ISSN 1028-7507 Акустичний вісник. 2008. Том 11, N 4. С. 3 – 8

УДК 534.3+611.539

# СПРОЩЕНА ФОРМА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО ГЕНЕРАЦІЮ ЗВУКУ ОБМЕЖЕНОЮ ОБЛАСТЮ ЗБУРЕНОЇ ТЕЧІЇ В ЖОРСТКОСТІННОМУ КАНАЛІ

**А. О. БОРИСЮК**

*Інститут гідромеханіки НАН України, Київ*

*Отримано 26.09.2008*

Наведено розв'язок задачі про генерацію звуку обмеженою областю збуреної течії у нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу у формі, яка відрізняється від одержаної у праці [1]. Ця форма простіша від попередньої, а отже більш прийнятна для проведення чисельних розрахунків.

Приведено решение задачи о генерации звука ограниченной областью возмущенного течения в бесконечном прямом жесткостенном канале кругового поперечного сечения в форме, отличной от полученной в работе [1]. Эта форма более проста по сравнению с предыдущей, а потому более приемлема для проведения численных расчетов.

We present the solution of the problem on sound generation by a limited region of a disturbed flow in an infinite straight rigid-walled channel with circular cross-section in the form different from that offered in the study [1]. This form is more simplified compared with the previous one, hence it is more suitable for numerical calculations.

## ВСТУП

Дослідження течій у каналах – актуальна проблема автомобіле- та літакобудування, архітектури, медицини, нафтогазової промисловості, комунального господарства, тощо. При цьому значний інтерес становлять збурення течій і поява акустичних ефектів у місцях локальних звужень каналів (таких як налипання на стінках, зварювальні шви, стенози). Справа у тому, що у цьому випадку акустичне поле містить інформацію про параметри циліндричної конструкції й середовища у зоні виникнення шумів. Відтак, існує можливість розроблення неінвазивних методів знаходження таких місць за результатами аналізу згенерованого звуку [1 – 8].

Розроблення такого роду діагностичних методів може проводитися за наявності теорій, які, адекватно описуючи реологію, динаміку й акустику течій в околі локального звуження, встановлювали б кількісний зв'язок між характеристиками каналу й потоку та супутнього звукового поля. Одну з таких теорій було розроблено у праці [1]. Тут область збуреної течії моделювалася розподіленими в ній квадрупольними і дипольними джерелами звуку, характеристики яких вважались відомими. Були розглянуті випадки рівномірного й нерівномірного розподілу джерел. Для них були одержані відповідні кількісні співвідношення між характеристиками згенерованого у каналі акустичного поля й параметрами каналу і течії в ньому.

У статті [2] були розглянуті часткові випадки згаданої теорії. Досліджувались ситуації, коли в акустичному полі домінує внесок об'ємних квадруполів або поверхневих диполів. При цьому інтерес становили такі потоки й форми локальних звужень каналів, при яких регіон збуреної за звуженням течії займають рівномірно розподілені великомасштабні або дрібномасштабні вихорові утворення.

У цьому дослідженні буде наведено іншу форму розв'язку проблеми, розглянутої в публікації [1]. Вона значно простіша від одержаної раніше, а отже більш прийнятна для проведення відповідних чисельних розрахунків.

Ця стаття складається зі вступу, двох розділів, висновку, списку літератури й додатку. У першому розділі формулюється задача, а також наводиться і коротко аналізується одержаний в [1] її розв'язок. У другому розділі одержується інша форма розв'язку і проводиться її порівняльний аналіз з попередньою формою. Далі формулюється висновок даної роботи й наводяться списки цитованої літератури та прийнятих позначень.

## 1. ПОСТАНОВКА ТА РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

Розглядається нерухомий нескінченний прямий жорсткостінний канал кругового поперечного перерізу з радіусом $a$ (див. рисунок). У ньому з осередненою осьовою швидкістю $U$ тече рідина, яка має масову густину $\rho$ й кінематичну в'язкість $\nu$. Течія характеризується малим числом Маха. У скінченному регіоні $V_0$ течія збурена і тут генерується акустичне поле. Необхідно знайти це поле й установити кількісний зв'язок між його характе-

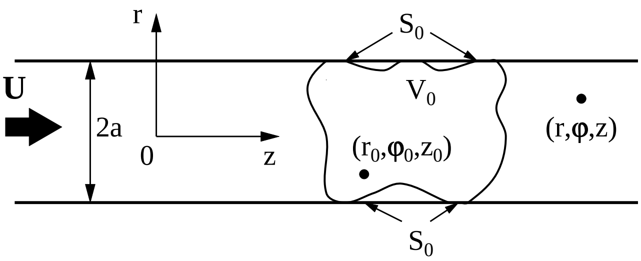


Рисунок. Геометрія задачі

ристиками й параметрами каналу і потоку.

Шукане акустичне поле описується рівнянням Лайтхіла, в якому права частина містить як об'ємні квадрупольні $\partial^2 T_{ij}/\partial y_i \partial y_j$, так і зумовлені наявністю стінки каналу поверхневі дипольні джерела $\partial F_i/\partial y_i$ [1, 2, 9, 10]:

$$\frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho_a = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_i}\,, \qquad (1)$$
$$0 < r < a, \qquad 0 < \phi < 2\pi, \qquad |z| < \infty.$$

У якості граничних умов виступають рівність нулеві радіальної компоненти швидкості на стінці:

$$\left.\frac{\partial p_a}{\partial r}\right|_{r=a} = 0 \qquad (2)$$

й умова випромінювання в нескінченність.

У співвідношеннях (1) і (2) введено такі позначення: $\rho_a$ і $p_a$ – акустичні флуктуації густини й тиску, які зв'язані між собою співвідношенням [1, 2, 9, 10]:

$$p_a = c_0^2 \rho_a; \qquad (3)$$

$T_{ij} \approx \rho u_i u_j$ і $F_i = n_j(\tau_{ij} + p\delta_{ij})$ – напруження Лайтхіла та $i$-та компонента прикладених до стінки каналу сил ($T_{ij}$ та $F_i$ зникають відповідно за межами об'єму збуреної течії $V_0$ й поверхні $S_0$, котра його обмежує); $\tau_{ij}$ – в'язкі напруження; $\epsilon_{ij}$ – швидкості деформації:

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3}\mu\epsilon_{kk}\delta_{ij} - 2\mu\epsilon_{ij};$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial u_i/\partial y_j + \partial u_j/\partial y_i\right);$$

$n_j$ – $j$-та компонента зовнішньої нормалі до стінки каналу; $u_i$ – $i$-та компонента швидкості рідини; $p$ – тиск; $\mu = \rho\nu$ – динамічна в'язкість рідини; $\delta_{ij}$ – символ Кронекера; $r$, $\phi$, $z$ – циліндричні координати; $t$ – час. Окрім цього, тут і надалі передбачається підсумовування по індексах, що повторюються.

Задача (1), (2) розв'язується методом функцій Гріна. Її розв'язок у квадратурах для густини $\rho_a$ має такий вигляд [1]:

$$\rho_a(\vec{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iiint\limits_{V_0} \frac{\partial^2 T_{ij}(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} \times$$
$$\times G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0)\, dV_0(\vec{r}_0) +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iint\limits_{S_0} \frac{\partial F_i(\vec{r}_{0a}, t_0)}{\partial y_i} \times \qquad (4)$$
$$\times G(\vec{r}, t; \vec{r}_{0a}, t_0)\, dS_0(\vec{r}_{0a}),$$

$$dV_0(\vec{r}_0) = r_0 dr_0 d\phi_0 dz_0,$$

$$dS_0(\vec{r}_{0a}) = a\, d\phi_0 dz_0.$$

Тут $G$ – функція Гріна хвильового рівняння для вибраного каналу; $\vec{r} = (r, \phi, z)$, $\vec{r}_0 = (r_0, \phi_0, z_0) \in V_0$ і $\vec{r}_{0a} = \vec{r}_0|_{r0=a} = (a, \phi_0, z_0) \in S_0$ – радіус-вектори відповідно точки поля для квадрупольних і дипольних джерел звуку; $t_0$ – пов'язаний з джерелом час. Акустичний же тиск $p_a$ знаходиться за формулами (3) і (4).

Підстановка функції $G$ [1],

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) =$$
$$= -\frac{i}{4\pi c_0^2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \phi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \times \qquad (5)$$
$$\times \Psi_{nm}^{(j)}(r, \phi) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_{nm}|z-z_0|}}{k_{nm}} e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega,$$

у вираз для тиску $p_a$, а одержаного співвідношення в інтеграл

$$P(\omega)\delta(\omega - \omega') = \int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} \langle \tilde{p}_a^*(r, \phi, z, \omega) \times \qquad (6)$$
$$\times \tilde{v}_{az}(r, \phi, z, \omega') \rangle r dr d\phi$$

дає загальний вираз для акустичної енергії $P$, згенерованої на частоті $\omega$ нерівномірно розподіленими в об'ємі $V_0$ квадрупольними і на поверхні $S_0$ дипольними джерелами [1]:

$$
\begin{aligned}
P(\omega) &= \sum_{q=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} P_{nm}^{(q)}(\omega) = \\
&= \sum_{q=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\|\Psi_{nm}^{(q)}\|^2 k_{nm}\rho_0\omega}\times \\
&\times\Bigg[\iiint\limits_{V_0} dV_0(\vec r_0)\times \\
&\times\iiint\limits_{V_0} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec r_0,\vec r_0{}',\omega)}{\partial y_i\partial y_j\partial y_k'\partial y_l'}\times \\
&\times\Psi_{nm}^{(q)}(r_0,\phi_0)\Psi_{nm}^{(q)}(r_0',\phi_0')\times \\
&\times e^{-\mathrm{sign}(z-z_0)ik_{nm}(z_0'-z_0)}dV_0(\vec r_0{}')+ \\
&+\iint\limits_{S_0} dS_0(\vec r_{0a})\iint\limits_{S_0} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\vec r_{0a},\vec r_{0a}{}',\omega)}{\partial y_i\partial y_k'}\times \\
&\times\Psi_{nm}^{(q)}(a,\phi_0)\Psi_{nm}^{(q)}(a,\phi_0')\times \\
&\times e^{-\mathrm{sign}(z-z_0)ik_{nm}(z_0'-z_0)}dS_0(\vec r_{0a}{}')+ \\
&+2\mathbf{Re}\Bigg(\iiint\limits_{V_0} dV_0(\vec r_0)\times \\
&\times\iint\limits_{S_0} \frac{\partial^3 S_{ijk}^{TF}(\vec r_0,\vec r_{0a}{}',\omega)}{\partial y_i\partial y_j\partial y_k'}\times \\
&\times\Psi_{nm}^{(q)}(r_0,\phi_0)\Psi_{nm}^{(q)}(a,\phi_0')\times \\
&\times e^{-\mathrm{sign}(z-z_0)ik_{nm}(z_0'-z_0)}dS_0(\vec r_{0a}{}')\Bigg)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Тут $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака; дужки $\langle\cdot\rangle$ означають операцію осереднення за множиною реалізацій; $*$ вказує на комплексне спряження; $\tilde p_a$ і $\tilde v_{az}$ – образи Фур'є акустичного тиску та осьової компоненти акустичної швидкості; $\vec r_0$, $\vec r_0{}'$ і $\vec r_{0a}$, $\vec r_{0a}{}'$ – радіус-вектори відповідно квадрупольних і дипольних джерел звуку; акустичні моди каналу $\Psi_{nm}^{(q)}$ задаються як

$$\Psi_{nm}^{(1)} = J_n(\alpha_{nm}r)\cos(n\phi),$$

$$\Psi_{nm}^{(2)} = J_n(\alpha_{nm}r)\sin(n\phi);$$

$\|\Psi_{nm}^{(q)}\|^2$ – квадрати їхніх норм:

$$\|\Psi_{nm}^{(1)}\|^2 = \begin{cases} \pi a^2 J_0^2(\alpha_{0m}a), & n=0, \\ \dfrac{\pi a^2}{2}J_n^2(\alpha_{nm}a)\left[1-\left(\dfrac{n}{\alpha_{nm}a}\right)^2\right]; & n\geq 1, \end{cases}$$

$$\|\Psi_{nm}^{(2)}\|^2 = \begin{cases} 0, & n=0, \\ \|\Psi_{nm}^{(1)}\|^2, & n\geq 1; \end{cases}$$

$J_n$ – циліндричні функції Бесселя першого роду порядку $n$; $\alpha_{nm}=\zeta_{nm}/a$ – радіальні хвильові числа; $\zeta_{nm}$ – корені рівняння $J_n'(\zeta_{nm})=0$, $m=1,2,\ldots$; $k_{nm}=\sqrt{k_0^2-\alpha_{nm}^2}$ – осьові хвильові числа; $k_0=\omega/c_0$ – акустичне хвильове число; а $c_0$ – швидкість звуку в незбуреній рідині. Крім цього, у співвідношенні (7) функції $S_{ijkl}^T$ і $S_{ik}^F$ – взаємні спектри образів Фур'є відповідно напружень Лайтхіла $T_{ij}$ і сил $F_k$, а $S_{ijk}^{TF}$ – взаємний спектр образів Фур'є величин $T_{ij}$ і $F_k$:

$$S_{ijkl}^T(\vec r_0,\vec r_0{}',\omega)\delta(\omega-\omega') = \langle\tilde T_{ij}^*(\vec r_0,\omega)\tilde T_{kl}(\vec r_0{}',\omega')\rangle,$$

$$S_{ik}^F(\vec r_{0a},\vec r_{0a}{}',\omega)\delta(\omega-\omega') = \langle\tilde F_i^*(\vec r_{0a},\omega)\tilde F_k(\vec r_{0a}{}',\omega')\rangle,$$

$$S_{ijk}^{TF}(\vec r_0,\vec r_{0a}{}',\omega)\delta(\omega-\omega') = \langle\tilde T_{ij}^*(\vec r_0,\omega)\tilde F_k(\vec r_{0a}{}',\omega')\rangle;$$

$\mathbf{Re}\,(\cdot)$ означає дійсну частину вказаної в дужках комплексної величини. Функція знаку $\mathrm{sign}(z-z_0)$ позитивна, якщо оцінки енергії проводяться вниз за течією від розташованих у поперечному перерізі каналу $z=z_0$ джерел, і негативною, – якщо вгору за течією від них. Положення частоти $\omega$ відносно критичних частот каналу $\omega_{nm}=c_0\alpha_{nm}$ визначає (через хвильові числа $k_{nm}$ в експоненті $\exp(-\mathrm{sign}(z-z_0)ik_{nm}(z_0'-z_0))$ випадки однорідних ($\omega\geq\omega_{nm}$) та неоднорідних ($0<\omega<\omega_{nm}$) хвиль у виразі (7).

У разі рівномірного розподілу квадрупольних і дипольних джерел звуку формула (7) спрощується за рахунок спрощення виразів для спектрів $S_{ijkl}^T$, $S_{ik}^F$ та $S_{ijk}^{TF}$, які стають функціями лише відстані між джерелами (відповідно $\vec\xi=\vec r_0{}'-\vec r_0$, $\vec\xi_{aa}=\vec r_{0a}{}'-\vec r_{0a}$ та $\vec\xi_a=\vec r_{0a}{}'-\vec r_0$) і частоти [1,9]:

$$
\begin{aligned}
S_{ijkl}^T(\vec r_0,\vec r_0{}',\omega) &= S_{ijkl}^T(\vec\xi,\omega), \\
S_{ik}^F(\vec r_{0a},\vec r_{0a}{}',\omega) &= S_{ik}^F(\vec\xi_{aa},\omega), \\
S_{ijk}^{TF}(\vec r_0,\vec r_{0a}{}',\omega) &= S_{ijk}^{TF}(\vec\xi_a,\omega).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Аналіз співвідношення (7) показує, що енергія $P$ дорівнює сумі енергій $P_{nm}^{(q)}$ акустичних мод каналу $\Psi_{nm}^{(q)}$. Енергія ж окремої моди $P_{nm}^{(q)}$ визначається трьома доданками. Перший з них являє собою звукову енергію, згенеровану об'ємними квадруполями $\partial^2 T_{ij}/\partial y_i \partial y_j$, другий – енергію, випромінену поверхневими диполями $\partial F_i/\partial y_i$, а третій – енергію, зумовлену взаємодією квадруполів і диполів.

## 2. ІНША ФОРМА РОЗВ'ЯЗКУ

Повернемося до інтегральної форми розв'язку задачі для акустичних флуктуацій густини (4). Згідно з [10], використання тотожності

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(G\frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j}\right) - \frac{\partial}{\partial y_j}\left(T_{ij}\frac{\partial G}{\partial y_i}\right) = = G\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} - T_{ij}\frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j}$$

й подальше застосування теореми Гауса дозволяє замінити у формулі (4) диференціювання напружень Лайтхіла $T_{ij}$ та сил $F_i$ відповідним диференціюванням функції Гріна $G$:

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}G \quad \longrightarrow \quad T_{ij}\frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j}\,,$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_i}G \quad \longrightarrow \quad F_i\frac{\partial G}{\partial y_i}\,.$$

Це приводить до іншої форми представлення густини $\rho_a$ (а отже і акустичного тиску $p_a$):

$$\begin{aligned}\rho_a(\vec{r},t) = &\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iiint\limits_{V_0} T_{ij}(\vec{r}_0,t_0)\times \\ &\times\frac{\partial^2 G(\vec{r},t;\vec{r}_0,t_0)}{\partial y_i \partial y_j}\times dV_0(\vec{r}_0)+ \\ &+\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iint\limits_{S_0} F_i(\vec{r}_{0a},t_0)\times \\ &\times\frac{\partial G(\vec{r},t;\vec{r}_{0a},t_0)}{\partial y_i} dS_0(\vec{r}_{0a}).\end{aligned} \qquad (9)$$

У циліндричній системі координат підінтегральні функції у формулі (9) виглядають наступним чином [1]:

$$\begin{aligned}T_{ij}\frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j} = &\rho u_r^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r_0^2} + \rho u_z^2 \frac{\partial^2 G}{\partial z_0^2} + 2\rho u_r u_z \frac{\partial^2 G}{\partial r_0 \partial z_0}+ \\ &+\rho u_\phi^2\left(\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi_0^2} + \frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial r_0}\right)G+ \\ &+\rho u_r u_\phi\left(\frac{\partial}{\partial r_0}\left(\frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial \phi_0}\right) + \frac{2}{r_0}\frac{\partial}{\partial \phi_0}\left(\frac{\partial}{\partial r_0}\right) - \right. \\ &\left. -\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial}{\partial \phi_0}\right)G+ \\ &+\rho u_\phi u_z\left(\frac{1}{r_0}\frac{\partial^2}{\partial \phi_0 \partial z_0} + \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial \phi_0}\right)\right)G,\end{aligned}$$

$$F_i\frac{\partial G}{\partial y_i} = F_r\frac{1}{r_0}\frac{\partial(r_0 G)}{\partial r_0} + F_\phi\frac{1}{r_0}\frac{\partial G}{\partial \phi_0} + F_z\frac{\partial G}{\partial z_0}.$$

Тоді підстановка виразу (5) для функції Гріна $G$ у формулу (9), формули (9) – у співвідношення (3), а одержаного співвідношення – в інтеграл (6) дозволяє знайти інший, ніж рівняння (7), вираз для акустичної енергії $P$. У разі нерівномірного розподілу квадрупольних і дипольних джерел звуку він має такий вигляд:

$$\begin{aligned}P(\omega) = &\sum_{q=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} P_{nm}^{(q)}(\omega) = \\ = &\sum_{q=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4}\|\Psi_{nm}^{(q)}\|^2 k_{nm}\rho_0\omega\times \\ &\times\left[\iiint\limits_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \iiint\limits_{V_0} S_{ijkl}^T(\vec{r}_0,\vec{r}_0{}',\omega)\times\right. \\ &\times\frac{\partial^2 \Psi_{nm}^{(q)}(r_0,\phi_0)e^{\mathrm{sign}(z-z_0)ik_{nm}z_0}}{\partial y_i \partial y_j}\times \\ &\times\frac{\partial^2 \Psi_{nm}^{(q)}(r_0',\phi_0')e^{-\mathrm{sign}(z-z_0)ik_{nm}z_0'}}{\partial y_k' \partial y_l'} dV_0(\vec{r}_0{}')+ \\ &+\iint\limits_{S_0} dS_0(\vec{r}_{0a}) \iint\limits_{S_0} S_{ik}^F(\vec{r}_{0a},\vec{r}_{0a}{}',\omega)\times \\ &\times\frac{\partial \Psi_{nm}^{(q)}(a,\phi_0)e^{\mathrm{sign}(z-z_0)ik_{nm}z_0}}{\partial y_i}\times \\ &\times\frac{\partial \Psi_{nm}^{(q)}(a,\phi_0')e^{-\mathrm{sign}(z-z_0)ik_{nm}z_0'}}{\partial y_k'} dS_0(\vec{r}_{0a}{}')+ \\ &+2\mathbf{Re}\left(\iiint\limits_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \iint\limits_{S_0} S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0,\vec{r}_{0a}{}',\omega)\times\right. \\ &\times\frac{\partial^2 \Psi_{nm}^{(q)}(r_0,\phi_0)e^{\mathrm{sign}(z-z_0)ik_{nm}z_0}}{\partial y_i \partial y_j}\times \\ &\left.\left.\times\frac{\partial \Psi_{nm}^{(q)}(a,\phi_0')e^{-\mathrm{sign}(z-z_0)ik_{nm}z_0'}}{\partial y_k'} dS_0(\vec{r}_{0a}{}')\right)\right].\end{aligned} \qquad (10)$$

Якщо ж джерела звуку розподілені рівномірно в областях їх існування, співвідношення (10) спрощується внаслідок спрощення виразів для функцій $S_{ijkl}^T$, $S_{ik}^F$ та $S_{ijk}^{TF}$.

Аналіз формули (10) показує, що, як і у виразі (7), звукова енергія $P$ в каналі – це сума енергій $P_{nm}^{(q)}$ його акустичних мод $\Psi_{nm}^{(q)}$, а енергія окремої моди $P_{nm}^{(q)}$ визначається тими ж трьома доданками, зумовленими внесками квадруполів, диполів та їх взаємодією. Проте у формулі (10) ці доданки мають інший вигляд: у них просторове диференціювання другого, третього й четвертого порядків спектрів $S^F_{ik}$, $S^{TF}_{ijk}$ та $S^T_{ijkl}$ (див. формулу (7)) замінено відповідним диференціюванням першого й другого порядків добутків мод $\Psi^{(q)}_{nm}$ і експонент:

$$\frac{\partial^4 S^T_{ijkl}(\ldots)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k \partial y'_l}\Psi^{(q)}_{nm}(\ldots)\Psi^{(q)}_{nm}(\ldots)e^{\cdots} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow S^T_{ijkl}(\ldots)\frac{\partial^2 \Psi^{(q)}_{nm}(\ldots)e^{\cdots}}{\partial y_i \partial y_j}\,\frac{\partial^2 \Psi^{(q)}_{nm}(\ldots)e^{\cdots}}{\partial y'_k \partial y'_l}\,;$$
$$\frac{\partial^2 S^F_{ik}(\ldots)}{\partial y_i \partial y'_k}\Psi^{(q)}_{nm}(\ldots)\Psi^{(q)}_{nm}(\ldots)e^{\cdots} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow S^F_{ik}(\ldots)\frac{\partial \Psi^{(q)}_{nm}(\ldots)e^{\cdots}}{\partial y_i}\,\frac{\partial \Psi^{(q)}_{nm}(\ldots)e^{\cdots}}{\partial y'_k}\,; \tag{11}$$
$$\frac{\partial^3 S^{TF}_{ijk}(\ldots)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k}\Psi^{(q)}_{nm}(\ldots)\Psi^{(q)}_{nm}(\ldots)e^{\cdots} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow S^{TF}_{ijk}(\ldots)\frac{\partial^2 \Psi^{(q)}_{nm}(\ldots)e^{\cdots}}{\partial y_i \partial y_j}\,\frac{\partial \Psi^{(q)}_{nm}(\ldots)e^{\cdots}}{\partial y'_k}\,.$$

Моди $\Psi^{(q)}_{nm}$ й експоненти, а отже й просторові похідні від них – відомі функції. Тому знаходження значень функцій і похідних потребує приблизно однакових затрат машинного часу. Спектри ж $S^F_{ik}$, $S^{TF}_{ijk}$, $S^T_{ijkl}$ не мають аналітичного представлення. Вони мають визначатися з розв'язку відповідної задачі динаміки рідини або з відповідного екперименту, що пов'язано зі значними труднощами і витратами часу. Ще більш трудомістким буде визначення відповідних похідних. Це означає, що обчислення виразів, які знаходяться у правих частинах співвідношень (11), простіше, ніж обчислення виразів зліва. Відповідно, з огляду на чисельні розрахунки, знаходження трьох спектральних доданків за формулою (10) буде простішим, аніж за формулою (7). Ця обставина додатково вказує на те, що вираз (10) для згенерованої на частоті $\omega$ акустичної енергії загалом більш прийнятний для проведення відповідних обчислень, ніж вираз (7).

## ВИСНОВОК

Одержано іншу форму розв'язку розглянутої у праці [1] проблеми генерації звуку обмеженою областю збуреної течії в нерухомому нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Ця форма простіша від одержаної в [1], а отже більш прийнятна для проведення відповідних чисельних розрахунків.


## ПОДЯКА

Автор висловлює подяку академіку НАН України В. Т. Грінченку за корисні поради, які дозволили покращити якість даної статті.



1. *Борисюк А. О.* Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Частина 1. Загальна теорія // Акуст. вісн.– 2003.– **6**, N 3.– С. 3–9.
2. *Борисюк А. О.* Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Частина 2. Частинні випадки // Акуст. вісн.– 2004.– **7**, N 4.– С. 10–20.
3. *Lees R. S., Dewey C. F., jr.* Phonoangiography: a new noninvasive diagnostic method for studying arterial disease // Proc. Nat. Acad. Sci.– 1970.– **67**.– P. 935–942.
4. *Young D. F.* Fluid mechanics of arterial stenosis // J. Biomech. Eng.– 1979.– **101**.– P. 157–175.
5. *Миролюбов С. Г.* Гидродинамика стеноза // Современ. пробл. биомех.– 1983.– **1**.– С. 73–136.
6. *Berger S. A., Jou L-D.* Flows in stenotic vessels // Ann. Rev. Fluid Mech.– 2000.– **32**.– P. 347–382.
7. *Borisyuk A. O.* Noise field in the human chest due to turbulent flow in a larger blood vessel // Flow, Turbul. Combust.– 1999.– **61**.– P. 269–284.
8. *Borisyuk A. O.* Experimental study of noise produced by steady flow through a simulated vascular stenosis // J. Sound Vib.– 2002.– **256**.– P. 475–498.
9. *Blake W. K. (ed.)* Mechanics of flow-induced sound and vibration: in 2 vols.– New York: Academic Press, 1986.– 974 p.
10. *Голдстейн М. Е.* Аэроакустика.– М.: Машиностроение, 1981.– 294 с.


## ДОДАТОК. УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$a$ – радіус поперечного перерізу каналу;
$U$ – осереднена осьова швидкість течії в каналі;
$c_0$ – швидкість звуку в незбуреній рідині;
$\rho$ – густина рідини;
$\nu$ – кінематична в'язкість рідини;
$\mu$ – динамічна в'язкість рідини;
$p$ – тиск;
$T_{ij}$ – напруження Лайтхіла;
$F_i$ – $i$-та компонента прикладених до стінки каналу сил;
$\tau_{ij}$ – в'язкі напруження;
$\epsilon_{ij}$ – швидкості деформації;
$n_j$ – $j$-та компонента зовнішньої нормалі до стінки каналу;
$u_i$ – $i$-та компонента швидкості рідини;
$\delta_{ij}$ – символ Кронекера;
$V_0$ – об'єм збуреної течії;
$S_0$ – поверхня, що обмежує об'єм $V_0$;
$\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака;
$\rho_a$ – акустичні флуктуації густини;

$p_a$ – акустичні флуктуації тиску;
$P(\omega)$ – акустична енергія на частоті $\omega$;
$\Psi_{nm}^{(\nu)}$ – акустичні моди каналу ($\nu = 1, 2$);
$\alpha_{nm}$ – радіальні хвильові числа;
$k_{nm}$ – осьові хвильові числа;
$k_0$ – акустичне хвильове число;
$\omega_{nm}$ – критичні частоти каналу;
$S_{ijkl}^T$ – взаємні спектри образів Фур'є напружень Лайтхіла;
$S_{ik}^F$ – взаємні спектри образів Фур'є сил $F_k$;
$S_{ijk}^{TF}$ – взаємний спектр образів Фур'є напружень Лайтхіла $T_{ij}$ та сил $F_k$;
$\dfrac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}$ – об'ємні квадруполі;
$\dfrac{\partial F_i}{\partial y_i}$ – поверхневі диполі.