих характерных типов сигналов с частотной модуляцией наблюдается аналогичное размывание сигнала с точки зрения оттока энергии из его ядра.

1. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Акустика океана // Физика океана. Том 2. Гидродинамика океана.– М.: Наука, 1978.– С. 49–145.
2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.– М.: Наука, 1973.– 343 с.
3. Исакович М. А. Общая акустика.– М.: Наука, 1973.– 495 с.

4. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
5. Завадский В. Ю. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах.– М.: Наука, 1972.– 558 с.
6. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов.– М.: Мир, 1974.– 327 с.
7. Шестопапов В. П., Кириленко А. А., Рудь Л. А. Резонансное рассеяние волн. Том 2. Волноводные неоднородности.– К.: Наук. думка, 1986.– 214 с.
8. Сиренко Ю. К. Моделирование и анализ переходных процессов в открытых периодических, волноводных и компактных резонаторах.– Харьков: ЭДЭНА, 2003.– 363 с.
9. Боббер Р. Дж. Гидроакустические измерения.– М.: Мир, 1974.– 362 с.
10. Casperson L. V., Yariv A. Gain and dispersion focusing in a high gain laser // Appl. Opt.– 1972.– **11**, N 2.– P. 462–466.
11. Пелиновский Е. Н., Слюняев А. В. “Фрики” – морские волны-убийцы // Природа.– 2007.– N 3.– С. 14–23.