

УДК 539.3

РЕЗОНАНСНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ КОНЕЧНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРОВ

В. В. МЕЛЕШКО, Н. С. ЯКИМЕНКО, А. Ф. УЛИТКО

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Получено 29.09.2008

Предложена экспериментально-теоретическая методика определения упругих постоянных цилиндрических образцов с любым соотношением длины L и диаметра D . Для нахождения собственных частот осесимметричных колебаний цилиндра использован метод суперпозиции. Особое внимание уделено цилиндрам, у которых длина и диаметр – величины одного порядка. Для них модуль сдвига и коэффициент Пуассона могут быть вычислены одновременно. Для цилиндра с $L/D=1$ упругие постоянные материала находятся по отношению двух низших собственных частот. При $L/D=0.85314$ существует точное решение – мода Кри – Лэмба. В этом случае в рассмотрение необходимо привлекать и третью частоту. Отмечено хорошее согласование расчетных и измеренных данных.

Запропоновано експериментально-теоретичну методику визначення пружних констант циліндричних зразків з будь-яким відношенням довжини L й діаметра D . Для знаходження власних частот осесиметричних коливань циліндра використано метод суперпозиції. Особливу увагу приділено циліндрам, у яких довжина й діаметр – величини одного порядку. Для них модуль зсуву й коефіцієнт Пуассона можуть бути обчислені одночасно. Для циліндра з $L/D=1$ пружні константи матеріалу знаходяться за відношенням двох найнижчих власних частот. При $L/D=0.85314$ існує точний розв'язок – мода Крі – Лемба. У цьому випадку до розгляду необхідно залучати й третю частоту. Відзначено добре узгодження розрахункових та вимірних даних.

An experimental-theoretical method is proposed for determining the elastic constants of isotropic homogeneous cylindrical samples with arbitrary length L to diameter D ratio. The superposition method is used to obtain natural frequencies of the cylinder's axisymmetric vibration. The study is focused on the cylinders which diameter and length are the values of similar order, so that the shear modulus and Poisson ratio may be calculated simultaneously for them. For $L/D=1$, the elastic constants of material are derived from the ratio of two lowest natural frequencies. At $L/D=0.85314$, the exact solution (the Chree – Lamb mode) exists. In this case the third natural frequency should be also involved in consideration. A good agreement between the numerical and measured data has been observed.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи определения неразрушающими способами упругих постоянных изотропного материала при исследовании конкретных цилиндрических образцов традиционно важны как с научной, так и с практической точек зрения [1]. Их рассмотрение ведется еще с середины XIX века, начиная с работ Савара, Вертгейма, Кирхгофа и многих других [2,3]¹. Действительно, к примеру, более точное знание упругих свойств пород Земли могло бы существенно способствовать разработке уточненных моделей среды в геофизических исследованиях. Применение же в промышленности новых материалов с определенными характерными свойствами требует постоянных усилий по совершенствованию существующих и разработке новых методик, позволяющих находить их физические (в том числе и механические) константы со все возрастающей точностью.

Во второй половине XX века упругие постоян-

ные материала обычно определялись неразрушающими динамическими методами на образцах в виде длинных цилиндров с использованием знаний о низших собственных частотах продольных, изгибных и крутильных колебаний стержней в рамках классических и уточненных одномерных теорий [4–8]. Такие методики были использованы в ряде американских стандартов, последние версии которых [9–12] опубликованы сравнительно недавно. Однако на продольных модах длинных однородных и изотропных цилиндров с длиной L и плотностью ρ удается успешно определить лишь модуль Юнга E , используя основную моду колебаний с частотой $f_1 = \sqrt{E/\rho}/(2L)$. Последующие собственные частоты в рамках одномерной стержневой модели образуют гармонический ряд, так что нахождение модуля сдвига G и коэффициента Пуассона ν требует дополнительных измерений на крутильных и изгибных модах. Естественное желание определять все упругие постоянные на одном образце при одном типе (продольных) колебаний требует перехода к более коротким стержням. При этом отношение последующих собственных частот к низшей уже дает заметное отличие от гармонического ряда и при задан-

¹Литература, посвященная этой тематике, практически необозрима. Достаточно сказать, что поиск в Google только на английском языке по ключевым словам *Elastic constants and their measurements* выдал 388000 ссылок!

ном отношении длины к диаметру цилиндра зависят только от ν .

Переход к образцам в виде цилиндров, длина L и диаметр D которых соизмеримы, вызывает необходимость решения соответствующих пространственных динамических задач теории упругости и теоретическое определение собственных частот именно на этой основе. Из аналитических методов решения указанной осесимметричной пространственной задачи для продольных колебаний можно выделить три основных: метод суперпозиции, метод однородных решений и метод Ритца.

При использовании метода суперпозиции [13–17] строится точное решение векторного уравнения Ламе для вектора перемещений в виде суммы двух рядов по полным системам тригонометрических функций и функций Бесселя по продольной и радиальной координатам соответственно. Произвольные коэффициенты в рядах определяются при выполнении всех граничных условий, что в силу неортогональности функций приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Равенство нулю определителя такой системы дает уравнение для нахождения бесконечного набора безразмерных (нормированных по модулю сдвига G) собственных частот в зависимости от коэффициента Пуассона ν и соотношения размеров L/D . Такой подход весьма прост при численной реализации и требует малых затрат компьютерного времени.

Метод однородных решений [18–20] использует точные представления вектора смещений в виде неортогональных рядов по нормальным волнам Похгаммера – Кри с действительными, чисто мнимыми и комплексными постоянными распространения. При этом нулевые граничные условия в напряжениях на боковой поверхности выполняются тождественно, а граничные условия на торцах – приближенно (способами наименьших квадратов или коллокаций). Несмотря на привлекательность общей идеи представления собственных колебаний конечного цилиндра суммой бегущих волн в бесконечном цилиндре, практическая организация соответствующих вычислений весьма трудоемка. Дополнительные усилия требуют достаточно точное определение комплексных корней дисперсионного уравнения Похгаммера – Кри, что само по себе и на сегодняшний день представляет непростую задачу [21].

В последнее десятилетие наиболее активно развивающимся вновь стал классический метод Рэлея – Ритца [23–25] (см. также пионерскую работу [22]). Отметим недавнюю дискуссию [26, 27] относительно авторства этого замечательного ва-

риационного метода. В рамках такого подхода компоненты вектора перемещений представляются в виде конечных двойных сумм алгебраических полиномов от радиальной и продольной координат с произвольными коэффициентами. Следует подчеркнуть, что при этом ни уравнения движения Ламе, ни граничные условия не выполняются совсем. Минимизации подлежит квадратичный функционал, выражающий разность максимумов потенциальной и кинетической энергий цилиндра при гармонических колебаниях на заданной частоте. Это приводит к однородной линейной системе алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

Несмотря на четкую идею метода, организация вычислительного процесса требует серьезных усилий, которые сейчас можно в значительной мере переложить на компьютер. Отметим, однако, что сам Ритц в своей последней статье [28] сумел, несмотря на тяжелую болезнь, проделать все вычисления вручную и определить первые три десятка собственных частот и форм изгибных колебаний тонкой квадратной пластинки. Тем не менее, по существующим оценкам сопутствующие затраты машинного времени представляются несообразными: согласно [25], при оптимальном (!) выборе количества полиномов (всего 88) для определения первых пяти безразмерных собственных частот колебаний “кубообразного” цилиндра ($L/D=0.85314$) с шестью значащими цифрами потребовалось около 16 часов работы процессора класса Pentium-IV.

Несмотря на это и на активную дискуссию [23–25] относительно точности определения всех низших собственных частот, такой подход широко используется в работах группы испанских ученых [33–37] для усовершенствования методик определения упругих постоянных цилиндров конечной длины. Цитируемые исследования существенным образом опираются на высокоточное измерение в экспериментах спектра собственных частот на основе методики лазерной спекл-интерферометрии [38–41]. Следует, однако, отметить, что отсутствие достоверных данных о теоретических значениях собственных частот конечного цилиндра несколько снижает ценность такой методики.

Цель этой статьи заключается в составлении подробных таблиц первых собственных частот конечного цилиндра для нескольких типичных значений L/D в зависимости от коэффициента Пуассона ν и определении на этой основе упругих постоянных материалов, используемых в экспериментах [33–36].

1. КОЛЕБАНИЯ КОНЕЧНОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

В этом разделе рассматриваются стационарные вынужденные и собственные колебания изотропного однородного упругого конечного цилиндра длины $L=2H$ и диаметра $D=2a$. Изотропный материал цилиндра с плотностью ρ характеризуется двумя упругими постоянными: модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν . Цилиндр занимает область, которая в цилиндрических координатах (r, θ, z) с началом в его центре тяжести задается соотношениями $0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -H \leq z \leq H$.

Решение соответствующих граничных задач строится методом суперпозиции. Подробное изложение всех последовательных этапов построения решения дано в монографии [43], поэтому ниже будут приведены лишь основные расчетные формулы.

1.1. Постановка граничных задач

Осесимметричные колебания цилиндра с радиальной (u) и осевой (w) компонентами вектора перемещений описываются векторным уравнением Ламе, которое в цилиндрических координатах сводится к двум скалярным уравнениям:

$$2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial r} + \frac{\rho \omega^2}{G} u = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial w}{\partial r} \right] + 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\rho \omega^2}{G} w = 0,$$

где $\omega = 2\pi f$ – круговая частота колебаний; f – частота колебаний в Гц. Гармонический множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее опускаем.

Поверхность цилиндра считаем либо нагруженной нормальными усилиями

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2Gf(z), \quad \tau_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad r = a, \\ \sigma_z &= 2Gg_+(r), \quad \tau_{zr} = 0 \quad \text{при} \quad z = H, \\ \sigma_z &= 2Gg_-(r), \quad \tau_{zr} = 0 \quad \text{при} \quad z = -H, \end{aligned} \tag{2}$$

либо свободной от нагрузки

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 0, \quad \tau_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad r = a, \\ \sigma_z &= 0, \quad \tau_{zr} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm H, \end{aligned} \tag{3}$$

что соответствует случаям вынужденных (на произвольной частоте) и свободных (на собственной частоте) колебаний. Здесь нормальные (σ_r, σ_z)

и касательные ($\tau_{rz} = \tau_{zr}$) напряжения связаны с компонентами вектора перемещений $(u, 0, w)$ законом Гука и соотношениями Коши.

Ставится задача определения безразмерных собственных частот $\Omega^{(n)} = \omega_n a \sqrt{\rho/G} = \pi f_n D \sqrt{\rho/G}$ в зависимости от коэффициента Пуассона ν и отношения $L/D = H/a$. В силу симметрии цилиндра относительно срединной плоскости $z=0$, в нем могут независимо существовать два типа колебаний: симметричных (присвоим им индекс s), для которых u – четная, а w – нечетная функции от z (при этом $f(-z) = f(z) = f^{(s)}(z), g_+(r) = g_-(r) = g^{(s)}(r)$); и антисимметричных (индекс a), для которых u – нечетная, а w – четная функции от z ($f(-z) = -f(z) = f^{(a)}(z), g_+(r) = -g_-(r) = g^{(a)}(r)$). Очевидно, что в силу линейности задачи, такое разделение движений в цилиндре всегда возможно. При этом могут существовать такие значения L/D , для которых некоторые собственные частоты первого ($\Omega^{(s,l)}$) и второго ($\Omega^{(a,l)}$) семейств совпадают ($l=1, 2, \dots$). Этот факт нашел свое экспериментальное подтверждение [42].

1.2. Построение решений граничных задач

Решения граничных задач (1), (2) и (1), (3) о вынужденных и свободных колебаниях строятся методом суперпозиции.

Для случая симметричных колебаний выражения для компонент вектора перемещений, удовлетворяющие уравнениям (1), имеют вид

$$\begin{aligned} u^{(s)}(r, z) &= X_0^{(s)} \frac{J_1(\gamma_1 r)}{\gamma_1 a} + a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n^{(s)} \times \\ &\times \left[\frac{I_1(q_2 r)}{I_1(q_2 a)} - \frac{k_n^2 + q_2^2}{2k_n^2} \frac{I_1(q_1 r)}{I_1(q_1 a)} \right] \cos k_n z - \\ &- H \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^{(s)} \left[\frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2\lambda_j p_1} \frac{\text{ch } p_1 z}{\text{sh } p_1 H} - \right. \\ &\left. - \frac{p_2 \text{ch } p_2 z}{\lambda_j \text{sh } p_2 H} \right] \frac{J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} w^{(s)}(r, z) &= -Y_0^{(s)} \frac{\sin \gamma_1 z}{\gamma_1 a} + a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n^{(s)} \times \\ &\times \left[\frac{k_n^2 + q_2^2}{2k_n q_1} \frac{I_0(q_1 r)}{I_1(q_1 a)} - \frac{q_2}{k_n} \frac{I_0(q_2 r)}{I_1(q_2 a)} \right] \sin k_n z - \\ &- H \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^{(s)} \left[\frac{\text{sh } p_2 z}{\text{sh } p_2 H} - \right. \\ &\left. - \frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2\lambda_j^2} \frac{\text{sh } p_1 z}{\text{sh } p_1 H} \right] \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}. \end{aligned}$$

Здесь $k_n = n\pi/H$; λ_j – корни уравнения $J_1(\lambda a) = 0$; $\gamma_m = \omega/c_m$; $q_m^2 = k_n^2 - \gamma_m^2$; $p_m^2 = \lambda_j^2 - \gamma_m^2$; $m = 1, 2$; J_0, J_1 – функции Бесселя первого рода; I_0, I_1 – модифицированные функции Бесселя первого рода; $c_1 = c_2 \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}$, $c_2 = \sqrt{G/\rho}$ – скорости продольных и сдвиговых волн в бесконечной упругой среде.

Выполнение граничных условий (2) с использованием известных разложений гиперболических функций и модифицированных функций Бесселя по полным системам тригонометрических функций $\cos k_n z$ и функций Бесселя $J_0(\lambda_j r)$ [43] приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов рядов $X_n^{(s)}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и $Y_j^{(s)}$ ($j = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} X_0^{(s)} R^0 + Y_0^{(s)} S^0 + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^{(s)} T_j^0 &= f_0^{(s)}, \\ X_0^{(s)} U^0 + Y_0^{(s)} V^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(s)} W_n^0 &= g_0^{(s)}, \\ Y_0^{(s)} S^n + X_n^{(s)} P_n^{(s)}(q) + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^{(s)} T_j^n &= f_n^{(s)}, \\ X_0^{(s)} U^j + Y_j^{(s)} \Delta_j^{(s)}(p) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(s)} W_n^j &= g_j^{(s)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} P_n^{(s)}(q) &= q_2 a \frac{I_0(q_2 a)}{I_1(q_2 a)} - a \frac{(k_n^2 + q_2^2)^2}{4k_n^2 q_1} \frac{I_0(q_1 a)}{I_1(q_1 a)} - \frac{\gamma_2^2}{k_n^2}; \\ \Delta_j^{(s)}(p) &= H \left[p_2 \operatorname{cth} p_2 H - \frac{(\lambda_j^2 + p_2^2)^2}{4\lambda_j^2 p_1} \operatorname{cth} p_1 H \right]; \\ f^{(s)}(z) &= f_0^{(s)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n^{(s)} \cos k_n z; \\ g^{(s)}(r) &= g_0 + \sum_{j=1}^{\infty} g_j^{(s)} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} R^0 &= \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} J_0(\gamma_1 a) - \frac{J_1(\gamma_1 a)}{\gamma_1 a} \right]; \\ S^0 &= -\frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\sin \gamma_1 H}{\gamma_1 H}; \quad T_j^0 = \frac{\nu}{2(1-2\nu)} \frac{\gamma_1^2 \gamma_2^2}{\lambda_j^2 p_1^2}; \\ U^0 &= \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{J_1(\gamma_1 a)}{\gamma_1 a}; \quad V^0 = -\frac{1-\nu}{1-2\nu} \cos \gamma_1 H; \\ W_n^0 &= -\frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\gamma_1^2 \gamma_2^2}{k_n^2 q_1^2}; \quad S^n = \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\gamma_1 a \sin \gamma_1 H}{H q_1^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_j^n &= \frac{1}{1-2\nu} \frac{\gamma_1^2}{\lambda_j^2 + q_1^2} \left[\frac{\nu \gamma_2^2}{\lambda_j^2} - \frac{2k_n^2}{\lambda_j^2 + q_2^2} \right]; \\ U^j &= -\frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\gamma_1^2 J_1(\gamma_1 a)}{p_1^2}; \\ W_n^j &= -\frac{1}{1-2\nu} \frac{\gamma_1^2}{k_n^2 + p_1^2} \left[\frac{\nu \gamma_2^2}{k_n^2} - \frac{2\lambda_j^2}{k_n^2 + p_2^2} \right]. \end{aligned}$$

Для случая собственных колебаний, полагая свободные члены в уравнениях (5) равными нулю, получаем однородную бесконечную систему вида (1), определитель которой и дает уравнение для нахождения собственных частот $\Omega^{(s,l)}$ ($l = 1, 2, \dots$). Ее корректная редукция основывается на установленном законе асимптотических выражений [43]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n^{(s)} = \lim_{j \rightarrow \infty} Y_j^{(s)} = A_0^{(s)} = \text{const}. \quad (6)$$

Согласно ему, от бесконечной системы (5) к редуцированной конечной системе, содержащей $N+1$ первых неизвестных $X_n^{(s)}$ ($n = 0, 1, \dots, N$) и $J+1$ первых неизвестных $Y_j^{(s)}$ ($j = 0, 1, \dots, J$), а также неизвестную постоянную $A_0^{(s)}$, следует перейти на основании соотношений

$$X_n^{(s)} = Y_j^{(s)} = A_0^{(s)}, \quad n > N, \quad j > J. \quad (7)$$

Дополнительное уравнение для $A_0^{(s)}$ имеет вид

$$A_0^{(s)} = \frac{X_N^{(s)} + Y_J^{(s)}}{2} \quad (8)$$

или (альтернативный вариант)

$$\begin{aligned} A_0^{(s)} &= \frac{\pi}{aH(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \left\{ f^{(s)}(H) - g^{(s)}(a) - \right. \\ &- X_0^{(s)} \left[J_0(\gamma_1 a) - \frac{J_1(\gamma_1 a)}{\gamma_1 a} \right] + Y_0^{(s)} \cos \gamma_1 H + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(s)} \left[a \frac{(k_n^2 + q_1^2)(k_n^2 + q_2^2)}{2k_n^2 q_1} \frac{I_0(q_1 a)}{I_1(q_1 a)} - \right. \\ &\quad \left. - 2q_1 a \frac{I_0(q_2 a)}{I_1(q_1 a)} + \frac{\gamma_2^2}{2k_n^2} \right] - \\ &\left. - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^{(s)} \left[H \frac{(\lambda_j^2 + p_1^2)(\lambda_j^2 + p_2^2)}{2\lambda_j^2 p_1} \operatorname{cth} p_1 H - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2p_2 H \operatorname{cth} p_2 H \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогичным образом строится представление

В. В. Мелешко, Н. С. Якименко, А. Ф. Улитко

для антисимметричних коливань:

$$\begin{aligned}
 u^{(a)}(r, z) &= a \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} X_l^{(a)} \times \\
 &\times \left[\frac{I_1(q_2 r)}{I_1(q_2 a)} - \frac{k_l^2 + q_2^2}{2k_l^2} \frac{I_1(q_1 r)}{I_1(q_1 a)} \right] \sin k_l z + \\
 &+ H \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^{(a)} \left[\frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2\lambda_j p_1} \frac{\operatorname{sh} p_1 z}{\operatorname{ch} p_1 H} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{p_2 \operatorname{sh} p_2 z}{\lambda_j \operatorname{ch} p_2 H} \right] \frac{J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}, \\
 w^{(a)}(r, z) &= Y_0^{(a)} \frac{\cos \gamma_1 z}{\gamma_1} + a \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} X_l^{(a)} \times \\
 &\times \left[\frac{I_0(q_2 r)}{I_1(q_2 a)} - \frac{k_l^2 + s_2^2}{2k_l q_1} \frac{I_0(q_1 r)}{I_1(s_1 a)} \right] \cos k_l z + \\
 &+ H \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^{(a)} \left[\frac{\operatorname{ch} p_1 z}{\operatorname{ch} p_1 H} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2\lambda_j^2} \frac{\operatorname{ch} p_2 z}{\operatorname{ch} p_2 H} \right] \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}
 \end{aligned} \quad (10)$$

с произвольными коэффициентами $X_l^{(a)}$ ($l=1, 2, \dots$) и $Y_j^{(a)}$ ($j=0, 1, 2, \dots$), в котором $k_l = (2l-1)\pi/(2H)$, а остальные обозначения соответствуют приведенным выше.

Бесконечная система для вынужденных колебаний с граничными условиями (2) имеет вид

$$\begin{aligned}
 Y_0^{(a)} \tilde{V}^0 + \sum_{l=1}^{\infty} X_l^{(a)} \tilde{W}_l^0 &= -g_0^{(a)}, \\
 Y_0^{(a)} \tilde{S}^l - X_l^{(a)} P_l^{(a)}(q) \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^{(a)} \tilde{T}_j^l &= f_l^{(a)}, \\
 -Y_j^{(s)} \Delta_j^{(a)}(p) + \sum_{l=1}^{\infty} X_l^{(a)} \tilde{W}_l^j &= g_j^{(a)}.
 \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 P_l^{(a)}(q) &= q_2 a \frac{I_0(q_2 a)}{I_1(q_2 a)} - a \frac{(k_l^2 + q_2^2)^2}{4k_l^2 q_1} \frac{I_0(q_1 a)}{I_1(q_1 a)} - \frac{\gamma_2^2}{k_l^2}; \\
 \Delta_j^{(a)}(p) &= H \left[p_2 \operatorname{th} p_2 H - \frac{(\lambda_j^2 + p_2^2)^2}{4\lambda_j^2 p_1} \operatorname{th} p_1 H \right]; \\
 f^{(a)}(z) &= \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l f_l^{(a)} \sin k_l z; \\
 g^{(a)}(r) &= g_0^{(a)} + \sum_{j=1}^{\infty} g_j^{(a)} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j)}
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}^0 &= \sin \gamma_1 H; \quad \tilde{W}_l^0 = \frac{2\nu}{1-2\nu} \gamma_1^4 \frac{1}{k_l^2 q_1^2}; \\
 \tilde{S}^l &= \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\gamma_1 a \cos \gamma_1 H}{H q_1^2}; \\
 \tilde{T}_j^l &= -\frac{1}{1-2\nu} \frac{\gamma_1^2}{\lambda_j^2 + q_1^2} \left[\frac{\nu \gamma_2^2}{\lambda_j^2} - \frac{2k_l^2}{\lambda_j^2 + q_2^2} \right]; \\
 \tilde{W}_l^j &= -\frac{1}{1-2\nu} \frac{\gamma_1^2}{k_l^2 + p_1^2} \left[\frac{\nu \gamma_2^2}{k_l^2} - \frac{2\lambda_j^2}{k_l^2 + p_2^2} \right].
 \end{aligned}$$

Как и ранее, для асимптотики неизвестных справедливо соотношение

$$\lim_{l \rightarrow \infty} X_l^{(a)} = \lim_{j \rightarrow \infty} Y_j^{(a)} = A_0^{(a)} = \text{const}, \quad (12)$$

и переход от бесконечной системы (11) к конечной осуществляется на основании замен

$$X_l^{(a)} = Y_j^{(a)} = A_0^{(a)}, \quad l > N, \quad j > J. \quad (13)$$

Дополнительное уравнение для $A_0^{(a)}$ имеет вид

$$A_0^{(a)} = \frac{X_N^{(a)} + Y_J^{(a)}}{2} \quad (14)$$

или

$$\begin{aligned}
 A_0^{(a)} &= \frac{\pi}{aH(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \left\{ f^{(a)}(H) - g^{(a)}(a) - \right. \\
 &\quad \left. - Y_0^{(a)} \sin \gamma_1 H + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l=1}^{\infty} X_l^{(a)} \left[a \frac{(k_l^2 + q_1^2)(k_l^2 + q_2^2)}{2k_l^2 q_1} \frac{I_0(q_1 a)}{I_1(q_1 a)} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2q_1 a \frac{I_0(q_2 a)}{I_1(q_1 a)} + \frac{\gamma_2^2}{2k_l^2} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^{(a)} \left[H \frac{(\lambda_j^2 + p_1^2)(\lambda_j^2 + p_2^2)}{2\lambda_j^2 p_1 a} \operatorname{th} p_1 H - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2p_2 H \operatorname{th} p_2 H \right] \right\}.
 \end{aligned} \quad (15)$$

Знание асимптотических законов (6), (12) особо важно при анализе вынужденных колебаний цилиндра под действием заданной силовой нагрузки на торцах и/или боковой поверхности на произвольной частоте ω , поскольку неучет поведения коэффициентов в рядах Фурье и Дини–Бесселя

приводит к неустранимой погрешности в окрестности реберных окружностей $r = a$, $z = \pm H$. Методика организации вычислений при вынужденных колебаниях детально описана в книге [43]. Отметим только, что их анализ позволяет с любой точностью установить интервалы, в которых заключены собственные частоты. На наш взгляд, такая методика определения допустимых интервалов наиболее предпочтительна и проста в численной реализации, поскольку вычисляемый определитель имеет типичные значения порядка $\pm 10^{-20}$ (в зависимости от требуемой точности и количества вовлекаемых членов в редуцированной системе) и надежно установить переход через нуль весьма затруднительно.

1.3. Моды Кри–Лэмба

Известно, что в цилиндре при определенных отношениях L/D могут существовать весьма простые собственные формы колебаний, отвечающие точному решению граничной задачи (1), (3) и носящие название мод Кри–Лэмба по именам их первых исследователей [44, 45] (отметим, что Лэмб лишь в сноске на с. 122 упомянул о наличии таких решений для цилиндра, поскольку основной темой статьи [45] было исследование нормальных волн в упругом слое). Эти своеобразные моды характеризуются нулевым объемным расширением и отсутствием касательных напряжений во всем объеме цилиндра. Для симметричных типов движений соответствующая форма колебаний имеет вид

$$u_{C-L}^{(s,k)}(r, z) = -B J_1(\beta_k r) \cos \beta_k z, \quad (16)$$

$$w_{C-L}^{(s,k)}(r, z) = B J_0(\beta_k r) \sin \beta_k z$$

с собственной частотой

$$\Omega_{C-L}^{(k)} = \sqrt{2} \beta_k a, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

$$J_1'(\beta_k a) = J_0(\beta_k a) - \frac{J_1(\beta_k a)}{\beta_k a} = 0$$

для

$$(L/D)_{C-L}^{(p,k)} = \frac{p\pi}{2\beta_k a}, \quad p = 1, 3, 5, \dots \quad (18)$$

Для антисимметричных типов движений

$$u_{C-L}^{(a,k)}(r, z) = C J_1(\beta_k r) \sin \beta_k z, \quad (19)$$

$$w_{C-L}^{(a,k)}(r, z) = C J_0(\beta_k r) \cos \beta_k z$$

с теми же самыми частотами $\Omega_{C-L}^{(k)}$ (17), но для

$$(L/D)_{C-L}^{(p,k)} = \frac{p\pi}{2\beta_k a}, \quad p = 2, 4, 6, \dots \quad (20)$$

В табл. 1 приведены несколько значений $\Omega_{C-L}^{(s,k)}$ и геометрий для мод Кри–Лэмба.

Частоты (17) и соотношения сторон (18), (20) могут быть получены как замкнутые решения однородных бесконечных систем (5), (11). Действительно, принимая для однородной системы, что

$$X_0^{(s)} = -A_0^{(s)} \frac{\gamma_1 a}{2J_1(\gamma_1 a)}, \quad X_n^{(s)} = A_0^{(s)} \frac{2k_n^2}{k_n^2 + q_2^2}, \quad (21)$$

$$Y_0^{(s)} = A_0^{(s)} \frac{\gamma_1 H}{\sin \gamma_1 H}, \quad Y_j^{(s)} = A_0^{(s)} \frac{2\lambda_j^2}{\lambda_j^2 + p_2^2},$$

после использования значений стандартных сумм получаем, что система удовлетворена тождественно, если для частоты $\Omega = \gamma_1 a$ и отношений $H/a = L/D$ выполнены уравнения (17) и (18). При этом, путем переразложения ряды в соотношениях (4) суммируются в замкнутом виде и дают выражения (16). Любопытно отметить, что представления (21) подтверждают закон асимптотических выражений (6).

Аналогично, для антисимметричной бесконечной системы (11), полагая

$$X_n^{(a)} = A_0^{(a)} \frac{2k_n^2}{k_n^2 + q_2^2}, \quad (22)$$

$$Y_0^{(a)} = A_0^{(a)} \frac{\gamma_1 H}{\cos \gamma_1 H}, \quad Y_j^{(a)} = A_0^{(a)} \frac{2\lambda_j^2}{\lambda_j^2 + p_2^2},$$

приходим к соотношениям (17), (20) для мод Кри–Лэмба с формой перемещений вида (19).

1.4. Результаты расчетов

В табл. 2 приведены данные о зависимости расчетных собственных частот $\Omega^{(n)}$ для трех симметричных и трех антисимметричных мод колебаний от коэффициента Пуассона ν для $L/D = 1$.

При расчетах принималось $N = 20$, $J = 20$. Увеличение количества удерживаемых членов не приводило к изменению значений в шестом знаке. Для полноты картины выбрано также несколько отрицательных (но термодинамически допустимых) значений ν , характерных для некоторых материалов типа пиролитического графита [46]. Видно, что сами частоты и отношение $\Omega^{(2)}/\Omega^{(1)}$ – монотонно возрастающие функции от ν . Аналогичная (но с излишним, на наш взгляд, количеством значений ν) таблица приведена в работе [34]. Небольшие различия между этими и нашими данными объясняются тем, что в [34] использовался приближенный метод Ритца. В наших же расчетах найденные значения всех собственных частот,

Табл 1. Значения первых частот Кри – Лэмба и соответствующих геометрий для цилиндров

k	$(L/D)_{C-L}^{(p,k)}$						$\Omega_{C-L}^{(p,k)}$
	$p=1 (s)$	$p=2 (a)$	$p=3 (s)$	$p=4 (a)$	$p=5 (s)$	$p=6 (a)$	
1	0.853145	1.706290	2.559434	3.412579	4.265724	5.118869	2.603827
2	0.294629	0.589258	0.883886	1.178515	1.473143	1.767773	7.539799
3	0.184013	0.368027	0.552040	0.736053	0.920067	1.104080	12.07217

Табл 2. Первые шесть собственных частот $\Omega^{(n)}$ для $L/D=1$ в зависимости от коэффициента Пуассона ν

ν	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(2)}$	$\Omega^{(3)}$	$\Omega^{(4)}$	$\Omega^{(5)}$	$\Omega^{(6)}$
-0.15	1.96243	2.02922	2.19880	2.99793	2.42077	4.13282
-0.10	2.06290	2.12040	2.28668	3.08035	2.44993	4.18240
-0.05	2.15283	2.21275	2.37224	3.15974	2.50593	4.23391
0.00	2.22144	2.30623	2.45418	3.23457	2.60383	4.28793
0.05	2.26488	2.40069	2.54115	3.30341	2.74259	4.34523
0.10	2.29012	2.49583	2.63630	3.36523	2.91695	4.40660
0.15	2.30522	2.59121	2.73756	3.41957	3.12704	4.47283
0.16	2.30749	2.61027	2.75840	3.42954	3.17366	4.48673
0.17	2.30957	2.62930	2.77942	3.43923	3.22190	4.50085
0.18	2.31149	2.64831	2.80060	3.44862	3.27181	4.51521
0.19	2.31326	2.66728	2.82196	3.45774	3.32343	4.52981
0.20	2.31489	2.68621	2.84348	3.46658	3.37678	4.54465
0.21	2.31641	2.70510	2.86516	3.47515	3.43188	4.55974
0.22	2.31782	2.72393	2.88700	3.48346	3.48874	4.57508
0.23	2.31914	2.74270	2.90900	3.49151	3.54731	4.59067
0.24	2.32037	2.76141	2.93115	3.49932	3.60753	4.60653
0.25	2.32152	2.78004	2.95345	3.50688	3.66926	4.62264
0.26	2.32259	2.79858	2.97590	3.51421	3.73230	4.63902
0.27	2.32361	2.81704	2.99849	3.52130	3.79633	4.65566
0.28	2.32456	2.83540	3.02124	3.52818	3.86092	4.67256
0.29	2.32546	2.85365	3.04412	3.53485	3.92549	4.68974
0.30	2.32630	2.87178	3.06714	3.54131	3.98929	4.70717
0.31	2.32710	2.88980	3.09030	3.54758	4.05145	4.72487
0.32	2.32786	2.90768	3.11358	3.55365	4.11106	4.74284
0.33	2.32858	2.92543	3.13700	3.55955	4.16722	4.76106
0.34	2.32926	2.94303	3.16054	3.56526	4.21923	4.77955
0.35	2.32991	2.96048	3.18420	3.57081	4.26666	4.79828
0.36	2.33053	2.97777	3.20797	3.57619	4.30938	4.81727
0.37	2.33112	2.99489	3.23185	3.58142	4.34758	4.83650
0.38	2.33168	3.01185	3.25583	3.58650	4.38160	4.85596
0.39	2.33221	3.02862	3.27991	3.59144	4.41191	4.87566
0.40	2.33273	3.04520	3.30408	3.59624	4.43900	4.89558
0.41	2.33322	3.06160	3.32833	3.60090	4.46334	4.91572
0.42	2.33369	3.07780	3.35266	3.60544	4.48534	4.93606
0.43	2.33414	3.09380	3.37706	3.60986	4.50536	4.95660
0.44	2.33457	3.10960	3.40152	3.61417	4.52371	4.97732
0.45	2.33499	3.12518	3.42602	3.61836	4.54064	4.99822

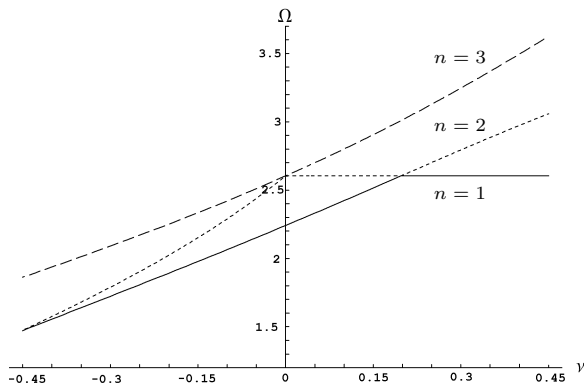


Рис. 1. Зависимость первых трех собственных частот $\Omega^{(n)}$ от ν для $L/D=0.85314$

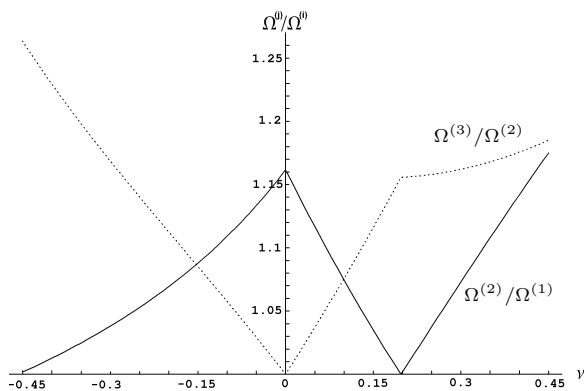


Рис. 2. Отношения $\Omega^{(2)}/\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(3)}/\Omega^{(2)}$ от ν для $L/D=0.85314$

определяемых через корректно усекаемые определители бесконечных систем (5), (11), лежат внутри интервалов смены знаков всех характеристик при анализе вынужденных колебаний цилиндра.

На рис. 1 представлены зависимости первых трех собственных частот цилиндра с $L/D=0.85314$, для которого собственная мода колебаний (вторая или первая, в зависимости от ν) соответствует моде Кри–Лэмба. В этом случае отношение $\Omega^{(2)}/\Omega^{(1)}$ уже не является однозначной функцией ν и для определения коэффициента Пуассона целесообразно использовать отношение $\Omega^{(3)}/\Omega^{(2)}$ (см. рис. 2).

Наконец, табл. 3 дает значения первых шести собственных частот для $L/D=2.812$. Именно такова была геометрия образца, использованного в наших экспериментах на алюминиевом цилиндре.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ МАТЕРИАЛА ЦИЛИНДРА

2.1. Описание методики

Знание упорядоченного набора $\Omega^{(n)}$ собственных частот конечного цилиндра для определенного значения L/D и коэффициента ν позволяет предложить такую экспериментально-теоретическую методику определения упругих постоянных цилиндра. При этом следует помнить, что первые собственные частоты Ω_{sk} и Ω_{ak} ($k=1, 2, 3$) чередуются начиная с симметричной моды Ω_{s1} при $L/D \geq 0.75$ и антисимметричной при $L/D \leq 0.75$.

Для фиксированного $L/D > 0.75$ отношение $\Omega^{(2)}/\Omega^{(1)} = f_{a1}/f_{s1}$ не зависит от модуля сдвига G и плотности ρ , являясь функцией лишь от ν . Измерив значение двух низших (симметричной и антисимметричной) мод колебаний и располагая подробной таблицей или графиком зависимости $\Omega^{(2)}/\Omega^{(1)} = f_{a1}/f_{s1}$ от ν , по данным эксперимента можно определить значение коэффициента Пуассона, проведя при необходимости линейную интерполяцию. Знание расчетной первой низшей частоты Ω_{s1} и соответствующей измеренной частоты f_{s1} позволяет определить модуль сдвига G из соотношения

$$G = \frac{\pi^2 f_{s1}^2 D^2 \rho}{\Omega_{s1}}. \quad (23)$$

Другие измеренные значения резонансных частот могут служить критерием проверки постоянных, найденных по указанной схеме. В работах [34, 35] проведена оценка систематической погрешности методики и отмечено, что отношение $L/D=1$ оптимально для ее применения. Отметим, что предложенное первоначально в [33] итерационное определение величин ν и G было излишне громоздко и впоследствии от него отказались [34]. Своеобразной модификацией описанной методики может служить использование точных значений частот $\Omega_{C-L}^{(k)}$ мод Кри–Лэмба для некоторых значений L/D . Так, при $L/D=0.85322$ частота $\Omega_{C-L}^{(1)} = 2.6036$ является собственной частотой симметричных колебаний цилиндра [36]². При $\nu \geq 0.20$ эта частота будет первой собственной частотой осесимметричных колебаний цилиндра, а при $\nu \leq 0.20$ – второй. Поэтому, измерив для такого отношения L/D три последовательные частоты резонансных колебаний цилиндра f_1 , f_2 и f_3 , по отношениям f_2/f_1 и f_3/f_2 с помощью таблицы или рис. 1 можно однозначно определить коэффици-

²Следует отметить, что в этой работе указано неточные значения $(L/D)_{C-L}^{(1)}$ и $\Omega_{C-L}^{(1)}$. Исправленные данные можно найти в работе этих же авторов [37]

Табл. 3. Первые шесть собственных частот $\Omega^{(n)}$ для $L/D=2.812$ в зависимости от коэффициента Пуассона ν

ν	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(2)}$	$\Omega^{(3)}$	$\Omega^{(4)}$	$\Omega^{(5)}$	$\Omega^{(6)}$
0.30	0.89407	1.73945	2.44131	2.89780	2.94754	2.97138
0.31	0.89707	1.74267	2.44163	2.90270	2.96686	2.98833
0.32	0.90004	1.74580	2.44193	2.90649	2.98604	3.00625
0.33	0.90298	1.74883	2.44222	2.90954	3.00508	3.02475
0.34	0.90589	1.75178	2.44249	2.91208	3.02394	3.04359
0.35	0.90877	1.75465	2.44275	2.91427	3.04259	3.06263
0.36	0.91163	1.75743	2.44299	2.91619	3.06102	3.08175
0.37	0.91446	1.76014	2.44322	2.91790	3.07920	3.10090
0.38	0.91726	1.76277	2.44344	2.91946	3.09708	3.12003
0.39	0.92003	1.76533	2.44365	2.92088	3.11463	3.13910
0.40	0.92278	1.76781	2.44385	2.92219	3.13181	3.15807

ент Пуассона. Затем по формуле (23) при $f_{s1}=f_2$ (для $\nu < 0.20$) или $f_{s1}=f_1$ (для $\nu > 0.20$) вычисляется модуль сдвига G . Отметим, что такой подход требует четкого задания в эксперименте фиксированного отношения L/D , что может оказаться технически трудно выполнимым.

2.2. Примеры использования методики

Рассмотрим несколько примеров использования предложенной методики. Для начала воспользуемся экспериментальными данными работы [33], в которой исследовался алюминиевый “кубообразный” цилиндр с $\rho=2791$ кг/м³, $L=D=40.30$ мм. Методом нестационарных колебаний были измерены пять нижних собственных частот

$$\begin{aligned} f_1 &= 58349 \text{ Гц}, & f_2 &= 73242 \text{ Гц}, \\ f_3 &= 78857 \text{ Гц}, & f_4 &= 88867 \text{ Гц}, \\ f_5 &= 104736 \text{ Гц}. \end{aligned} \quad (24)$$

По отношению $f_2/f_1 = \Omega^{(2)}/\Omega^{(1)} = 1.25524$, линейно интерполируя данные табл. 2, находим $\nu = 0.3285$, а из соотношения (23) – $G = 28.1$ ГПа. При уже определенном значении ν рассчитаем остальные собственные частоты на основании простого соотношения $f_k = f_1 \Omega^{(k)}/\Omega^{(1)}$ ($k=3, 4, 5$): $f_3^{(\text{расч})} = 78523$ Гц, $f_4^{(\text{расч})} = 89177$ Гц, $f_5^{(\text{расч})} = 104217$ Гц. Отметим хорошее соответствие экспериментальных и расчетных данных.

В качестве второго примера возьмем экспериментальные данные из работы [34]: “кубообразный” цилиндр из нержавеющей стали ($\rho = 7884$ кг/м³, $L = D = 49.90$ мм). Четыре низ-

шие собственные частоты для него составили

$$\begin{aligned} f_1 &= 46142 \text{ Гц}, & f_2 &= 56884 \text{ Гц}, \\ f_3 &= 60546 \text{ Гц}, & f_4 &= 70312 \text{ Гц}. \end{aligned} \quad (25)$$

По отношению f_2/f_1 из табл. 2 находим $\nu = 0.298$, а из (23) – $G = 76.2$ ГПа. Вычисления на основе этих данных дают $f_3^{(\text{расч})} = 60737.1$ Гц и $f_4^{(\text{расч})} = 70218.2$ Гц, что также превосходно согласуется с измерениями.

В качестве более экзотического примера обратимся к методике, основанной на использовании мод Кри–Лэмба. В работе [36, Table 1, p. 2931] были выбраны такие образцы³:

- с) стальной цилиндр:
 $\rho_c = 7884$ кг/м³, $L_c = 42.57$ мм, $D_c = 49.90$ мм,
 $L_c/D_c = 0.8532$, $f_1 = 51725$ Гц, $f_2 = 55325$ Гц,
 $f_3 = 64150$ Гц, $f_2/f_1 = 1.070$, $f_3/f_2 = 1.160$;
- д) алюминиевый цилиндр:
 $\rho_d = 2791$ кг/м³, $L_d = 33.27$ мм, $D_d = 39.00$ мм,
 $L_d/D_d = 0.85$, $f_1 = 65275$ Гц, $f_2 = 73300$ Гц,
 $f_3 = 85950$ Гц, $f_2/f_1 = 1.089$, $f_3/f_2 = 1.172$;
- г) цилиндр из отожженного кварца:
 $\rho_g = 2199$ кг/м³, $L_d = 40.45$ мм, $D_d = 47.60$ мм,
 $L_d/D_d = 0.8498$, $f_1 = 64150$ Гц, $f_2 = 65775$ Гц,
 $f_3 = 74375$ Гц, $f_2/f_1 = 1.025$, $f_3/f_2 = 1.131$.

Обратившись к рис. 2, по отношению f_2/f_1 (с учетом f_3/f_2) и формуле (23) находим, что $\nu_c = 0.295$, $G_c = 76.46$ ГПа; $\nu_d = 0.324$, $G_d = 27.97$ ГПа; $\nu_g = 0.167$, $G_d = 31.22$ ГПа (индексы при ν и G соответствуют приведенному списку). Для проверки этих результатов были определены первые

³Нумерация в списке соответствует исходной по [36].

безразмерные частоты для “кубообразных” образцов “е” (стальной цилиндр с $L=D=49.90$ мм) и “Г” (алюминиевый цилиндр с $L=D=40.30$ мм). По измеренным в [36] значениям $f_1^{(e)}=46142$ Гц и $f_1^{(Г)}=58321$ Гц они составили $\Omega_e^{(1)}=2.32715$ и $\Omega_f^{(1)}=2.32809$, что также находится в отличном соответствии с данными табл. 2 при соответствующей интерполяции по коэффициенту Пуассона ν .

В качестве четвертого примера использования применяемой методики определим постоянные алюминиевого цилиндра $L=101.1$ мм, $D=35.95$ мм [47]:

$$\begin{aligned} f_1 &= 23840 \text{ Гц}, & f_2 &= 45730 \text{ Гц}, \\ f_3 &= 66800 \text{ Гц}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $f_2/f_1=1.9182$ и на основании табл. 3 находим, что $\nu=0.392$, $f_3^{(\text{расч})}=f_1\Omega^{(3)}/\Omega^{(1)}=63286$ Гц. Этот результат не очень согласуется с экспериментальными данными. Было высказано предположение, что наблюдаемое различие связано с влиянием пьезодисков-возбудителей колебаний на торцах цилиндра. Однако учет их присоединенных масс по приближенной одномерной стержневой модели не дал ожидаемых поправок к частоте. Таким образом, причины указанного отклонения должны быть исследованы более детально.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описана экспериментально-теоретическая методика определения упругих постоянных материалов по первым двум резонансным частотам осесимметричных колебаний цилиндров конечной длины. Ее эффективность и высокая точность полученных результатов (ошибка в пределах 1 %) подтверждаются согласованием расчетных и экспериментальных данных, продемонстрированным на ряде примеров. Приведены основы для теоретического анализа задачи.

Сравнение, проведенное по частотам выше второй, указывает на высокую точность метода при условии точного определения частот в эксперименте.

Расчет собственных частот, основанный на применении метода [43], занимает существенно меньше компьютерного времени, чем способы, основанные на методе Рэлея–Ритца [37].

1. Schreiber E., Anderson O. L., Soga N. Elastic constants and their measurement.– New York: McGraw-Hill, 1973.– 196 p.

2. Деген П. А. Учение о звуке.– С.-Пб: Общественная польза, 1861.– 244 с.
3. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть I. Малые деформации.– М.: Наука, 1984.– 597 с.
4. Pickett G. Equations for computing elastic constants from flexural and torsional resonant frequencies of vibration of prism and cylinders // Proc. Amer. Soc. Test. Mater.– 1945.– **45**.– P. 846–865.
5. Tefft W. E. Numerical solution of the frequency equations for the flexural vibration of cylindrical rods // J. Res. Nat. Bur. Stand.– 1960.– **64B**.– P. 237–242.
6. Spinner S., Tefft W. E. A method for determining mechanical frequencies and for calculating elastic moduli from these equations // Proc. Amer. Soc. Test. Mater.– 1961.– **61**.– P. 1221–1237.
7. Spinner S., Reichard W. E., Tefft W. E. A comparison of experimental and theoretical relations between Young's modulus and the flexural and longitudinal frequencies of uniform bars // J. Res. Nat. Bur. Stand.– 1960.– **64A**.– P. 147–155.
8. Boileau P. E., Grenier M., Leach M. F. A modified resonance method for determining elastic moduli // NDT Int.– 1981.– April.– P. 43–48.
9. ASTM Standard C 623-92 (2005) Standard method of test for Young's modulus, shear modulus, and Poisson's ratio for glass and glass-ceramics by resonance.– West Conshohocken, PA: Amer. Soc. Test. Mater., 2005.– 7 p.
10. ASTM Standard C 747-93 (2005) Standard test method for moduli of elasticity and fundamental frequencies of carbon and graphic materials by sonic resonance.– West Conshohocken, PA: Amer. Soc. Test. Mater., 2005.– 8 p.
11. ASTM Standard C 215-02 (2002) Standard test method for fundamental transverse, longitudinal and torsional frequencies of concrete specimens.– West Conshohocken, PA: Amer. Soc. Test. Mater., 2002.– 7 p.
12. ASTM Standard C 848-88 (2006) Standard test method for Young's modulus, shear modulus, and Poisson's ratio for ceramic whitewires by resonance.– West Conshohocken, PA: Amer. Soc. Test. Mater., 2006.– 7 p.
13. Hutchinson J. R. Axisymmetric vibrations of a free finite-length rod // J. Acoust. Soc. Amer.– 1972.– **51**.– P. 233–240.
14. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Высокочастотные осесимметричные колебания круглых дисков // Прикл. мех.– 1976.– **12**, N 12.– С. 60–68.
15. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины // Акуст. ж.– 1978.– **24**.– С. 861–866.
16. Hutchinson J. R. Vibrations of solid cylinders // Trans. ASME. J. Appl. Mech.– 1980.– **47**.– P. 901–907.
17. Ebenezer D. D., Ravichandran K., Padmanabhan C. Forced vibrations of solid elastic cylinders // J. Sound Vib.– 2005.– **282**.– P. 991–1007.
18. Чернышев К. В., Шерай В. В. Собственные колебания твердых цилиндров конечной длины // Акуст. ж.– 1977.– **23**.– С. 627–631.
19. Kari L. Erratum to “Axially symmetric modes in finite cylinders – the wave guide solution [Wave Motion, **36** (2002), 169–184]” // Wave Motion.– 2003.– **37**.– P. 1901–206.

20. Puckett A. D., Peterson M. L. A semi-analytical model for predicting multiple propagating axially symmetric modes in cylindrical waveguides // *Ultrasonics*.– 2005.– **43**.– P. 197–207.
21. Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1972.– **51**.– P. 263–283.
22. Rumerman M., Raynor S. Natural frequencies of finite circular cylinders in axially symmetric longitudinal vibration // *J. Sound Vib.*– 1971.– **15**.– P. 529–543.
23. Leissa A. W., So J. Comparisons of vibration frequencies for rods and beams from one-dimensional and three-dimensional analysis // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1995.– **98**.– P. 2122–2135.
24. Leissa A. W., So J. Accurate vibration frequencies of circular cylinders from three-dimensional analysis // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1995.– **98**.– P. 2136–2141.
25. Nieves F. J., Bayón A., Gascón F. Optimization of the Ritz method to calculate axisymmetric natural vibration frequencies of cylinders // *J. Sound Vib.*– 2008.– **311**.– P. 588–596.
26. Leissa A. W. The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods // *J. Sound Vib.*– 2005.– **287**.– P. 961–978.
27. Ilanko S. Comments on the historical bases of the Rayleigh and Ritz methods // *J. Sound Vib.*– 2008.– **319**.– P. 731–733.
28. Ritz W. Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern // *Ann. Physik (5. Folge)*.– 1909.– **28**.– P. 737–786.
29. Hutchinson J. R. Comments on “Comparisons of vibration frequencies for rods and beams from one-dimensional and three-dimensional analysis” [J. Acoust. Soc. Amer., **98**, 2122–2135 (1995)] // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1996.– **100**.– P. 1890–1892.
30. Leissa A. W., So J. Response to “Comments on ‘Comparisons of vibration frequencies for rods and beams from one-dimensional and three-dimensional analysis’” [J. Acoust. Soc. Amer., **100**, 1890–1892 (1996)] // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1996.– **100**.– P. 1893.
31. Hutchinson J. R. Comments on “Accurate vibration frequencies of circular cylinders from three-dimensional analysis” [J. Acoust. Soc. Amer., **98**, 2136–2141 (1995)] // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1996.– **100**.– P. 1894–1895.
32. Leissa A. W., So J. Response to “Comments on ‘Accurate vibration frequencies of circular cylinders from three-dimensional analysis’” [J. Acoust. Soc. Amer., **100**, 1894–1895 (1996)] // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1996.– **100**.– P. 1896.
33. Nieves F. J., Gascón F., Bayón A. Estimation of the elastic constants of a cylinder with a length equal to its diameter // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1998.– **104**.– P. 176–180.
34. Nieves F. J., Gascón F., Bayón A. Precise and direct determination of the elastic constants of a cylinder with a length equal to its diameter // *Rev. Sci. Instr.*– 2000.– **71**.– P. 2433–2439.
35. Nieves F. J., Gascón F., Bayón A. Measurement of the dynamic elastic constants of short isotropic cylinders // *J. Sound Vib.*– 2003.– **265**.– P. 917–933.
36. Nieves F. J., Gascón F., Bayón A. On the natural frequencies of short cylinders and the universal point. Direct determination of the shear modulus // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 2004.– **115**.– P. 2928–2936.
37. Nieves F. J., Gascón F., Bayón A. An analytical, numerical, and experimental study of the axisymmetric vibrations of a short cylinder // *J. Sound Vib.*– 2008.– **313**.– P. 617–630.
38. Bayón A., Gascón F., Varadé A. Measurement of the longitudinal and transverse vibration frequencies of a rod by speckle interferometry // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Control.*– 1993.– **40**.– P. 265–269.
39. Bayón A., Varadé A., Gascón F. On acoustical longitudinal vibration modes of finite cylinders // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1994.– **96**.– P. 1539–1548.
40. Bayón A., Varadé A., Gascón F. Determination of the elastic constants of isotropic solids by optical heterodyne interferometry // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1994.– **96**.– P. 2589–2592.
41. Bayón A., Varadé A., Gascón F. Elastic characterization of isotropic materials by a single test based on the experimental determination of natural frequencies using laser interferometry // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1997.– **101**.– P. 1990–1993.
42. Nieves F. J., Gascón F., Bayón A. A multiple frequency in the two lowest axisymmetric vibration modes of a short cylinder // *J. Sound Vib.*– 2002.– **251**.– P. 741–749.
43. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
44. Chree C. Longitudinal vibrations of a circular bar // *Quart. J. Pure Appl. Math.*– 1886.– **21**.– P. 287–298.
45. Lamb H. On waves in an elastic plate // *Proc. Roy. Soc. Lond.*– 1917.– **A93**.– P. 114–128.
46. Yang W., Li Z.-M., Shi W., Xie B.-H., Yang M.-B. On auxetic materials // *J. Mater. Sci.*– 2004.– **39**.– P. 3269–3279.
47. Андрущенко В., Лібов Д., Якименко М. Дослідження спектрів пружних коливань коротких суцільних циліндрів // *Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. Математика, механіка*.– 2008.– **20**.– С. 91–95.