

УДК 534.232

НОВЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ АКУСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ИЗЛУЧАТЕЛЯ ЗВУКА В ВИДЕ ДИСКА

И. В. ВОВК*, В. Т. ГРИНЧЕНКО*, В. Т. МАЦЫПУРА**

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

**Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Получено 03.04.2008

На основе обобщенного метода частичных областей исследованы локальные и интегральные акустические свойства излучателей звука, содержащих колеблющийся диск. Рассмотрены случаи, когда диск размещен в различных по форме и свойствам экранах или без экрана.

На базі узагальненого методу часткових областей досліджені локальні й інтегральні акустичні властивості випромінювачів звуку, які містять диск, що коливається. Розглянуті випадки, коли диск розміщено в різних за формою й властивостями экранах або без экрана.

The local and integral acoustic properties of sound radiators containing the vibrating disk are studied on the basis of generalized method of partial domains. The following cases are considered: the disk is placed to screens with various shape and properties, or the disk is without a screen.

ВВЕДЕНИЕ

Задача об излучении звука круглым диском занимает особое место в акустике. Указать время, когда она впервые была сформулирована, сейчас вряд ли возможно, однако известно, что уже во времена Рэля она вызывала несомненный интерес и ученый уделил ей большое внимание [1]. Позже к этой тематике неоднократно обращались многие известные акустики. Прежде всего, следует упомянуть такие имена, как Мак-Лаклен, Н. Stenzel (Стенцель), Л. Я. Гутин, Е. Т. Hanson (Хансон), С. Н. Ржевкин, Е. Л. Шендеров [2–7].

Правомерен вопрос: в чем причина уже более чем 150-летней актуальности этой проблемы? Как нам представляется, это обусловлено двумя обстоятельствами.

Во-первых, во многих практических ситуациях поле, создаваемое некоторыми колеблющимися элементами акустических приборов, вполне удовлетворительно может быть представлено как поле круглого колеблющегося диска. Сюда следует отнести диффузоры широко используемых в воздушной акустике электромагнитных, электродинамических и электростатических громкоговорителей [2, 8, 9]; стержневые и пластинчатые пьезокерамические преобразователи гидроакустических антенн [10], входящих в состав гидроакустических станций различного назначения. Кроме того, данные об акустическом излучении диска часто используются для оценок полей, создаваемых вибрирующими поверхностями различных строительных конструкций, машин и механизмов.

Во-вторых, обсуждаемая задача обладает большой физической и математической содержательностью, а изучение ближнего и дальнего полей, излучаемых диском, весьма позволяет продемонстрировать интересные особенности такого сложного волнового процесса как дифракция звука. И, наконец, в силу того, что круглый диск имеет сравнительно простую геометрию, задача об излучении звука этим объектом нередко используется как тестовая при сравнении эффективности различных способов ее решения.

Остановимся кратко на существующих методах решения задачи об излучении звука круглым диском, который вмонтирован без зазора в бесконечный неподвижный плоский экран (т. е. колебательная скорость на поверхности экрана считается равной нулю). Обычно полагают, что диск – плоский и бесконечно тонкий объект, лишенный массы и изгибной жесткости. Экран с диском расположены в идеальной акустической среде, обладающей плотностью ρ и скоростью звука c . Поверхность диска совершает гармонические колебания с частотой ω и амплитудная функция для колебательной скорости может быть определена выражением

$$v_n(S) = v_0 g(S), \quad (1)$$

где индекс n указывает направление внешней нормали к поверхности диска; v_0 – максимальное значение колебательной скорости; $g(S)$ – нормированная к v_0 функция, определяющая распределение колебаний по поверхности S .

Наиболее простая и хорошо изученная ситуация

соответствует постоянной амплитуде – $g(S) = 1$. В этом случае, диск зачастую определяют термином “поршневая диафрагма” или просто “поршень” [6]. Звуковое поле, создаваемое поршнем произвольной формы, можно найти на основе принципа Гюйгенса. Строгое аналитическое представление для звукового давления на основе этого принципа дается так называемым интегралом Кирхгофа [11, 12]:

$$p(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{\partial p}{\partial n} \frac{\exp(ikr)}{r} - p \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp(ikr)}{r} \right) \right) dS. \quad (2)$$

Здесь $p(M)$ – давление в точке наблюдения M ; r – расстояние от M до элемента dS поверхности поршня; $k = \omega/c$ – волновое число.

К сожалению, использовать формулу (2) для конкретных расчетов звуковых полей весьма затруднительно, поскольку для этого на излучающей поверхности нужно одновременно задать давление и колебательную скорость. В таком случае говорят, что задача “переопределена” [12]. Однако Рэлей показал, что при размещении поршня в бесконечном жестком экране выражение (2) сводится к следующему интегралу (интегралу Рэля):

$$p(M) = -\frac{i\omega\rho}{2\pi} v_0 \int_S g(S) \frac{\exp(ikr)}{r} dS. \quad (3)$$

При произвольной форме поршня и произвольном распределении скорости по его поверхности соотношение (3) допускает только численный анализ с применением ЭВМ. Однако для круглого поршня с равномерным распределением скорости двойной интеграл по поверхности в формуле (3) можно представить в виде однократного интеграла по границе поршня [6, 7]. Именно на основе этого Рэлей получил простое аналитическое выражение для импеданса излучения круглого поршня [1]:

$$Z_n^{(R)} = \rho c S \left(1 - \frac{2J_1(2ka)}{2ka} - i \frac{2S_1(2ka)}{2ka} \right), \quad (4)$$

известное как формула Рэля. Здесь $J_1(2ka)$ – функция Бесселя; $S_1(2ka)$ – функция Струве; $S = \pi a^2$; a – радиус поршня. Заметим, что значительно позже удалось получить относительно простые формулы и для оценки поля излучения квадратного поршня [13].

Уместно сказать, что задача об излучении поршня, размещенного в жестком бесконечном экране математически полностью эквивалентна задаче об

излучении пульсирующего поршня без экрана, что с очевидностью следует из симметрии постановки. Под пульсирующим поршнем понимается бесконечно тонкий диск, на обеих поверхностях которого заданы одинаковые по величине, но противоположно направленные колебательные скорости.

Следует также отметить работы Мак-Лаклена [2] и особенно Стенцеля [3], которые в конце 1930-х годов выполнили громадную вычислительную работу по расчету ближнего поля, создаваемого круглым поршнем. Эти данные во многом определили прогресс в области создания гидроакустических антенн для средств обнаружения в период Второй мировой войны и непосредственно после нее.

Совершенно иной подход для оценки поля пульсирующего и осциллирующего поршня (без экранов) применили в этот же период Хансон и Гутин [4, 5]. Под осциллирующим поршнем понимается бесконечно тонкий диск, на обеих поверхностях которого заданы одинаковые по величине и направлению колебательные скорости. Соответственно, задача об излучении такого поршня в силу условия антисимметрии математически эквивалентна задаче об излучении поршня, размещенного в бесконечном акустически мягком экране (т. е. экране, на поверхности которого акустическое давление равно нулю). Хансон и Гутин использовали решение уравнения Гельмгольца в сфероидальной системе координат для частного вырожденного случая, когда одна из осей сфероиды стремится к нулю (так называемая система сплюснутых сфероидальных координат [14]). В рамках метода собственных функций эти авторы получили выражения для импеданса излучения и звукового поля, создаваемого пульсирующим или осциллирующим поршнями, в форме рядов по сфероидальным функциям. В частности, в свое время Гутин с достаточной для практики точностью сумел вычислить импеданс излучения вплоть до волнового значения диаметра поршня, равного примерно 1.3. Однако дальнейшего развития этот подход не получил в силу определенной сложности работы со сфероидальными функциями.

Наконец, относительно недавно (в 1989 году) Шендеровым был применен еще один подход к решению задачи об излучении звука осциллирующим поршнем [7], состоящий в использовании интегрального преобразования Ханкеля и последующего приведения исходной задачи к необходимости решения парных интегральных уравнений в бесконечных пределах относительно неизвестной функции звукового давления. В конечном итоге,

путем замены интегральных уравнений суммами по известному правилу Симпсона удалось получить приближенное численное решение исходной задачи. Важное достоинство предложенного подхода – возможность рассматривать случаи, когда распределение колебательной скорости по поверхности поршня не является равномерным. Например, Шендеров оценил поле излучения круглой мембраны, закрепленной по краю и колеблющейся на своей первой моде [7].

Завершая анализ литературных источников, можно заключить, что каждый из рассмотренных выше подходов к решению задачи об излучении звука круглым поршнем весьма интересен, содержит свои достоинства и недостатки.

Цель этого исследования состоит в разработке эффективного подхода, позволяющего с единых методических позиций находить решения большого класса задач, в которых главным элементом является колеблющийся поршень или диск. В его основе лежит метод частичных областей, который применительно к задачам акустики подробно описан в работах [15, 16]. При этом никаких ограничений на характер распределения колебательной скорости по поверхности не накладывается. Ниже будет рассмотрен ряд задач, иллюстрирующих потенциальные возможности предлагаемого подхода при анализе излучения звука диском, “встроенным” в различные по форме и акустическим свойствам экраны.

1. ДИСК В БЕСКОНЕЧНОМ ЭКРАНЕ

Пусть диск с радиусом a , расположенный в бесконечном акустически жестком или мягком экране (рис. 1), совершает гармонические колебания с частотой ω , а распределение амплитуды колебательной скорости на его поверхности определяется формулой (1). Временной множитель, принятый в форме $\exp(-i\omega t)$, в дальнейшем будет опущен.

Расположим в центре диска начало сферической (r, θ, ψ) и цилиндрической систем координат. Согласно методу частичных областей [15, 16], всю область существования звукового поля разобьем на две области:

$$\text{I} - r \leq a, \quad \theta = [0, \pi/2], \quad \psi = [0, 2\pi];$$

$$\text{II} - r > a, \quad \theta = [0, \pi/2], \quad \psi = [0, 2\pi].$$

В каждой из областей поле давления представим в виде суперпозиции частных решений уравнения Гельмгольца для комплексной амплитуды давления. Полагая, что рассматриваемая задача симметрична относительно плоскости ROz , поле в обла-

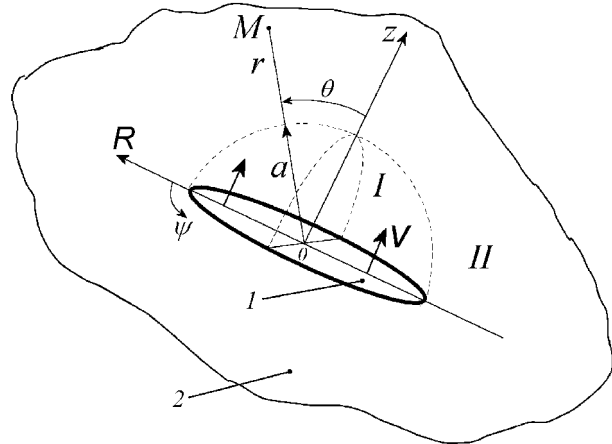


Рис. 1. Диск 1 в бесконечном плоском экране 2 (общий случай)

сти II зададим в виде

$$p_{\text{II}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{m\nu_n} h_{\nu_n}^{(1)}(kr) P_{\nu_n}^{(m)}(\cos \theta) \cos(m\psi), \quad (5)$$

где $h_{\nu_n}^{(1)}(kr)$ – сферические функции Ханкеля первого рода; $P_{\nu_n}^{(m)}(\cos \theta)$ – присоединенные функции Лежандра первого рода [14]. Выбор величины индекса ν_n , а именно, $\nu_n = 2n$ или $\nu_n = 2n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), определяется граничным условием на поверхности соответственно жесткого или мягкого экрана и значением индекса $m = 0, 1, 2, \dots$. Решение (5) является общим для области II, поскольку выбранный набор угловых функций обладает полнотой и ортогональностью на поверхности $\theta = [0, \pi/2]$, $\psi = [0, 2\pi]$, $r \geq a$, а подбором коэффициентов $B_{m\nu_n}$ можно удовлетворить условия сопряжения звуковых полей на границе областей I и II.

Поле в области I можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$p_{\text{I}} = p_{\text{I}}^{(1)} + p_{\text{I}}^{(2)}. \quad (6)$$

По аналогии с выражением (5), составляющую $p_{\text{I}}^{(1)}$ запишем в виде

$$p_{\text{I}}^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m\nu_n} j_{\nu_n}(kr) P_{\nu_n}^{(m)}(\cos \theta) \cos(m\psi), \quad (7)$$

где $j_{\nu_n}(kr)$ – сферические функции Бесселя первого рода. Как и выше, выбор значений индекса ν_n

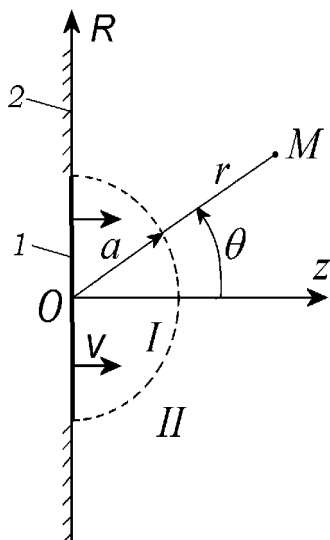


Рис. 2. Диск 1 в бесконечном плоском экране 2 (осесимметричный случай)

определяется граничными условиями на поверхности диска и величиной m . В качестве радиальных функций в формуле (7) используются сферические функции Бесселя первого рода, которые описывают стоячие волны в ограниченной области I и обеспечивают конечность давления в точке $r=0$.

Что касается компоненты $p_I^{(2)}$, то ее целесообразно представить в виде суперпозиции распространяющихся и неоднородных волн, уходящих от поверхности диска вдоль оси Oz :

$$p_I^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} J_m(\mu_n^{(m)} R) \times \exp\left(i\sqrt{k^2 - (\mu_n^{(m)})^2} z\right) \cos(m\psi). \quad (8)$$

Здесь величины $\mu_n^{(m)}$ находятся из решения уравнения $J'_m(x) \equiv dJ_m(x)/dx = 0$ при $x = \mu_n^{(m)} a$; $m=0, 1, 2, \dots$; $n=1, 2, \dots$; a – радиус диска. Составляющая $p_I^{(2)}$ в совокупности с составляющей $p_I^{(1)}$ позволяет удовлетворить условиям сопряжения звуковых полей на границе областей I и II и обеспечить выполнение граничного условия (1) на поверхности диска

$$\left. \frac{\partial p_I^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=0} + \left. \frac{\partial p_I^{(2)}}{\partial z} \right|_{z=0} = v_z(S). \quad (9)$$

Искомые коэффициенты $A_{m\nu_n}$, $B_{m\nu_n}$ и C_{mn} в выражениях (5), (7) и (8) определяются из системы

функциональных уравнений, объединяющих граничное условие (9) и следующие условия сопряжения звуковых полей на границе раздела частичных областей I и II:

$$p_I = p_{II}, \quad r = a, \quad \theta = [0, \pi/2], \quad \psi = [0, 2\pi], \quad (10)$$

$$\frac{\partial p_I}{\partial r} = \frac{\partial p_{II}}{\partial r}, \quad r = a, \quad \theta = [0, \pi/2], \quad \psi = [0, 2\pi]. \quad (11)$$

Подставив в условия (9)–(11) выражения (5), (7) и (8) и используя свойство полноты и ортогональности соответствующих в них угловых функций, приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_{m\nu_n}$, $B_{m\nu_n}$ и C_{mn} . Более подробные сведения о процедуре алгебраизации подобных систем можно найти, например, в [16].

Полученная бесконечная система линейных алгебраических уравнений может быть решена методом редукции. При этом сходимость решения определяется в ходе численного эксперимента при исследовании условий сопряжения звуковых полей на границе областей I и II. Такая процедура качественного контроля достаточно стандартна и неоднократно описывалась в литературе [15, 16]. Поэтому конкретный вид алгебраических систем, сопутствующих решению задач, мы приводить не будем.

После построения общего решения задачи дальнейшее исследование проведем для частных случаев, имеющих практический интерес. Пусть колебательная скорость одинакова на всей поверхности диска (поршня) – $v_z(S) = v_0$. В этом случае задача становится осесимметричной, ее достаточно рассматривать только в плоскости ROz (рис. 2), а представление для звуковых полей в частичных областях I и II существенно упрощается:

$$p_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n h_{\nu_n}^{(1)}(kr) P_{\nu_n}(\cos \theta), \quad (12)$$

$$p_I = \sum_{n=0}^{\infty} A_n j_{2n}(kr) P_{2n}(\cos \theta) + \rho c v_0 \exp(ikr \cos \theta), \quad (13)$$

где $\nu_n = 2n$ для акустически жесткого экрана и $\nu_n = 2n + 1$ для акустически мягкого экрана, $n = 0, 1, 2, \dots$

Вначале исследуем сходимость полученного решения, определив невязку при выполнении условий сопряжения звуковых полей на границе областей I и II. Средние значения невязок по давлению и колебательной скорости

$$\delta_p = \frac{p_I - p_{II}}{|p_{II}|}, \quad \delta_v = \frac{v_{rI} - v_{rII}}{|v_{rII}|}$$

Таблиця. Величини невязок по давлению, скорости и мощности, вычисленных на границе областей I и II

Невязка	Жесткий экран		Мягкий экран	
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 10$	$N = 20$
$ \operatorname{Re} \delta_p $	10^{-9}	$5 \cdot 10^{-15}$	0.016	0.009
$ \operatorname{Im} \delta_p $	0.012	0.003	0.024	0.01
$ \operatorname{Re} \delta_v $	$2 \cdot 10^{-9}$	10^{-14}	0.022	0.02
$ \operatorname{Im} \delta_v $	0.003	0.0007	0.032	0.022
$ \delta_P $	10^{-7}	$5 \cdot 10^{-14}$	10^{-3}	10^{-4}

на границе областей I и II приведены в таблице (расчет при $ka=7$). Значение N задает верхний индекс суммирования при редукции бесконечной системы. Следует отметить, что у края диска ($r=a$, $\theta=90^\circ$) невязка несколько возрастает, особенно для акустически мягкого экрана. В рамках рассматриваемой математической модели этот результат совершенно естественен и прогнозируем. Приведенные расчеты дают представление о точечной сходимости построенного решения в ближнем поле диска.

Обратимся к интегральной оценке процесса сходимости, путем сравнения акустической мощности на поверхности диска \mathcal{P}_1 (область I) и акустической мощности в дальнем поле диска \mathcal{P}_2 (область II). Как видно из таблицы, в которой представлены расчеты для невязки по мощности

$$\delta_P = \frac{\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_2},$$

аналогичные данным по δ_p и δ_v , наблюдается вполне удовлетворительная сходимость построенного решения по этому критерию.

Перейдем к анализу численных данных о характеристиках звукового поля диска. На рис. 3, а и б показаны графики зависимости амплитуды нормированного давления $\tilde{p} = |p|/(\rho c v_0)$ вдоль оси z при малом ($ka=1$) и достаточно большом ($ka=7$) волновом радиусе диска. Кривые 1 отвечают ситуации с акустически жестким, а кривые 2 – с акустически мягким экраном. Точки соответствуют расчету по полученной Рэлеем формуле (14) для амплитуды давления на оси диска в акустически жестком экране [6]:

$$\frac{|p|}{\rho c v_0} = \left| 2 \sin \left(\frac{\sqrt{(ka)^2 + (kz)^2} - kz}{2} \right) \right|. \quad (14)$$

Очевидно, что два варианта расчета амплитуды давления на оси диска в акустически жестком экране совпадают с графической точностью.

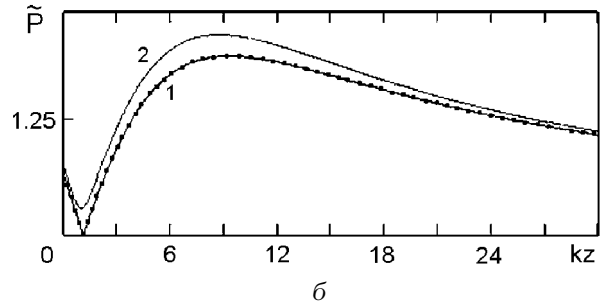
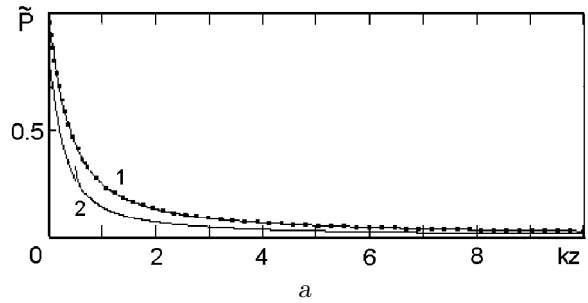


Рис. 3. Распределение звукового давления вдоль оси диска (маркеры – расчет по формуле (14)):

$a - ka=1$; $б - ka=7$;

1 – жесткий экран;

2 – мягкий экран

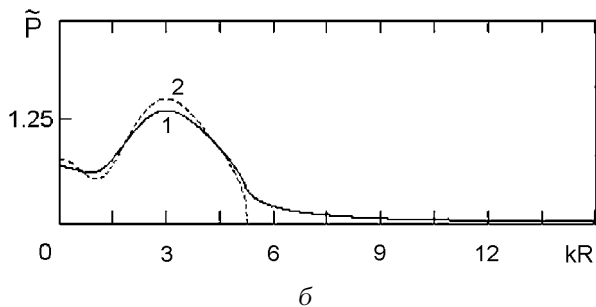
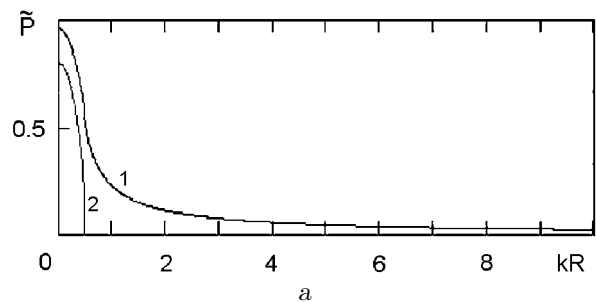


Рис. 4. Распределение звукового давления вдоль поверхности диска и экрана:

$a - ka=1$; $б - ka=7$;

1 – жесткий экран;

2 – мягкий экран

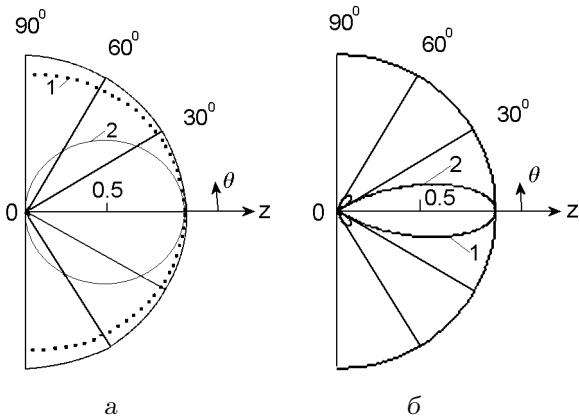


Рис. 5. Диаграммы направленности диска в экране:
 а - $ka=1$; б - $ka=7$;
 1 - жесткий экран; 2 - мягкий экран

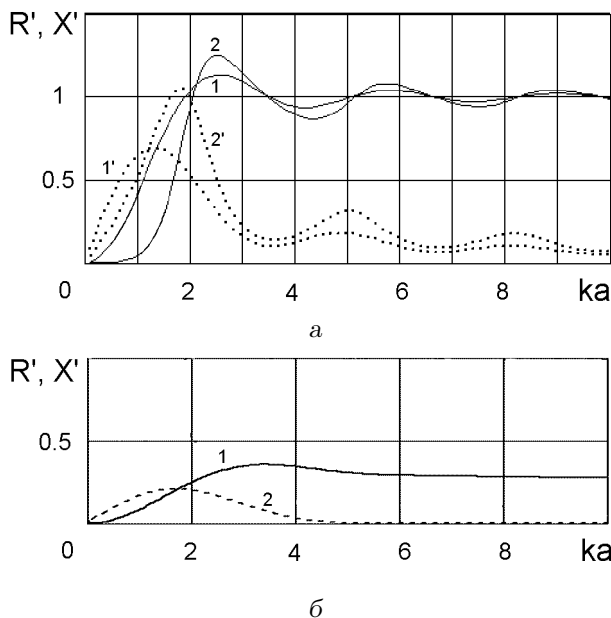


Рис. 6. Безразмерный импеданс излучения диска в бесконечном экране:

а - для $v(S)=v_0$; б - для $v(S)=v_0 J_0(\eta r/a)$, $\eta=0.7655\pi$;
 1, 2 - действительные части; 1', 2' - мнимые части;
 1, 1' - жесткий экран; 2, 2' - мягкий экран

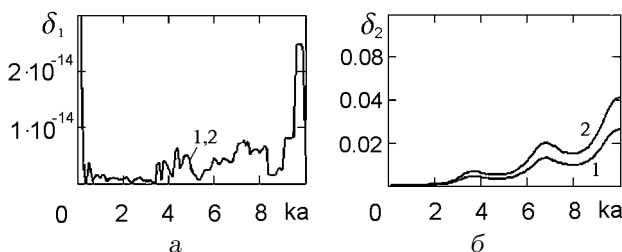


Рис. 7. Величина невязки между нашими данными и расчетом по формуле Рэлея (4):
 1 - при $N=25$; 2 - при $N=20$

На рис. 4 показаны аналогичные результаты для амплитуды давления вдоль поверхности диска и экрана.

На рис. 5 приведены диаграммы направленности по давлению при двух величинах ka . При малом волновом размере диска $ka=1$ (см. рис. 5, а) формы диаграмм существенно зависят от свойств экрана. Если при жестком экране диск практически ненаправлен (т. е. излучает как монополь), то при мягком направленность излучения существенна и соответствует диполю. При увеличении ka (см. рис. 5, б) диаграммы направленности практически совпадают для обоих вариантов экрана. Эти хорошо известные факты [6, 7] обусловлены тем, что при достаточно большом волновом радиусе диска звуковая энергия в дальнем поле концентрируется в области осевого направления. Как следствие, влияние свойств экрана становится незначительным.

Обратимся теперь к такой важной интегральной характеристике процесса излучения звука как импеданс излучения. Как известно [7], он определяется выражением

$$Z_{из} = \frac{1}{|\tilde{v}|^2} \int_S p v^* dS. \quad (15)$$

Здесь \tilde{v} - колебательная скорость поверхности диска в точке приведения; v^* - комплексно-сопряженное значение колебательной скорости v . Нетрудно показать, что в нашем случае импеданс излучения задается относительно простой формулой:

$$Z_{из} = \rho c S \left(1 + \frac{2}{(ka)^2} \times \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_{2n}(0) \int_0^{ka} j_{2n}(\xi) \xi d\xi \right). \quad (16)$$

На рис. 6, а показаны действительная $R' = \text{Re}(Z_{из}/\rho c S)$ и мнимая $X' = \text{Im}(Z_{из}/\rho c S)$ части безразмерного импеданса излучения поршня в акустически жестком и мягком экранах как функции волнового радиуса диска ka . На рис. 6, б представлены аналогичные зависимости для ситуации, когда распределение колебательной скорости на поверхности диска, расположенного в жестком экране, соответствует первой моде колебаний круглой мембраны с закрепленным контуром: $v(r, \theta=\pi/2) = v_0 J_0(\eta r/a)$. Параметр η определяется как первый корень уравнения $J_0(\eta)=0$ и его значение составляет $\eta=0.7655\pi$. Сравнивая рис. 6, а и б, видим, что уровень компонент импеданса излучения в случае мембранного

характера колебаний диска существенно меньше, чем при его поршневом движении.

Интересно сравнить, насколько приведенный выше нами расчет импеданса излучения диска в бесконечном жестком экране на основе соотношения (16) близок к результату, полученному по формуле Рэлея (4). В качестве иллюстрации на рис. 7, а и б показаны зависимости невязки вещественной и мнимой частей $Z_{и}$ как функции волнового радиуса диска ka соответственно:

$$\delta_1 = \left| \frac{\operatorname{Re}(Z_{и} - Z_{и}^{(R)})}{\operatorname{Re} Z_{и}^{(R)}} \right|, \quad \delta_2 = \left| \frac{\operatorname{Im}(Z_{и} - Z_{и}^{(R)})}{\operatorname{Im} Z_{и}^{(R)}} \right|$$

(верхний индекс (R) означает, что импеданс вычислялся по формуле Рэлея). Как видно, невязка определяется мнимыми частями $Z_{и}$, а ее величина достаточно быстро уменьшается при увеличении верхней границы индекса суммирования N в редуцированном выражении (16).

2. ДИСК В ПОЛУСФЕРИЧЕСКОМ ЭКРАНЕ

Рассмотрим ситуацию, когда диск размещен в экране конечных размеров. Например, практический интерес представляет диск, ограниченный полусферой того же радиуса (рис. 8) с акустически жесткой или мягкой поверхностью. Скорость на поверхности диска будем считать равномерной – $v_z(S) = v_0$. Очевидно, что если находясь в бесконечном экране (см. рис. 2), диск излучал только в полупространство, то в рассматриваемой ситуации он “озвучивает” уже все пространство. Поэтому область II теперь представляет собой внешность сферы радиуса a . Учитывая это, для поля в области II следует записать выражение

$$p_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta). \quad (17)$$

Как и ранее, поле в области I задается формулой (13).

Функциональная система уравнений, определяющая условия сопряжения звуковых полей на границе частичных областей I и II, для случая с жесткой полусферой имеет следующий вид:

$$p_I = p_{II}, \quad r = a, \quad \theta = [0, \pi/2], \quad \psi = [0, 2\pi]; \quad (18)$$

$$\frac{\partial p_{II}}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial p_I}{\partial r}, & r = a, \quad \theta = [0, \pi/2], \quad \psi = [0, 2\pi]; \\ 0, & r = a, \quad \theta = [\pi/2, \pi], \quad \psi = [0, 2\pi]. \end{cases} \quad (19)$$

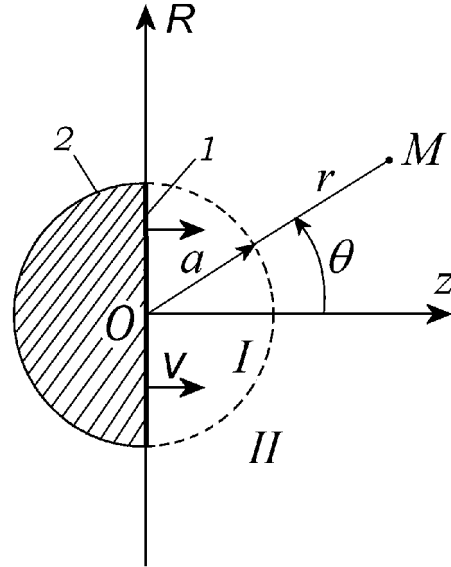


Рис. 8. Диск I в полусферическом экране 2

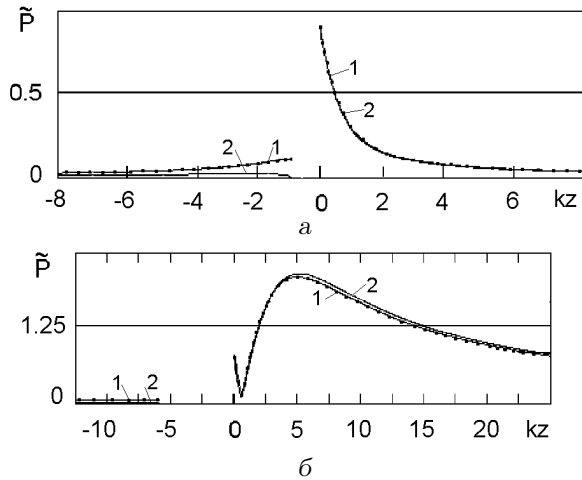


Рис. 9. Распределение нормированного звукового давления вдоль оси диска в полусферическом экране: а – $ka=1$; б – $ka=7$;

1 – жесткая полусфера; 2 – мягкая полусфера

Для случая с мягкой полусферой ее следует писать так:

$$p_{II} = \begin{cases} p_I, & r = a, \quad \theta = [0, \pi/2], \quad \psi = [0, 2\pi], \\ 0, & r = a, \quad \theta = [\pi/2, \pi], \quad \psi = [0, 2\pi]; \end{cases} \quad (20)$$

$$\frac{\partial p_I}{\partial r} = \frac{\partial p_{II}}{\partial r}, \quad r = a, \quad \theta = [0, \pi/2], \quad \psi = [0, 2\pi]. \quad (21)$$

Ниже представлена серия расчетов, аналогичных проделанным для диска в бесконечном экране. На рис. 9 показано распределение амплитуды давления вдоль оси диска, а на рис. 10 –

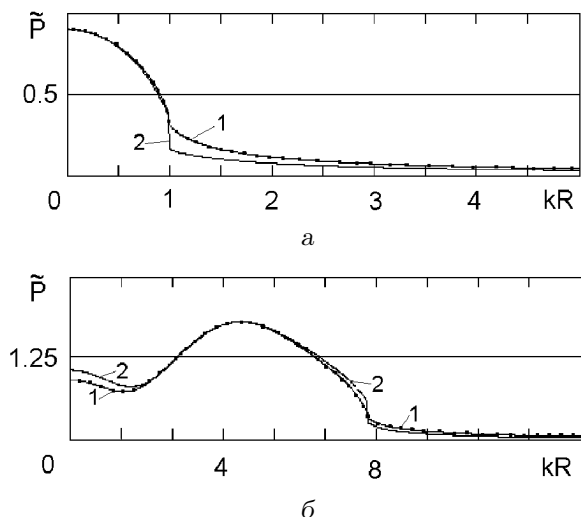


Рис. 10. Распределение нормированного звукового давления вдоль поверхности диска в полусферическом экране:
 а - $ka=1$; б - $ka=7$;
 1 - жесткая полусфера; 2 - мягкая полусфера

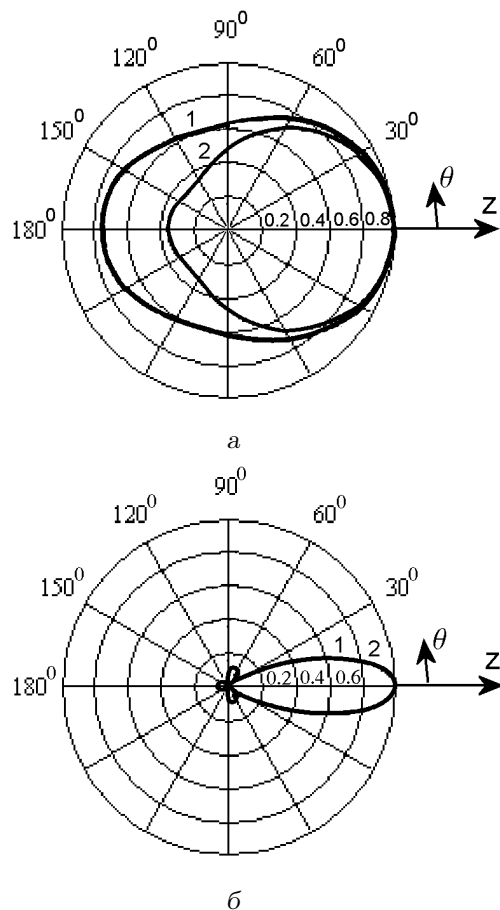


Рис. 11. Диаграмма направленности диска в полусферическом экране:
 а - $ka=1$; б - $ka=7$;
 1 - жесткая полусфера; 2 - мягкая полусфера;

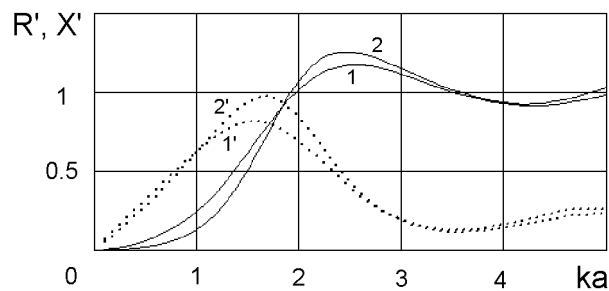


Рис. 12. Нормированный импеданс излучения диска в полусферическом экране:
 1, 2 - действительная часть; 1', 2' - мнимая часть;
 1, 1' - жесткая полусфера; 2, 2' - мягкая полусфера

вдоль его поверхности. Сравнивая эти графики с рис. 3 и 4, видим, что изменение акустических свойств плоского экрана влияет на ближнее поле диска в большей степени, нежели соответствующее изменение свойств поверхности полусферы.

На рис. 11 представлены диаграммы направленности диска в полусферическом экране. Как видно, при его малом волновом размере (см. рис. 11, а) влияние свойств экрана существенно – для акустически мягкой полусферы направленные свойства выражены значительно сильнее, чем в случае жесткой полусферы (в частности, тыльный лепесток при мягком экране оказался почти в два раза ниже). При этом диаграммы для диска на полусфере и в бесконечном экране существенно различаются (сравни рис. 11, а и 5, а). При достаточно большом волновом радиусе ($ka=7$, рис. 11, б) свойства полусферы практически не имеют значения и диаграммы направленности весьма близки к диаграммам направленности диска в бесконечном плоском экране (сравни рис. 11, б и рис. 5, б).

Импеданс излучения диска на полусфере как функция волнового радиуса ka представлен на рис. 12. Сравнивая эти зависимости с аналогичными графиками для диска в бесконечном экране (см. рис. 6, а), следует отметить, что общий характер кривых в обоих случаях сходен. В то же время, в области небольших волновых величин ($ka \leq 2$) наблюдается некоторая специфика: для диска в бесконечном плоском акустически жестком и мягком экранах вещественные части Z_{in} существенно различаются, а для диска на полусфере они близки.

3. ДИСК В КОНЕЧНОМ КОЛЬЦЕВОМ ЭКРАНЕ

Как мы уже видели, в качестве излучателя звука осциллирующий диск в области $ka \leq 2$ менее эффективен, чем пульсирующий. Этот хорошо известный из литературы и практической электроакустики [2, 7–9]) факт связан с тем, что на разных поверхностях осциллирующего объекта давление имеет противоположные знаки. За счет этого возникает волновой эффект, известный как акустическое короткое замыкание [6, 8, 9], приводящий к значительному снижению импеданса излучения. Поэтому такие приборы как электродинамический излучатель звука, диффузор которого совершает осциллирующие колебания, размещают в экранах. Как следствие, ослабляется эффект акустического короткого замыкания и повышается импеданс излучения системы на низких частотах и ее эффективность в целом. Ниже на примере осциллирующего диска мы рассмотрим степень влияния кольцевого акустически жесткого экрана на его импеданс излучения.

Пусть осциллирующий диск, совершающий поршневое движение, расположен в кольцевом экране (рис. 13), внешний радиус которого равен b , а внутренний – радиусу диска a . Для осциллирующего диска поверхность $\theta = \pi/2$, $\psi = [0, 2\pi]$, $r > b$ (штриховые линии на рис. 13) является акустически мягкой. Тогда естественным образом возникают три частичные области:

- I – $r \leq a$, $\theta = [0, \pi/2]$;
- II – $a < r < b$, $\theta = [0, \pi/2]$;
- III – $r \geq b$, $\theta = [0, \pi/2]$.

Поле давления в области III определяется формулой (12), а в области I – формулой (13). Поскольку область II ограничена двумя поверхностями, $\theta = [0, \pi/2]$, $r = a$ и $\theta = [0, \pi/2]$, $r = b$, поле в ней следует записать в виде двух наборов частных решений уравнения Гельмгольца:

$$p_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n j_{2n}(kr) P_{2n}(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} D_n y_{2n}(kr) P_{2n}(\cos \theta). \quad (22)$$

Здесь $y_{2n}(kr)$ – сферические функции Бесселя второго рода.

Функциональная система уравнений, определяющая условия шивания звуковых полей на границах частичных областей, имеет вид

$$p_I = p_{II}, \quad r = a, \quad \theta = [0, \pi/2], \quad \psi = [0, 2\pi], \quad (23)$$

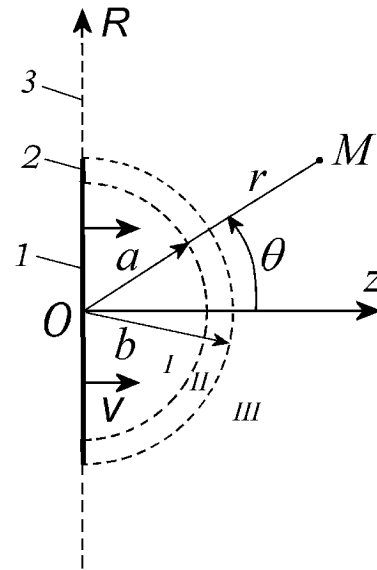


Рис. 13. Осциллирующий диск в кольцевом экране конечных размеров: 1 – диск; 2 – кольцевой жесткий экран; 3 – бесконечный плоский акустически мягкий экран

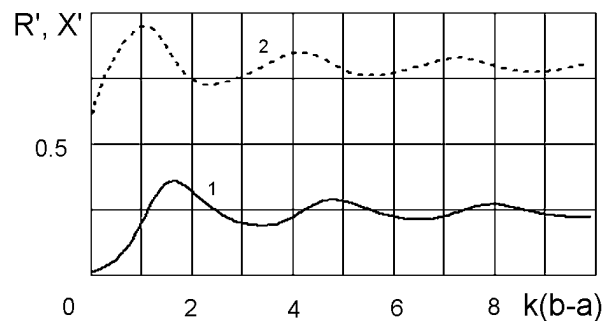


Рис. 14. Безразмерный импеданс излучения осциллирующего диска в жестком кольцевом экране конечных размеров при фиксированном значении $ka=0.5$ и переменной ширине экрана $k(b-a)$: 1 – действительная часть; 2 – мнимая часть

$$\frac{\partial p_I}{\partial r} = \frac{\partial p_{II}}{\partial r}, \quad r = a, \quad \theta = [0, \pi/2], \quad \psi = [0, 2\pi], \quad (24)$$

$$p_{II} = p_{III}, \quad r = b, \quad \theta = [0, \pi/2], \quad \psi = [0, 2\pi], \quad (25)$$

$$\frac{\partial p_{II}}{\partial r} = \frac{\partial p_{III}}{\partial r}, \quad r = b, \quad \theta = [0, \pi/2], \quad \psi = [0, 2\pi]. \quad (26)$$

Интересно отметить, что решение поставленной задачи можно построить иначе. Для этого следует объединить частичные области I и II в одну область, считая при этом, что колебательная скорость на поверхностях диска и жесткого кольцевого

го экрана задается в виде ступенчатой функции

$$v_n = \begin{cases} v_0, & 0 \leq R \leq a, \\ 0, & a > R \leq b. \end{cases} \quad (27)$$

На рис. 14 показаны вещественная и мнимая части нормированного импеданса излучения. При этом волновой радиус диска фиксирован ($ka=0.5$), а переменной считается волновая ширина экрана ($k(b-a)$). Видно, что при отсутствии экрана ($k(b-a)=0$) вещественная часть импеданса излучения весьма мала и составляет около 0.01. Следовательно, эффективность осциллирующего диска как излучателя звука тоже будет низкой. Однако, с ростом величины $k(b-a)$, вещественная часть импеданса быстро растет. Уже при $k(b-a) \approx 1.2$ она достигает уровня 0.1, что соответствует уровню для пульсирующего диска при $ka=0.5$ (сравни с кривой 1 на рис. 6, а). При $k(b-a) \geq 1.2$ вещественная часть импеданса излучения колеблется, асимптотически приближаясь к значению ~ 0.12 .

Влияние экрана на диаграмму направленности в значительной степени зависит от волнового размера диска ka . При малых ka экран оказывает существенное влияние на диаграмму направленности, а при больших – его влияние незаметно. Этот вопрос детально исследовался в монографии [7], где решение аналогичной задачи было найдено другим методом.

4. ДИСК В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим теперь колебания диска в свободном пространстве без каких-либо экранов (рис. 15). В принципе, амплитуды и фазы колебательных скоростей на двух поверхностях диска могут существенно отличаться. Более того, характер распределения колебательной скорости по поверхностям также может быть различен. Однако мы несколько упростим задачу и ограничимся рассмотрением только частного случая, когда колебательная скорость распределена по обеим поверхностям диска равномерно.

Пусть амплитуда колебательной скорости на правой стороне диска будет $v_1=v_0$, а на левой – $v_2=v_0\xi \exp(-i\alpha)$, см. рис. 15. Здесь коэффициент ξ определяет отношение амплитуд скоростей $\xi=|v_2|/|v_1|$ по обе стороны диска, а параметр $\alpha \geq 0$ указывает на запаздывание по фазе колебаний левой стороны диска относительно правой. Очевидно, что при $\xi=1, \alpha=0$ имеем задачу об излучении звука пульсирующим диском, а при $\xi=1, \alpha=\pi$ – осциллирующим.

Разобьем всю область существования звукового поля на три частичные области:

$$\text{I} - r \leq a, \quad \theta = [0, \pi/2];$$

$$\text{II} - r \leq a, \quad \theta = (\pi/2, \pi];$$

$$\text{III} - r > a, \quad \theta = [0, \pi].$$

На поверхностях диска должны выполняться следующие граничные условия:

$$\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_{\text{I}}}{\partial n} = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_{\text{I}}}{\partial z} = v_0, \quad (28)$$

$$\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_{\text{II}}}{\partial n} = -\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_{\text{II}}}{\partial z} = v_0\xi \exp(-i\alpha), \quad (29)$$

где n , как и прежде, – внешняя нормаль к поверхности диска (рис. 14). С учетом граничных условий (28) и (29) выражения для давления в каждой из частичных областей запишутся в виде

$$p_{\text{I}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n j_{2n}(kr) P_{2n}(\cos \theta) + \rho c v_0 \exp(ikr \cos \theta), \quad (30)$$

$$p_{\text{II}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n j_{2n}(kr) P_{2n}(\cos \theta) + \rho c v_0 \xi \exp(-i\alpha) \exp(-ikr \cos \theta), \quad (31)$$

$$p_{\text{III}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta). \quad (32)$$

Следует отметить, что плоские волны в соотношениях (30), (31) представляют собой волны, распространяющиеся от поверхности диска.

Для рассматриваемой задачи возможны два равноправных варианта условий сопряжения звуковых полей на границах частичных областей [15, 16]. В одном из них на всей поверхности сферы радиуса a (рис. 15) сопрягается давление по обе стороны от нее, а в другом – колебательная скорость. Выберем второй вариант, для которого на границе частичных областей будем иметь такие условия:

$$p_{\text{III}} = p_{\text{I}}, \quad r = a, \quad \theta = [0, \pi/2], \quad \psi = [0, 2\pi]; \quad (33)$$

$$p_{\text{III}} = p_{\text{II}}, \quad r = a, \quad \theta = (\pi/2, \pi], \quad \psi = [0, 2\pi]; \quad (34)$$

$$\frac{\partial p_{\text{III}}}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial p_{\text{I}}}{\partial r}, & r = a, \quad \theta = [0, \pi/2], \quad \psi = [0, 2\pi]; \\ \frac{\partial p_{\text{II}}}{\partial r}, & r = a, \quad \theta = (\pi/2, \pi], \quad \psi = [0, 2\pi]; \end{cases} \quad (35)$$

Алгебраизация функциональных уравнений (33), (34) проводится на основе полноты и ортогональности функций $P_{2n}(\cos \theta)$, $n=0, 1, 2, \dots$ на отрезках $\theta=[0, \pi/2]$ и $\theta=[\pi/2, \pi]$, а уравнения (35) – на основе полноты и ортогональности функций $P_n(\cos \theta)$, $n=0, 1, 2, \dots$ на отрезке $\theta=[0, \pi]$.

Выше мы уже достаточно много внимания уделили таким важным характеристикам пульсирующего и осциллирующего дисков как их импедансы излучения, распределения давления на излучающих поверхностях и диаграммы направленности. Теперь остановимся подробнее на характере распределения векторов колебательных скоростей $\vec{V} = \{V_R, V_z\}$ и интенсивностей $\vec{I} = \{I_R, I_z\}$ звукового поля вблизи поверхностей диска. Их проекции на оси координат вычислялись как

$$\begin{aligned} V_R &= \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial R}, & V_z &= \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ I_R &= \frac{1}{2} \mathbf{Re}(pV_R^*), & I_z &= \frac{1}{2} \mathbf{Re}(pV_z^*). \end{aligned} \quad (36)$$

На рис. 16 изображены поля колебательной скорости и интенсивности вблизи диска с волновым радиусом $ka=2$ при $\xi=1$, $\alpha=0$ (пульсирующий диск). Для сравнения на рис. 17 представлены аналогичные поля для осциллирующего диска. Начало каждой стрелочки соответствует точке, в которой определена векторная величина, а длина стрелочки пропорциональна модулю вектора. Вследствие симметрии звукового поля относительно оси z на графиках показано только полупространство $R \geq 0$ (половина диска). Ясно, что для пульсирующего диска векторы скорости и интенсивности полностью симметричны относительно плоскости $z=0$, что говорит об отсутствии взаимодействия между звуковыми полями левого и правого полупространств. Действительно, как мы уже отмечали, задача о пульсирующем диске в свободном пространстве полностью эквивалентна задаче о колебании диска в бесконечном плоском жестком экране. Характерной особенностью представленных на рис. 16 полей является то, что векторы в центральной части диска направлены вдоль оси z , а по мере приближения к его краю постепенно разворачиваются в направлении оси R . При этом амплитуда скоростей и уровни интенсивностей весьма мало изменяются.

Совершенно иная картина наблюдается у осциллирующего диска. Здесь, как и следовало ожидать, поле колебательной скорости антисимметрично относительно плоскости $z=0$, по мере движения от центра диска к его краю, амплитуда векторов колебательной скорости нарастает, а са-

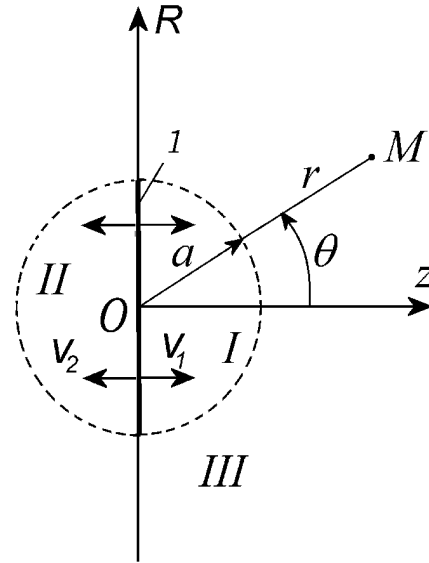


Рис. 15. Диск 1 в свободном пространстве без экрана

ми они разворачиваются в сторону оси R (см. рис. 17, а). Наиболее драматическая ситуация наблюдается вблизи кромки $z=0$, $r=a$. Здесь хорошо видно, как окружающая среда “перекачивается” с одной поверхности диска на другую, что является прямым следствием осциллирующего характера движения диска, которое создает на его поверхностях давления противоположного знака. Именно в этом и состоит суть эффекта короткого акустического замыкания. Что касается соответствующего поля интенсивности (см. рис. 17, б), то оно, как и для пульсирующего диска, полностью симметрично относительно плоскости $z=0$, однако при движении от центра диска к краю уровень интенсивности плавно спадает практически до нуля. Это указывает на то, что вся энергия колебаний края диска расходуется на “перекачку” среды с одной его поверхности на другую, а не на излучение акустической энергии в окружающую среду. Вот почему, при прочих равных параметрах, осциллирующий диск менее эффективен, чем пульсирующий. С ростом волнового размера осциллирующего диска негативная роль эффекта короткого акустического замыкания естественным образом ослабляется, и уже при $ka \geq 2$ по эффективности он становится сравнимым с пульсирующим (см. кривые для импеданса излучения на рис. 6, а).

Рассмотрим еще один интересный вариант движения диска, когда одна сторона его колеблется, а другая полностью заторможена ($\xi=0$). Такой

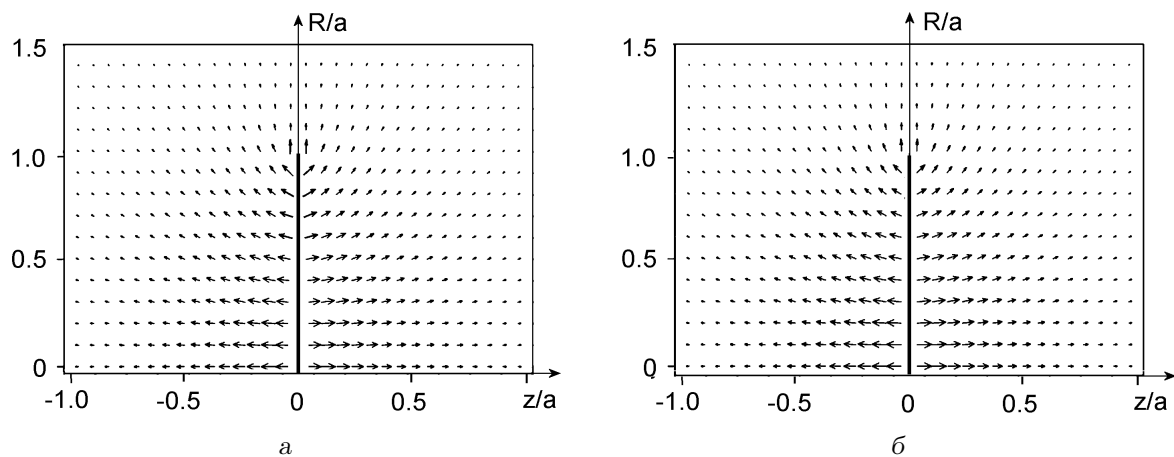


Рис. 16. Поле векторов амплитуды колебательной скорости (а) и векторов интенсивности (б) в окрестности пульсирующего диска ($ka=2, \xi=1, \alpha=0$)

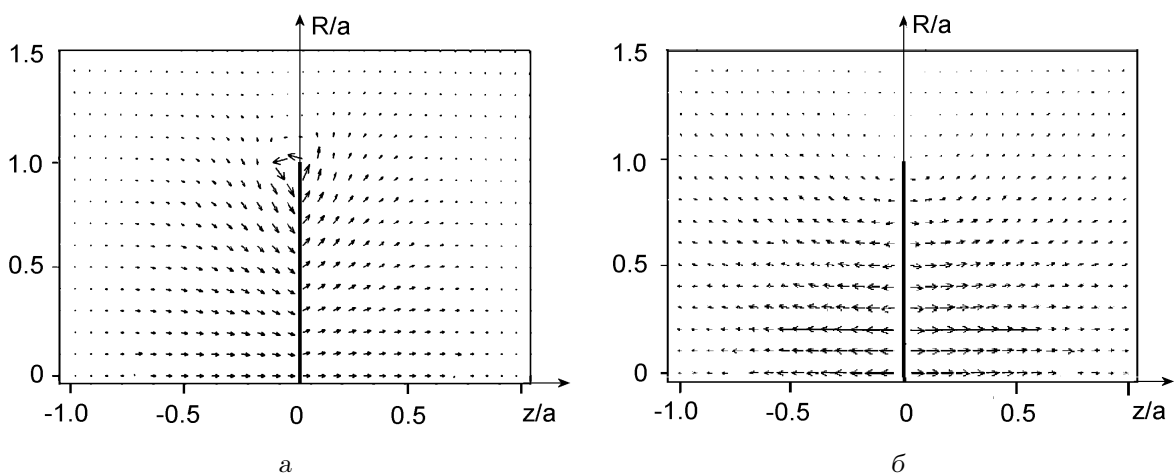


Рис. 17. Поле векторов амплитуды колебательной скорости (а) и векторов интенсивности (б) в окрестности осциллирующего диска ($ka=2, \xi=1, \alpha=\pi$)

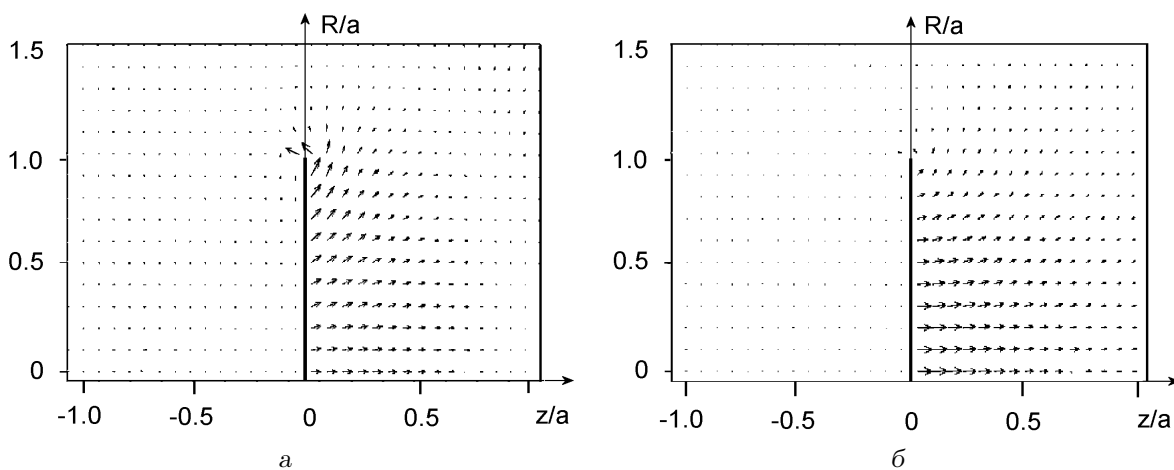


Рис. 18. Поле векторов амплитуды колебательной скорости (а) и векторов интенсивности (б) в окрестности одностороннего диска ($ka=2, \xi=0$)

диск называют односторонним. Он неоднократно рассматривался в работах [4, 7], где был оценен его импеданс излучения. Интерес к такой задаче обусловлен практической потребностью иметь однонаправленный излучатель для использования в различных акустических приборах.

Нас будут интересовать поля колебательной скорости и интенсивности в окрестности одностороннего диска. Как видно из рис. 18, по мере движения от центра диска к его краю, амплитуда векторов колебательной скорости заметно увеличивается, сами они разворачиваются в сторону оси R , образуя на краю диска своеобразный “веер”. На тыльной стороне диска колебательная скорость равна нулю. Что касается интенсивности, то она заметно спадает по мере движения к краю диска, причем некоторая ее часть “затекает” за край в тыльное полупространство. Можно предположить, что несмотря на отсутствие колебаний тыльной стороны диска, наличие “веера” колебательных скоростей и “затекания” звуковой энергии должно привести к заметному излучению звука в этом направлении. Обратившись к диаграмме направленности одностороннего диска (рис. 19, а), убедимся, что его относительный уровень тыльного излучения действительно высок и составляет почти 0.45. Таким образом, при малых и умеренных значениях ka односторонний диск в строгом смысле не является однонаправленным излучателем. При дальнейшем росте ka уровень тыльного излучения снижается и диск действительно становится практически однонаправленным.

Возникает естественный вопрос – можно ли путем надлежащего выбора параметров ξ и α сделать диск однонаправленным при умеренных ka ? Проведенные нами численные эксперименты убеждают, что это реализуемо (по крайней мере, теоретически). В качестве примера на рис. 19, б приведена диаграмма направленности для случая, когда $\xi = 0.45$, $\alpha = 0.4\pi$. Здесь же для сравнения представлена типичная кардиоидная диаграмма направленности. Как можно убедиться, диск с предложенным амплитудно-фазовым распределением колебательной скорости по его поверхностям действительно становится однонаправленным излучателем с диаграммой направленности, похожей на кардиоиду, но значительно более узкой.

В заключение рассмотрим частотные зависимости излучаемой диском полной нормированной мощности $\tilde{W} = v_0^2 R' / \rho c S$ при $v_0 = 1$ (рис. 20, а) и его коэффициента концентрации K (рис. 20, б). Очевидно, что кривые, характеризующие излучаемую акустическую мощность, должны полностью совпадать с кривыми, характеризующими действи-

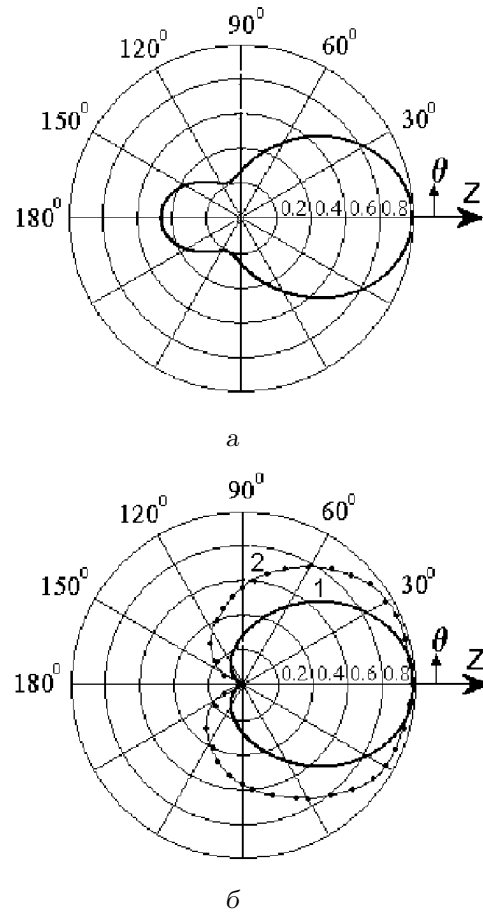


Рис. 19. Диаграммы направленности диска при $ka=2$ (штриховая – кардиоида):

а – односторонний диск, $\xi=0$;
б – диск с $\xi=0.45$, $\alpha=0.4\pi$

тельную часть импеданса излучения (напомним, что мощность определяется как $W = v_0^2 \text{Re } Z_n$). Как следует из графика, при $ka \geq 2$ пульсирующий 1 и осциллирующий 2 диски превосходят по мощности односторонний диск 3 в два раза. Этого следовало ожидать, поскольку пульсирующий и осциллирующий диски, в отличие от одностороннего, излучают звук обеими поверхностями. Несколько большую мощность, чем односторонний, излучает диск 4 с $\xi = 0.45$, $\alpha = 0.4\pi$, поскольку у него колеблются обе поверхности, хотя и не с одинаковой эффективностью. Иначе обстоит дело при малых волновых размерах $ka \leq 2$. Здесь вследствие акустического короткого замыкания излучаемая осциллирующим диском мощность стремительно падает и уже при $ka \leq 1.5$ ее уровень оказывается самым низким. Что касается пульсирующего и одностороннего дисков, то соотношение их мощностей остается таким же, как и при боль-

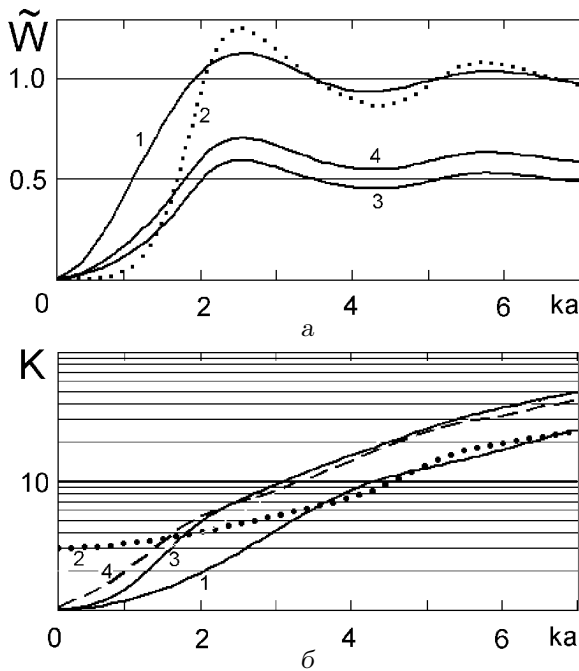


Рис. 20. Полная излучаемая диском мощность (а) и коэффициент концентрации (б) при $v_0 = 1$:
 1 – пульсирующий диск; 2 – осциллирующий диск;
 3 – односторонний диск; 4 – диск с $\xi = 0.45$, $\alpha = 0.4\pi$

ших значениях ka . Перейдем к анализу частотной зависимости коэффициента концентрации K . Как и должно быть, при $ka \rightarrow 0$ коэффициент концентрации осциллирующего диска стремится к тройке, коэффициенты концентрации пульсирующего и одностороннего дисков – к единице [17], а диска с $\xi = 0.45$, $\alpha = 0.4\pi$ – практически к единице. При больших же значениях ka коэффициенты концентрации пульсирующего 1 и осциллирующего 2 дисков растут, становясь практически равными, а коэффициенты концентрации одностороннего диска 3 и диска 4 (они тоже близки) превосходят их ровно в два раза.

ВЫВОДЫ

1. На базе метода частичных областей разработан эффективный метод, позволяющий решать задачи излучения звука колеблющимся диском с различными экранами (или без таковых), не вводя ограничения на распределение колебательной скорости по его поверхности.
2. Получены и проанализированы количественные данные об интегральных и локальных

акустических характеристиках дальнего и ближнего полей колеблющегося диска при его размещении в плоских и полусферических экранах с жесткими и мягкими поверхностями, а также при отсутствии экранов.

3. Показано, что с помощью надлежащего выбора амплитудно-фазового распределения колебательной скорости по поверхностям диска можно эффективно управлять его акустическими характеристиками.
4. Рассмотренные классические задачи акустики иллюстрируют большие возможности метода частичных областей для анализа различных реальных источников звука в экранах и без них.

1. Рэлей Дж. Теория звука. Том 2. – М.-Л.: Гостехиздат, 1944. – 476 с.
2. Мак-Лаклен. Громкоговорители. – М.: ГИВР, 1938. – 178 с.
3. Stenzel H. Leitfaden zur berechnung der schallvorgänge. – Berlin: Springer, 1939. – 260 с.
4. Гутин Л. Я. О звуковом поле поршневых излучателей // ЖТФ. – 1937. – 7, N 10. – С. С. 1096–1106.
5. Hanson E. T. Ellipsoidal function and their application // Phil. Trans. Roy. Soc. – 1933. – A232. – P. 223–228.
6. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. – М.: Изд-во. МГУ, 1960. – 336 с.
7. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. – Л.: Судостроение, 1989. – 301 с.
8. Иофе В. К. Электроакустика. – М.: Связьиздат, 1954. – 184 с.
9. Фурдуев В. В. Электроакустика. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 515 с.
10. Евтютов А. П., Колесников А. Е., Корешин Е. А. и др. Справочник по гидроакустике. – Л.: Судостроение, 1988. – 549 с.
11. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М.: Мир, 1964. – 428 с.
12. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. – Л.: Судостроение, 1972. – 348 с.
13. Четаев Д. А. Импеданс прямоугольного поршня, колеблющегося в бесконечном плоском экране // Прикл. мат. мех. – 1951. – 15. – С. 439–444.
14. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
15. Гринченко В. Т., Вовк И. В., Мацыпура В. Т. Основы акустики. – К.: Наук. думка, 2007. – 640 с.
16. Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. – К.: Наук. думка, 1986. – 240 с.
17. Смаришев М. Д. Направленность гидроакустических антенн. – Л.: Судостроение, 1973. – 278 с.