ISSN 1028-7507 Акустичний вісник. 2008. Том 11, N 3. С. 3 – 12

УДК 517.9; 532.593

ПРОЕКЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ В ЦИЛІНДРІ З УРАХУВАННЯМ ПОВЕРХНЕВОГО НАТЯГУ

М. Я. БАРНЯК, О. П. ЛЕЩУК

Інститут математики НАН України, Київ

Одержано 01.10.2008

Розглянуто задачу про власні коливання в'язкої нестисливої рідини з вільною поверхнею в прямому круговому циліндрі під дією сили тяжіння при врахуванні сили поверхневого натягу. Запропоновано проекційний метод для наближеного розв'язку задачі. При цьому будуються координатні функції, які повторюють якісні властивості шуканого розв'язку, задовольняють рівняння задачі всередині області й частину крайових умов. Знайдені частоти й логарифмічні декременти коливань порівнюються з експериментальними даними й результатами, обчисленими асимптотичним методом. Показано, що при малих значеннях числа Галілея H запропонований проекційний метод є більш точним, ніж асимптотичний.

Рассмотрена задача о собственных колебаниях вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в прямом круговом цилиндре под действием силы тяжести при учете силы поверхностного натяжения. Предложен проекционный метод для приближенного решения задачи. При этом строятся координатные функции, повторяющие качественные свойства искомого решения, удовлетворяющие уравнение задачи внутри области и часть краевых условий. Найденные частоты и логарифмические декременты колебаний сравниваются с экспериментальными данными и результатами, вычисленными асимптотическим методом. Показано, что при малых значениях числа Галилея H предложенный проекционный метод более точен, чем асимптотический.

The paper deals with the problem on eigen-oscillations of viscous incompressible liquid with a free surface in a right circular cylinder under action of gravitational force with allowance for surface tension. A projection method for approximate solving the problem is proposed. In doing so, the coordinate functions are developed that posses the qualitative properties of desired solution, satisfy the problem equations inside the domain and some boundary conditions. The found frequencies and logarithmic oscillation decrements are compared with experimental data and results obtained by an asymptotic method. It is shown that at low Galileo numbers H, the proposed projection method is more accurate than the asymptotic one.

ВСТУП

Визначення частот і логарифмічних декрементів згасання власних коливань в'язкої рідини з вільною поверхнею, яка знаходиться в порожнині обмежених розмірів, – давно відома складна задача [1 – 10]. Згасання коливань, обумовлене в'язкістю рідини, відбувається в усьому об'ємі рідини та примежевих шарах біля вільної поверхні й твердих стінок посудини. Окрім того, на динаміку рідини впливають сили поверхневого натягу; забруднення вільної поверхні рідини, яке створює плівку на вільній поверхні; рух лінії контакту рідини, повітря й твердої стінки порожнини. Ефект забруднення вільної поверхні вивчався у [11], де забруднення моделювалося за допомогою пружності Марангоні. Рух лінії контакту – складна проблема, яка дотепер залишається вивченою недостатньо. При постановці крайових умов на лінії контакту часто використовують феноменологічний підхід [6]. З останніми дослідженнями в цьому напрямку можна ознайомитися в [12].

При теоретичних розрахунках частот і декрементів урахувати одночасно усі вказані вище ефекти надзвичайно складно. Тому в цій праці ми розглядаємо модель в'язкої рідини з фіксованою лінією контакту. Вважається, що на рух рідини впливають лише вага й сили поверхневого натягу. При цьому використовується проекційний метод побудови розв'язків задачі, успіх реалізації якого багато в чому залежить від вдалого вибору системи координатних функцій. За допомогою подання розв'язків лінеаризованих рівнянь руху в'язкої нестисливої рідини через гідродинамічні потенціали [13] вдається побудувати системи координатних функцій для наближення тиску й швидкості руху рідини, які точно задовольняють рівняння і наближено – частину крайових умов задачі. Додатково вибираються ортогональні многочлени, які відображають поведінку відхилення вільної поверхні рідини. Таким чином, побудовані системи й многочлени мають якісні властивості шуканого розв'язку, що забезпечує ефективність проекційного методу.

У статті [14] експериментально досліджено власні коливання в'язкої рідини з вільною поверхнею в посудинах, що мали форму прямих кругових циліндрів. Ми покажемо, що знайдені проекційним методом частоти й декременти коливань добре узгоджуються з цими даними. Також запропонований метод буде порівнюватися з асимптотичним методом розрахунку частот і декрементів [7]. При зменшенні числа Галілея H проекційний метод виявляється більш точним, ніж асимптотичний.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Позначимо через Σ вільну поверхню рідини в незбуреному стані, а через S – змочену тверду стінку посудини. Опишемо загальний випадок, коли Σ є криволінійною внаслідок дії сил поверхневого натягу, а лінія контакту вільної поверхні, повітря й твердої стінки посудини ($S \cap \Sigma$) залишається нерухомою під час коливань рідини. В околі Σ введемо криволінійну систему координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) так, щоб поверхня Σ відповідала рівнянню $\xi_3=0$, а координатні лінії ξ_3 при $\xi_3=0$ були спрямовані по нормалі $\bar{n}$ й мали коефіцієнт Ламе $l_3=1$. Оскільки розглядаються власні коливання рідини, то всі шукані величини залежать від часової змінної t за законом $e^{-\lambda t}$ і її можна відокремити. З точністю до малих вищого порядку відхилення збуреної під час коливань поверхні від Σ по нормалі, взяте з відповідним знаком, позначимо через $h(\xi_1, \xi_2)e^{-\lambda t}$.

Будемо користуватися лінеаризованими рівняннями руху, а крайові умови зі збуреної вільної поверхні зносити на Σ. Тоді власні коливання в'язкої нестисливої рідини описуються такою спектральною крайовою задачею [15]:

$$\begin{gathered} -\nu\Delta\bar{v}+\frac{1}{\rho}\nabla p=\lambda\bar{v}, \quad \operatorname{div}\bar{v}=0 \text{ в } \Omega; \\ \bar{v}=0 \text{ на } S; \quad v_{1,3}+v_{3,1}=v_{2,3}+v_{3,2}=0 \text{ на } \Sigma; \\ 2\nu v_{3,3}-\frac{1}{\rho}p+\frac{\sigma}{\rho}\mathfrak{B}h=0, \quad v_n+\lambda h=0 \text{ на } \Sigma; \\ h=0 \text{ на } S\cap\Sigma; \quad \int\limits_{\Sigma} h d\Sigma=0. \end{gathered} \tag{1}$$

Тут Ω – область, заповнена рідиною в стані спокою; (x, y, z) – декартова система координат, причому вісь z направлена вертикально вгору; $\bar{v}(x, y, z)e^{-\lambda t}$ – швидкість частинок рідини; $p(x, y, z)e^{-\lambda t}$ – відхилення тиску в рідині відносно його статичного значення; λ – частотний параметр; ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості; σ – коефіцієнт поверхневого натягу; ρ – густина рідини; $v_n=(\bar{v}, \bar{n})$ – нормальна складова вектора $\bar{v}$; $v_{i,j}$ – коваріантна похідна від коваріантного вектора v_i [16].

Оператор $\mathfrak{B}$ визначається на класі функцій, які мають нульове середнє значення на поверхні Σ, таким чином [15]:

$$\mathfrak{B}h \equiv \left(-\frac{\rho}{\sigma}\frac{\partial \Pi}{\partial n} - k_1^2 - k_2^2 \right) h - \Delta_\Sigma h. \tag{2}$$

У формулі (2) Δ_Σ – оператор Бельтрамі–Лапласа [17]; k_1 і k_2 – головні кривизни поверхні Σ; Π – потенціал зовнішніх сил.

Оскільки планується порівняння розрахункових даних з експериментами [14], будемо розглядати випадок, коли поверхня Σ плоска й лежить у площині $z=0$, а із зовнішніх сил діє лише сила тяжіння $\Pi=-gz$ (тут g – прискорення вільного падіння). Тоді кривизни будуть $k_1=k_2=0$, координати $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)=(x, y, z)$, а напрямок нормалі n співпадатиме з віссю Oz. Перейдемо до безрозмірних змінних. Оскільки густина рідини ρ – стала, замість p/ρ надалі будемо писати p. Тоді задача (1) набуває вигляду [6, 7, 15]

$$\begin{gathered} -\frac{1}{H}\Delta\bar{v}+\nabla p=\lambda\bar{v}, \quad \operatorname{div}(\bar{v})=0 \quad \text{в } \Omega; \\ \bar{v}=0 \text{ на } S; \\ \frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}=\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}=0 \text{ на } \Sigma; \\ \frac{2}{H}\frac{\partial v_z}{\partial z}-p+h-\frac{1}{B}\Delta h=0, \\ v_z+\lambda h=0 \text{ на } \Sigma; \\ h=0 \quad \text{на } S\cap\Sigma, \quad \int\limits_{\Sigma} h d\Sigma=0, \end{gathered} \tag{3}$$

де число Галілея $H=g^{1/2}L^{3/2}\nu^{-1}$ – безрозмірний параметр, який характеризує співвідношення між силами ваги ($\sim g$), силами в'язкого тертя ($\sim \nu$) й характерним лінійним розміром порожнини L (тут – радіус циліндра). Додатково введене число Бонда $B=\rho g L^2\sigma^{-1}$ також безрозмірне.

Надалі спектральна задача (3) стає основним об'єктом дослідження. За допомогою проекційного методу будуть побудовані її наближені розв'язки для випадку, коли Ω – прямий круговий циліндр.

2. ПРОЕКЦІЙНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Зробимо заміну

$$\bar{v}^*=\frac{\bar{v}}{H}, \qquad \omega^2=\lambda H, \qquad h=-\frac{H\omega}{\lambda}f. \tag{4}$$

Далі знак $*$ для зручності запису опускаємо. Тоді вихідна задача (3) набуває такого вигляду:

$$\begin{gathered}-\Delta\bar{v}+\nabla p=\omega^2\bar{v}, \quad \mathrm{div}(\bar{v})=0 \quad \text{в} \quad \Omega;\\ \bar{v}=0 \text{ на } S;\\ \frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}=\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}=0 \text{ на } \Sigma;\\ \omega\left(2\frac{\partial v_z}{\partial z}-p\right)-H^2\left(f-\frac{1}{B}\Delta f\right)=0 \text{ на } \Sigma;\\ v_z=\omega f \text{ на } \Sigma; \quad f=0 \text{ на } S\cap\Sigma; \quad \int\limits_{\Sigma} f d\Sigma=0.\end{gathered} \qquad (5)$$

Завдяки заміні (4), у формулюванні (5) число Галілея H входить лише в одну крайову умові. Тому при побудові розв'язків цієї задачі доцільно вважати параметр ω фіксованим, а H – шуканим, тобто розглядати H як функцію від ω.

Аналогічно до статті [18], в якій не враховувалися сили поверхневого натягу, визначимо функціонал

$$K(\bar{v},p,f,H)=E(\bar{v},\bar{v})-\omega^2 T(\bar{v},\bar{v})-$$

$$-2\omega\int\limits_{\Sigma}\left(2\frac{\partial v_z}{\partial z}-p\right)f dS+H^2\int\limits_{\Sigma}\left(f^2+\frac{1}{B}\left(\nabla f\right)^2\right)dS,$$

де $H\in\mathbb{C}$, $\omega\in\mathbb{C}$; f і p – скалярні функції; $f\in\mathbb{W}_2^1(\Sigma)$; $\int\limits_{\Sigma} f dS=0$; $f=0$ на $\partial\Sigma$; $p\in\mathbb{W}_2^1(\Omega)$. Соленоїдальні вектор-функції $\bar{v}\in\mathbb{W}_2^1(\Omega)$ разом з функціями p задовольняють систему рівнянь

$$-\Delta\bar{v}+\nabla p=\omega^2\bar{v}, \qquad \mathrm{div}(\bar{v})=0 \quad \text{в} \quad \Omega \qquad (6)$$

і крайові умови

$$\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}=0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \qquad (7)$$

Функціонали T і E мають такий вигляд:

$$T(\bar{v},\bar{u})=\int\limits_{\Omega}(v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3)d\Omega,$$

$$E(\bar{v},\bar{u})=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)d\Omega.$$

Вони визначаються на класі вектор-функцій $\bar{v}$, $\bar{u}$, інтегрованих з квадратом разом зі своїми першими похідними по області Ω ($\{\bar{v},\bar{u}\}\subset\mathbb{W}_2^1(\Omega)$). Для зручності запису декартові координати (x,y,z) позначені через (x_1,x_2,x_3). Величина $\mu E(\bar{v},\bar{u})$ для дійсних значень $\bar{v}$ і $\bar{u}$ має фізичний зміст роботи, виконаної за одиницю часу в'язкими силами, що виникають за наявності поля швидкостей $\bar{v}$ на можливому переміщенні, яке визначається полем швидкостей $\bar{u}$. Тут $\mu=\rho\nu$ – динамічний коефіцієнт в'язкості.

Як і при відсутності поверхневого натягу [18] ($B\to\infty$), в основу проекційного методу побудови наближених розв'язків (5) покладемо таке твердження. Для того, щоб вектор-функція $\bar{v}(x,y,z)$ й скалярна функція $p(x,y,z)$, які задовольняють систему рівнянь (6) та крайові умови (7) разом зі скалярною функцією $f(x,y)$ й відповідним їм власним значенням H при заданому значенні ω були розв'язками задачі (5), необхідно й достатньо, щоб вони надавали стаціонарне значення функціоналу $K(\bar{v},p,f,H)$.

Наближений розв'язок задачі (5) подамо у вигляді скінченних сум:

$$\bar{v}_{n_1}=\sum_{k=1}^{n_1}a_k\bar{v}_k, \quad p_{n_1}=\sum_{k=1}^{n_1}a_kp_k, \quad f_{n_2}=\sum_{k=1}^{n_2}b_kf_k,$$

де функції $\bar{v}_k$, p_k, f_k належать області визначення функціоналу K. Невідомі коефіцієнти a_k, b_k, а також значення числа H знаходимо з умов стаціонарності K:

$$\frac{\partial K(\bar{v}_{n_1},p_{n_1},f_{n_2},H)}{\partial a_i}=0, \qquad i=\overline{1,n_1},$$

$$\frac{\partial K(\bar{v}_{n_1},p_{n_1},f_{n_2},H)}{\partial b_j}=0, \qquad j=\overline{1,n_2}.$$

3. ПОБУДОВА СИСТЕМИ КООРДИНАТНИХ ФУНКЦІЙ $\bar{v}_k$, p_k і f_k

Перейдемо до циліндричної системи координат (r,η,z):

$$x=r\cos(\eta), \qquad y=r\sin(\eta), \qquad z=z,$$

у якій $\Omega=\{(r,\eta,z):\ 0\le r<1,\ 0\le\eta\le 2\pi,\ -h<z<0\}$; $S=S_1\cup S_2$, S_1 – дно циліндра, S_2 – його бічна поверхня,

$$S_1=\{(r,\eta,z):\ 0\le r\le 1,\ 0\le\eta\le 2\pi,\ z=-h\};$$

$$S_2=\{(r,\eta,z):\ r=1,\ 0\le\eta\le 2\pi,\ -h\le z\le 0\};$$

$$\Sigma\ =\{(r,\eta,z):\ 0\le r\le 1,\ 0\le\eta\le 2\pi,\ z=0\}.$$

Відомо, що розв'язки системи рівнянь (6) можна подати у вигляді [13]

$$\bar{v}=\nabla\varphi+\mathrm{rot}\big(\mathrm{rot}(\psi_1\bar{e}_z)\big)+\mathrm{rot}(\psi_2\bar{e}_z), \quad p=\omega^2\varphi,$$

де скалярні функції φ, ψ_1, ψ_2 задовольняють рівняння

$$\Delta\varphi = 0, \qquad \Delta\psi_1 + \omega^2\psi_1 = 0, \qquad \Delta\psi_2 + \omega^2\psi_2 = 0.$$

Задача (5) допускає відокремлення кругової координати η для довільної області, яка має форму тіла обертання. Тому шукані функції $\bar{v}$ і p запишемо як

$$\begin{gathered}\bar{v} = \nabla\big(\varphi^*(r,z)\cos(m\eta)\big)+ \\ +\mathrm{rot}\Big(\mathrm{rot}\big(\psi_1^*(r,z)\cos(m\eta)\big)\Big)+ \\ +\mathrm{rot}\big(\psi_2^*(r,z)\sin(m\eta)\big), \\ p = \omega^2\varphi^*(r,z)\cos(m\eta), \qquad m = 0,1,2,\ldots\end{gathered} \tag{8}$$

Надалі для зручності запису знак $*$ опускаємо. Функції $\varphi(r,z)$, $\psi_1(r,z)$, $\psi_2(r,z)$ повинні задовольняти рівняння

$$\Delta_m\varphi \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2}\varphi = 0, \tag{9}$$

$$\Delta_m\psi_1 + \omega^2\psi_1 = 0, \qquad \Delta_m\psi_2 + \omega^2\psi_2 = 0. \tag{10}$$

Компоненти вектора швидкості $\bar{v}$ і функції тиску p виражаються через функції φ, ψ_1, ψ_2 таким чином:

$$v_r = \left(\frac{m}{r}\psi_2 + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial z\partial r} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\cos(m\eta),$$

$$v_\eta = -\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial r} + \frac{m}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \frac{m}{r}\varphi\right)\sin(m\eta),$$

$$v_z = \left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} + \omega^2\psi_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\cos(m\eta),$$

$$p = \omega^2\varphi\cos(m\eta).$$

Розглянемо систему функцій

$$\varphi_k^1 = \frac{J_m(\xi_k r)\mathrm{ch}\,(\xi_k(z+h))}{J_m(\xi_k)\mathrm{ch}\,(\xi_k h)}, \qquad k = 1,2,3,\ldots,$$

де $J_m(z)$ – функції Бесселя першого роду; число ξ_k – k-ий розв'язок рівняння $J'_m(\xi)=0$. Функції $\varphi_k^1\cos(m\eta)$ й відповідні їм власні числа $\sigma_k^2=\xi_k\mathrm{th}\,(\xi_k h)$ є розв'язками задачі

$$\Delta\varphi=0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}=0 \text{ на } S, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}=\sigma^2\varphi \text{ на } \Sigma, \tag{11}$$

яка описує власні коливання ідеальної рідини з вільною поверхнею у прямому круговому циліндрі Ω.

Позначимо через $H(\Omega)$ підпростір гармонічних в Ω функцій із простору Соболєва $\mathbb{W}_2^1(\Omega)$. Долучимо до φ_k^1 ще дві системи функцій:

$$\varphi_k^2 = \frac{J_m(\xi_k r)\mathrm{sh}\,(\xi_k z)}{J_m(\xi_k)\mathrm{ch}\,(\xi_k h)}, \qquad \varphi_k^3 = \frac{I_m(s_k r)\sin(s_k z)}{I_m(s_k)},$$

де $I_m(z)$ – модифіковані функції Бесселя першого роду; $s_k=k\pi/h$; $k=1,2,3,\ldots$ Відзначимо, що всі φ_k^i задовольняють рівняння (9). Як показано у праці [20], сукупність функцій $\varphi_k^i\cos(m\eta)$, $i=\overline{1,3}$, $k=\overline{1,\infty}$ утворює повну систему в просторі $H(\Omega)$ з властивостями ортогональності

$$\int\limits_\Omega \nabla\big(\varphi_k^{i_1}\cos(m\eta)\big)\nabla\big(\varphi_j^{i_2}\cos(m\eta)\big)d\Omega = 0$$

у випадках $k\neq j$ (при довільних i_1, i_2) або $i_1\neq i_2$ (при довільних k і j). Це означає, що потенціальну складову шуканої вектор-функції $\bar{v}$ можна як завгодно точно апроксимувати лінійною комбінацією градієнтів функцій $\varphi_k^i\cos(m\eta)$.

До кожної функції φ_k^i підберемо функції $\psi_{1,k}^i$ й $\psi_{2,k}^i$ так, щоб відповідні їм вектор-функції $\bar{v}_k^i$, побудовані за формулою (8), задовольняли частину крайових умов задачі (5) і, що найголовніше, умови (7). Детально опишемо випадок $i=1$.

Розглянемо розв'язки рівняння (10)

$$\begin{gathered} f_{1,k}^1 = \frac{I_m(q_k r)\mathrm{sh}\,(\xi_k(z+h))}{I_m(q_k)\xi_k\mathrm{ch}\,(\xi_k h)}, \\ f_{2,k}^1 = \frac{I_m(q_k r)\mathrm{ch}\,(\xi_k(z+h))}{I_m(q_k)\mathrm{ch}\,(\xi_k h)}, \\ f_{3,k}^1 = \frac{J_m(\xi_k r)e^{-p_k(z+h)}}{J_m(\xi_k)p_k\mathrm{ch}\,(\xi_k h)}, \\ f_{4,k}^1 = \frac{J_m(\xi_k r)e^{p_k z}}{J_m(\xi_k)p_k}, \end{gathered} \tag{12}$$

де $p_k=\sqrt{-\omega^2+\xi_k^2}$; $q_k=\sqrt{-\omega^2-\xi_k^2}$.

Функції $\psi_{1,k}^1$ й $\psi_{2,k}^1$ шукаємо у вигляді

$$\begin{gathered} \psi_{1,k}^1 = c_{1,k}^1 f_{1,k}^1 + c_{3,k}^1 f_{3,k}^1 + c_{4,k}^1 f_{4,k}^1, \\ \psi_{2,k}^1 = c_{2,k}^1 f_{2,k}^1. \end{gathered} \tag{13}$$

При середніх і великих числах Галілея H ($100\leq H\leq 100000$) абсолютні значення p_k, q_k знаходяться в межах $10^2\div 10^3$. Звідси випливає, що функції (12) мають характер примежевого шару в околі межі області Ω: $f_{1,k}^1$ та $f_{2,k}^1$ суттєво відмінні від нуля лише в околі $r=1$, $-h\leq z\leq 0$; $f_{3,k}^1$ – в околі $z=-h$, $0\leq r\leq 1$; $f_{4,k}^1$ – в околі $z=0$, $0\leq r\leq 1$.

Усі компоненти (12) експоненціально спадають, якщо рухатися від межі Ω всередину області, причому чим більше число Галілея H, тим швидше спадання і, відповідно, тонший примежевий шар. Скористаємося цією властивістю під час визначення коефіцієнтів $c^1_{1,k}$, $c^1_{2,k}$, $c^1_{3,k}$, $c^1_{4,k}$. Будемо наближено вважати, що $f^1_{1,k}\neq 0$ і $f^1_{2,k}\neq 0$ лише при $r=1$, $-h\leq z\leq 0$; $f^1_{3,k}\neq 0$ лише при $z=-h$, $0\leq r\leq 1$; $f^1_{4,k}\neq 0$ лише при $z=0$, $0\leq r\leq 1$.

Коефіцієнти $c^1_{1,k}$ і $c^1_{2,k}$ знайдемо з умов

$$v_z=0, \quad v_\eta=0 \quad \text{при} \quad r=1. \tag{14}$$

Тоді

$$c^1_{1,k}=\frac{\xi_k^2}{q_k^2}, \qquad c^1_{2,k}=\frac{-m(c^1_{1,k}+1)I_m(q_k)}{q_k I_{m+1}(q_k)+mI_m(q_k)}.$$

Для обчислення коефіцієнтів $c^1_{3,k}$ використаємо співвідношення

$$v_r=0, \quad v_\eta=0 \quad \text{при} \quad z=-h. \tag{15}$$

Тоді $c^1_{3,k}=1$.

Коефіцієнти $c^1_{4,k}$ визначаються з умов відсутності дотичних напружень на вільній поверхні (7). В циліндричній системі координат вони мають вигляд

$$\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial v_\eta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \eta}=0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{16}$$

Тоді

$$c^1_{4,k}=-\frac{2\xi_k p_k \mathrm{th}\,(\xi_k h)}{2\xi_k^2-\omega^2}.$$

Точно кажучи, за допомогою такого підбору коефіцієнтів у формулі (13) ми задовольняємо крайові умови (14) – (16) лише наближено. Втім, оскільки функції (12) при $H\geq 100$ мають характер примежевого шару, співвідношення (14) – (16) задовольняються з високою точністю. Найгіршою буде якість виконання цих умов у околах перетину вільної поверхні й бічної стінки та перетину бічної стінки й дна циліндра (тобто, поблизу кутових точок меридіального перерізу області Ω). Відзначимо, що радіус цієї зони приблизно дорівнює товщині примежевого шару і має порядок $1/\sqrt{H}$.

Аналогічним чином за допомогою φ^2_k, φ^3_k побудуємо функції

$$\begin{gathered}\psi^j_{1,k}=c^j_{1,k}f^j_{1,k}+c^j_{3,k}f^j_{3,k}+c^j_{4,k}f^j_{4,k},\\ \psi^j_{2,k}=c^j_{2,k}f^j_{2,k}, \qquad j=\overline{2,3}\end{gathered} \tag{17}$$

так, щоб відповідні вектор-функції $\bar{v}^j_k$ задовольняли умови (14) – (16):

$$f^2_{1,k}=\frac{I_m(q_k r)\mathrm{ch}\,(\xi_k z)}{I_m(q_k)\xi_k\mathrm{ch}\,(\xi_k h)}, \quad f^2_{2,k}=\frac{I_m(q_k r)\mathrm{sh}\,(\xi_k z)}{I_m(q_k)\mathrm{ch}\,(\xi_k h)},$$

$$f^2_{3,k}=\frac{J_m(\xi_k r)e^{-p_k(z+h)}}{J_m(\xi_k)p_k\mathrm{ch}\,(\xi_k h)}, \quad f^2_{4,k}=\frac{J_m(\xi_k r)e^{p_k z}}{J_m(\xi_k)p_k},$$

$$c^2_{1,k}=\frac{\xi_k^2}{q_k^2}, \quad c^2_{2,k}=\frac{-m(c^2_{1,k}+1)I_m(q_k)}{q_k I_{m+1}(q_k)+mI_m(q_k)},$$

$$c^2_{3,k}=-\mathrm{sh}\,(\xi_k h), \quad c^2_{4,k}=\frac{-2p_k\xi_k}{\mathrm{ch}\,(\xi_k h)(2\xi_k^2-\omega^2)},$$

$$f^3_{1,k}=\frac{I_m(q_{3,k}r)\cos(s_k z)}{I_m(q_{3,k})s_k},$$

$$f^3_{2,k}=\frac{I_m(q_{3,k}r)\sin(s_k z)}{I_m(q_{3,k})}, \quad f^3_{3,k}=0,$$

$$f^3_{4,k}=\frac{I_m(s_k r)\mathrm{ch}\,(p_{3,k}(z+h))}{I_m(s_k)\mathrm{ch}\,(p_{3,k}h)},$$

$$c^3_{1,k}=\frac{-s_k^2}{-s_k^2+\omega^2},$$

$$c^3_{2,k}=\frac{-m(-c^3_{1,k}+1)I_m(q_{3,k})}{q_{3,k}I_{m+1}(q_{3,k})+mI_m(q_{3,k})},$$

$$c^3_{3,k}=0, \quad c^3_{4,k}=\frac{2s_k}{2s_k^2+\omega^2},$$

$$q_{3,k}=\sqrt{s_k^2-\omega^2}, \quad p_{3,k}=\sqrt{-s_k^2-\omega^2}.$$

Відхилення вільної поверхні f шукаємо у вигляді лінійної комбінації функцій

$$f_i=P^{(2,2m+1)}_{i-1}(2r-1)(1-r)r^m\cos(m\eta),$$

$$i=1,2,\ldots,$$

де $P^{(a,b)}_{i-1}$ – многочлени Якобі. Вони мають такі властивості ортогональності [21]:

$$\int\limits_{-1}^{1}P^{(a,b)}_i(r)P^{(a,b)}_j(r)(1-r)^a(1+r)^b dr=$$

$$=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ \neq 0, & i=j.\end{cases}$$

Завдяки цьому функції f_i також є ортогональними:

$$\int\limits_0^1 rf_if_jdr=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ \neq 0, & i=j.\end{cases}$$

При $r=0$ рівняння (9), (10) вироджуються і їхні обмежені в цій точці розв'язки мають поводитись як r^m при $r \to 0$. Саме таким є характер координатних функцій φ_k^i, $f_{j,k}^i$, $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,4}$, $k=\overline{1,\infty}$. Тоді з крайової умови $v_z=\omega f$ на Σ випливає, що для відхилення f також має бути пропорційне до r^m при $r \to 0$. Саме тому множник r^m був явно уведений при означенні f_i. Окрім того, згідно з умовою задачі (5) відхилення f дорівнює нулеві при $r=1$. Цю умову функції f_i задовольняють завдяки множнику $(1-r)$.

За побудовою, для координатних функцій f_i при $m=1,2,3,\ldots$ буде

$$\int\limits_{\Sigma} f_i dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} r f_i d\eta dr = 0. \qquad (18)$$

При $m=0$ ця умова не виконується і відхилення f слід шукати у вигляді лінійної комбінації функцій

$$g_i = f_{i+1} - c_{5,i} f_1,$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots,$$

де коефіцієнти $c_{5,i}$ визначаються так, щоб виконувалось співвідношення (18), і мають вигляд

$$c_{5,i} = \frac{\int\limits_0^1 r f_{i+1} dr}{\int\limits_0^1 r f_1 dr}.$$

Отже, координатні функції f_i, g_i повторюють властивості шуканого відхилення f.

4. АЛГОРИТМ РЕАЛІЗАЦІЇ НАБЛИЖЕНОГО МЕТОДУ ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКУ

Для наближення поля швидкості $\bar{v}$ використаємо вектор-функції $\bar{v}_k^i$, $i=1,2,3$, $k=1,2,3,\ldots$, які будуються за допомогою трійок скалярних функцій $\langle \varphi_k^i, \psi_{1,k}^i, \psi_{2,k}^i \rangle$ за формулою (8). Функції φ_k^i використовуються також для наближення шуканої функції тиску p. Позначимо

$$\bar{w}_j = \begin{cases} \bar{v}_j^1, & 1 \le j \le N_1, \\ \bar{v}_j^2, & N_1 < j \le N_1 + N_2, \\ \bar{v}_j^3, & N_1 + N_2 < j \le N_1 + N_2 + N_3, \end{cases}$$

$$\phi_j = \begin{cases} \omega^2 \varphi_j^1, & 1 \le j \le N_1, \\ \omega^2 \varphi_j^2, & N_1 < j \le N_1 + N_2, \\ \omega^2 \varphi_j^3, & N_1 + N_2 < j \le N_1 + N_2 + N_3, \end{cases}$$

де $j=\overline{1,N}$, $N=N_1+N_2+N_3$. Задамо комплексне число ω. Наближений розв'язок $\bar{v}_N$ задачі (5) шукаємо у вигляді

$$\bar{v}_N = \sum_{k=1}^{N} a_k \bar{w}_k.$$

Тоді відповідне наближення p_N для функції тиску буде таким:

$$p_N = \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_k.$$

Наближення f_{N_4} для функції f в задачі (5) шукаємо у вигляді

$$f_{N_4} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N_4} b_k f_k & \text{при} \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \\ \sum\limits_{k=1}^{N_4} b_k g_k & \text{при} \quad m = 0. \end{cases}$$

Підставимо одержані $\bar{v}_N$, p_N, f_{N_4} у функціонал K і визначимо невідомі коефіцієнти a_k, b_k з умов його стаціонарності:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(\bar{v}_N, p_N, f_{N_4}, H)}{\partial a_i} &= 0, \qquad i = \overline{1, N}, \\ \frac{\partial K(\bar{v}_N, p_N, f_{N_4}, H)}{\partial b_j} &= 0, \qquad j = \overline{1, N_4}. \end{aligned} \qquad (19)$$

Звідси отримуємо матричну спектральну задачу

$$\begin{pmatrix} A & \omega B \\ \omega B^T & -H^2 C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \qquad (20)$$

зі спектральним параметром H^2 та фіксованим значенням ω. Матриці й вектори у постановці (20) мають такий вигляд:

$$A_{ij} = \omega^2 T(\bar{w}_i, \bar{w}_j) - E(\bar{w}_i, \bar{w}_j),$$
$$i = \overline{1,N}, \quad j = \overline{1,N};$$

$$B_{ij} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 r\left(2\frac{\partial w_{z,i}}{\partial z}\bigg|_{z=0} - \phi_i\right)\left\{\begin{array}{c} f_j \\ g_j \end{array}\right\} dr d\eta,$$
$$i = \overline{1,N}, \quad j = \overline{1,N_4};$$

$$C_{ij} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 r\left(\left\{\begin{array}{c} f_i \\ g_i \end{array}\right\} \times \left\{\begin{array}{c} f_j \\ g_j \end{array}\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{B}\nabla\left\{\begin{array}{c} f_i \\ g_i \end{array}\right\}\nabla\left\{\begin{array}{c} f_j \\ g_j \end{array}\right\}\right) dr d\eta,$$
$$i = \overline{1,N_4}, \quad j = \overline{1,N_4}.$$

При обчисленнi B_{ij}, C_{ij} слiд вибирати f_i, якщо $m=1,2,3,\ldots$, i g_i, якщо $m=0$; α – вектор-стовпчик коефiцiєнтiв a_k; β – вектор-стовпчик коефiцiєнтiв b_k.

Для того щоб при заданому значеннi числа Галiлея H_0 визначити власнi значення λ задачi (3), скористаємось методом хорд. Це еквiвалентно визначенню ω в задачi (5) при заданому H_0, тому при реалiзацiї описаного вище алгоритму її розв'язування отримуємо H як функцiю вiд ω. Розглянемо функцiю

$$g(\omega) = H(\omega) - H_0$$

i визначимо комплексне число ω^*, при якому $g(\omega^*)=0$. Задамо початкове значення $\omega_1 = \sqrt{\mu_k H_0}$, де $\mu_k = \sqrt{\xi_k \mathrm{th}\,(\xi_k h)}$. Покладемо $\omega_a = \omega_1 + \Delta$. Згiдно з методом хорд [22], $(n+1)$-ше наближення ω^* шукаємо у виглядi

$$\omega_{n+1} = \omega_n - \frac{g(\omega_n)(\omega_n - \omega_a)}{g(\omega_n) - g(\omega_a)}, \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{21}$$

Рекурентний процес (21) повторюватимемо поки $|g(\omega_{n+1})| > \epsilon$, пiсля чого покладемо $\omega^* = \omega_{n+1}$. При розрахунках приймалося $\Delta = (1+i)/10$, $\epsilon = 5\cdot 10^{-11}$. Знаючи H_0 i ω^*, можна визначити власнi значення λ задачi (3) за формулою

$$\lambda = \frac{(\omega^*)^2}{H_0}.$$

Вкажемо спосiб, яким можна знайти елементи матрицi A, обчислюючи квадратури лише по межi областi Ω. Вважатимемо, що вектор-функцiї $\bar{v}$, $\bar{u}$ задовольняють рiвняння (6), i використовуватимемо позначення

$$(\bar{v}, \bar{u}) = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3.$$

Тодi в декартовiй системi координат

$$\omega^2 T(\bar{v},\bar{u}) - E(\bar{v},\bar{u}) = \omega^2 \int\limits_\Omega (\bar{v},\bar{u}) d\Omega -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j,=1}^{3}\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) d\Omega =$$
$$= \omega^2 \int\limits_\Omega (\bar{v},\bar{u}) d\Omega -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) u_i\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) u_j\right)\right) d\Omega +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_\Omega \left(\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j}\right) u_i + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2}\right) u_j\right) d\Omega =$$
$$= \omega^2 \int\limits_\Omega (\bar{v},\bar{u}) d\Omega + \int\limits_\Omega (\Delta\bar{v},\bar{u}) d\Omega -$$
$$-\sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) u_j\right) d\Omega =$$
$$= \int\limits_\Omega (\omega^2\bar{v} + \Delta\bar{v} - \nabla p, \bar{u}) d\Omega + \int\limits_\Omega (\nabla p, \bar{u}) d\Omega -$$
$$-\sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \cos(\bar{n}, x_i) u_j dS =$$
$$= \int\limits_{\partial\Omega} \left(p\sum_{i=1}^{3} u_i \cos(\bar{n}, x_i) - \right.$$
$$\left. -\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \cos(\bar{n}, x_i) u_j\right) dS.$$

У цилiндричнiй системi координат

$$\omega^2 T(\bar{v},\bar{u}) - E(\bar{v},\bar{u}) =$$
$$= \int\limits_{\partial\Omega} (u_r, u_\eta, u_z) U(\bar{v}) \left(\begin{array}{c} \cos(\bar{n},\bar{r}) \\ \cos(\bar{n},\bar{\eta}) \\ \cos(\bar{n},\bar{z}) \end{array}\right) dS,$$

де елементи матриці $U(\bar{v})$ мають такий вигляд:

$$U_{11} = -2\frac{\partial v_r}{\partial r} + p;$$

$$U_{1,2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \eta} - \frac{\partial v_\eta}{\partial r} + \frac{v_\eta}{r}\,;$$

$$U_{1,3} = -\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z}\,;$$

$$U_{22} = -2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} + \frac{v_r}{r}\right) + p;$$

$$U_{23} = -\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \eta} - \frac{\partial v_\eta}{\partial z}\,; \qquad U_{33} = -2\frac{\partial v_z}{\partial z} + p;$$

$$U_{21} = U_{12}; \qquad U_{31} = U_{13}; \qquad U_{32} = U_{23}.$$

5. ПОРІВНЯННЯ З ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМИ ДАНИМИ Й АСИМПТОТИЧНИМ МЕТОДОМ

У праці [14] за допомогою лазерної методики вимірювань досліджувались власні частоти й декременти згасання коливань вільної поверхні рідини. Експерименти проводились у двох прямих кругових циліндрах, заповнених до країв. Їхні висоти d були відповідно 2.764 ± 0.005 і 1.180 ± 0.005 см, а відношення радіуса до висоти – $\Lambda = R/d = 0.725$ і 4.33. У дослідах використовувались силіконові олії й високоочищена вода. Зазначимо, що завдяки такому вибору рідин практично вдається уникнути ефекту забруднення вільної поверхні. Останній призводить до утворення поверхневої плівки, яка суттєво впливає на результати вимірювань. Для кожного циліндра верхній край, який межує з вільною поверхнею рідини, заточувався, а при використанні силіконових олій – додатково покривався фторполімером. Така обробка дозволила досягти того, що лінія контакту рідини, повітря й твердої стінки циліндра залишалась нерухомою. У початковому положенні незбурена вільна поверхня рідини була плоскою.

У статті [7] запропоновано асимптотичний метод обчислення власних частот і декрементів згасання коливань вільної поверхні рідини. Тут розв'язок задачі (3) будувався у вигляді ряду по степенях малого параметра $H^{-1/2}$. При цьому враховувались поверхневий натяг і дисипація енергії як в примежевих шарах біля стінок циліндра, так і у всьому об'ємі рідини. Було встановлено, що дисипація енергії в примежевому шарі біля вільної поверхні має порядок $H^{-3/2}$. В асимптотичному методі вона не враховувалася. При побудові розв'язку використовували три члени асимптотичного ряду – доданки при степенях H^0, $H^{-1/2}$ і H^{-1}. Наголосимо, що в попередніх працях [1, 2, 4 – 6] зберігались лише два доданки (при степенях H^0, $H^{-1/2}$), а також не завжди враховувались поверхневий натяг і дисипація енергії в об'ємі рідини. Таким чином, метод [7] є найбільш точним з відомих авторам асимптотичних методів розрахунку власних частот і декрементів коливань.

У праці [8] наведено наближений метод побудови розв'язку задачі (3) для прямого кругового циліндра. Він грунтується на відокремленні кругової координати η і поданні шуканого розв'язку у вигляді суми рядів, координатні функції в яких задовольняють рівняння задачі (3) всередині області. Невідомі коефіцієнти в рядах визначаються так, щоб задовольнити крайові умови задачі (3). Частину коефіцієнтів було знайдено точно, а інші – наближено, так, щоб нев'язка деяких крайових умов задачі (3) була ортогональна до повних систем функцій $\{J_m(\xi_k r)/J_m(\xi_k)\}_{k=1}^{\infty}$ або $\{\sin(s_k z)\}_{k=1}^{\infty}$.

Порівняємо експериментальні дані [14] ($\alpha_{\text{е}}$, $\beta_{\text{е}}$) з результатами, одержаними асимптотичним [7] ($\alpha_{\text{ас}}$, $\beta_{\text{ас}}$), наближеним [8] ($\alpha_{\text{н}}$, $\beta_{\text{н}}$) і запропонованим нами проекційним методом ($\alpha_{\text{пр}}$, $\beta_{\text{пр}}$). Декременти $\alpha_{\text{пр}}$ і частоти $\beta_{\text{пр}}$ виражаються через власні числа λ задачі (3) як $\alpha_{\text{пр}} = \mathbf{Re}\,(\lambda)$, $\beta_{\text{пр}} = \mathbf{Im}\,(\lambda)$. При розрахунках проекційним методом використовувалась така кількість координатних функцій: $N_1 = N_2 = N_3 = 5$, $N_4 = 10$.

У табл. 1 наведено результати порівняння для циліндра з відношенням $\Lambda = 0.725$, заповненого високоочищеною водою, $B = 103.2$, подані в тому ж порядку, як і у праці [14]. У першій колонці вказано величину $1/H$, обернену до числа Галілея, у другій – впорядковану пару (mn), яка визначає моду коливань. Тут m – кількість вузлових діаметрів на вільній поверхні (азимутальне хвильове число [6]), n – кількість вузлових кіл на вільній поверхні ($(n+1)$ – номер частоти коливань). Третя й четверта колонки дають обчислені проекційним методом частоту $\beta_{\text{пр}}$ й декремент $\alpha_{\text{пр}}$. Представлені в подальших колонках відносні величини характеризують, наскільки обчислені проекційним та асимптотичним [7] методами частоти й декременти близькі до експериментальних значень.

Аналогічні результати зведено в табл. 2. Тут циліндр з відношенням $\Lambda = 0.725$ заповнювався силіконовими оліями. В експериментах число Бонда B варіювалося в межах $357 \le B \le 374$, що, як стверджують автори [14], мало впливало на вимірювані частоти й декременти. При розрахунках проекційним методом приймалося $B = (357+374)/2 = 365.5$.

У статті [14] наведено дані для ширшої множи-

Табл 1. Порівняння запропонованого проекційного методу, експериментальних даних [14] й асимптотичного методу [7] для випадку заповнення циліндра високоочищеною водою при $\Lambda=0.725$, $B=103.2$

$1/H$	Мода	$\beta_{пр}$	$\alpha_{пр}$	β_{ac}/β_e	α_{ac}/α_e	$\beta_{пр}/\beta_e$	$\alpha_{пр}/\alpha_e$
$6.354\cdot10^{-5}$	(10)	1.5583	0.0048274	1.007	1.046	1.007	1.045
$6.215\cdot10^{-5}$	(20)	2.1176	0.0070952	1.007	0.984	1.007	0.981
$6.215\cdot10^{-5}$	(01)	2.2878	0.0038834	1.007	0.879	1.007	0.887
$6.354\cdot10^{-5}$	(30)	2.6128	0.0095734	1.008	0.990	1.008	0.979

Табл 2. Порівняння запропонованого проекційного методу, експериментальних даних [14] й асимптотичного методу [7] для випадку заповнення циліндра силіконовими оліями при $\Lambda=0.725$, $B=365.5$

$1/H$	Мода	$\beta_{пр}$	$\alpha_{пр}$	β_{ac}/β_e	α_{ac}/α_e	$\beta_{пр}/\beta_e$	$\alpha_{пр}/\alpha_e$
$7.647\cdot10^{-5}$	(10)	1.4479	0.0058629	1.006	0.963	1.007	0.974
$7.647\cdot10^{-5}$	(20)	1.9137	0.0089176	1.006	0.973	1.008	0.988
$7.647\cdot10^{-5}$	(01)	2.0913	0.0049148	1.004	0.948	1.006	0.953
$7.647\cdot10^{-5}$	(30)	2.2907	0.011838	1.006	0.996	1.008	1.009
$7.647\cdot10^{-5}$	(11)	2.5192	0.0079582	1.005	0.948	1.007	0.970
$7.647\cdot10^{-5}$	(40)	2.6322	0.014835	1.006	0.946	1.009	0.955
$1.731\cdot10^{-3}$	(10)	1.428	0.040378	1.009	1.088	1.008	0.961
$1.731\cdot10^{-3}$	(20)	1.8842	0.073656	1.01	1.132	1.008	0.980
$1.738\cdot10^{-3}$	(01)	2.0777	0.064719	1.008	1.135	1.006	0.981
$1.759\cdot10^{-3}$	(30)	2.2514	0.11371	1.012	1.13	1.008	0.975
$1.752\cdot10^{-3}$	(11)	2.496	0.11463	1.01	1.13	1.005	0.980
$3.670\cdot10^{-3}$	(10)	1.4164	0.068182	1.011	1.197	1.008	1.002
$3.684\cdot10^{-3}$	(20)	1.8643	0.13021	1.013	1.169	1.007	0.955
$3.705\cdot10^{-3}$	(01)	2.0643	0.125	1.01	1.193	1.003	0.983

Табл 3. Порівняння запропонованого проекційного методу, експериментальних даних [14] і наближеного методу [8] для моди (01) для випадку заповнення циліндра силіконовими оліями при $\Lambda=0.725$, $B=365.5$

$1/H$	$\beta_{пр}$	$\alpha_{пр}$	β_e	α_e	$\beta_н$	$\alpha_н$
10^{-5}	2.0929	0.001186	–	–	2.091	0.00109
$7.647\cdot10^{-5}$	2.0914	0.0049143	2.079	0.0052	2.090	0.0047
$1.557\cdot10^{-4}$	2.0903	0.008531	2.075	0.0088	2.089	0.0083
$3.816\cdot10^{-4}$	2.0880	0.017713	2.075	0.0181	2.087	0.0175
$7.591\cdot10^{-4}$	2.0849	0.031672	2.072	0.0332	2.084	0.0314
$1.738\cdot10^{-3}$	2.0778	0.064718	2.066	0.0660	2.077	0.0643
$3.705\cdot10^{-3}$	2.0644	0.125	2.059	0.127	2.062	0.1245
10^{-2}	2.0118	0.28836	–	–	2.009	0.292
$4\cdot10^{-2}$	1.6252	0.86744	–	–	1.656	0.840
10^{-1}	0.61511	1.5585	–	–	0.685	1.552

ни значень C, а також для циліндра з $\Lambda=4.33$ при $1223\leq B\leq1280$ (заповнення – силіконові олії). За браком місця, тут ми обмежились ілюстрацією випадків для високоочищеної води і силіконових олій при $\Lambda=0.725$ при "малих" (порядку 10^{-5}) і "великих" (порядку 10^{-3}) значень C. Втім, при формулюванні висновків брались до уваги всі експериментальні дані, представлені в [14].

У табл. 3 наведено результати для моди (01) у випадку, коли циліндр з $\Lambda=0.725$ заповнювався силіконовими оліями ($B = 365$). З неї видно, як співвідносяться між собою результати, отримані за допомогою запропонованого проекційного й наближеного [8] методів з експериментом [14].

ВИСНОВКИ

З табл. 1 – 3 видно, що знайдені проекційні частоти коливань добре узгоджуються з експериментальними (в усіх випадках вони відрізняються між собою на ≤ 1 %. Відзначимо, що проекційні декременти також близькі до експериментальних. Єдиний виняток становить мода (01) у випадку, коли циліндр заповнювався високоочищеною водою. Для неї відхилення проекційного декремента від експериментального складає 11.3 %. Зазначимо, що при цьому асимптотичний метод дає навіть трохи гіршу похибку – 12.1 %. Таку невідповідність теоретичних розрахунків і експериментальних даних відзначено в працях [6,7,14]. Автори [14] пояснюють її ефектом забруднення вільної поверхні рідини, якого не вдалося уникнути навіть під час експериментів з високоочищеною водою.

Без урахування моди (01) для високоочищеної води відхилення проекційного декремента від експериментального не перевищує 7.9 % і загалом складає 2.3 %. Разом з тим, середнє відхилення асимптотичного декремента від експериментального дорівнює 4.9 %, а максимальне – 19.7 %.

Зауважимо, що при $H > 10^3$ як проекційний, так і асимптотичний методи дають значення декрементів, однаково близькі до експериментальних. При $H < 10^3$ відхилення асимптотичного декремента від експериментального перевищує 10 % і в найгірших випадках досягає 19.7 %. Одночасно, за допомогою проекційного методу вдається з достатньо високою точністю обчислювати частоти і декременти при будь-яких значеннях H.

Зі статті [8] відомо, що наближений метод, на відміну від асимптотичного, добре узгоджується з експериментом на всьому діапазоні значень числа Галілея. З табл. 3 також видно, що обчислені частоти $\beta_{\text{пр}}$ і декременти $\alpha_{\text{пр}}$ близькі відповідно до $\beta_{\text{н}}$ й $\alpha_{\text{н}}$. Це означає, що запропонований проекційний метод добре узгоджується з наближеним методом [8] і дає приблизно ту саму точність, хоча має інше підгрунтя, базуючись на побудові функціоналу K, стаціонарні значення якого досягаються на розв'язках задачі (3). Після побудови відповідної системи координатних функцій проекційний підхід може бути узагальнено на порожнини більш складної форми, ніж циліндр.

1. *Case K. M., Parkinson W. C.* Damping of surface waves in an incompressible liquid // J. Fluid Mech.– **2**.– 1957.– P. 172–184.
2. *Keulegan G. H.* Energy dissipation in standing waves in rectangular basins // J. Fluid Mech.– **6**.– 1959.– P. 33–50.
3. *Крейн С. Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде // Докл. АН СССР.– 1964.– **159**, N 2.– С. 262–265.
4. *Miles J. W.* Surface wave damping in closed basins // Proc. Roy. Soc. London.– **A297**.– 1967.– P. 459–475.
5. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими жидкость.– М.: ВЦ АН СССР, 1968.– 230 с.
6. *Henderson D. M., Miles J. W.* Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line // J. Fluid Mech.– 1994.– **275**.– P. 285–299.
7. *Martel C., Nicolas J. A., Vega J. M.* Surface-wave damping in a brimful circular cylinder // J. Fluid Mech.– 1998.– **360**.– P. 213–228.
8. *Nicolas J. A.* The viscous damping of capillary-gravity waves in a brimful circular cylinder // Phys. Fluids.– 2002.– **14**.– P. 1910–1919.
9. *Ibrahim R. A.* Liquid sloshing dynamics.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.– 948 p.
10. *Kidambi R.* Oscillations of a viscous free surface with pinned contact line // Fluid Dyn. Resch.– 2007.– **39**.– P. 121–138.
11. *Nicolas J. A., Vega J. M.* A note on the effect of surface contamination in water wave damping // J. Fluid Mech.– 2000.– **410**.– P. 367–373.
12. *Pomeau Y.* Recent progress in the moving contact-line problem: A review // C. R. Acad. Sci. Mech.– 2002.– **330**.– P. 207–222.
13. *Гузь А. Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости.– К.: АСК, 1998.– 350 с.
14. *Howell D. R., Buhrow B., Heath T., McKenna C., Hwong W., Schatz M. F.* Measurements of surface-wave-damping in a container // Phys. Fluids.– 2000.– **12**.– P. 322–326.
15. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости.– М.: Наука, 1976.– 504 с.
16. *Мак-Коннел А. Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике.– М.: Физматгиз, 1963.– 411 с.
17. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна.– М.: ОНТИ, 1935.– 332 с.
18. *Барняк М. Я.* Проекційний метод побудови розв'язків задачі про власні коливання в'язкої рідини в посудині // Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки. Праці Українського математичного конгресу 2001.– К.: Ін-т математики НАН України, 2002.– С. 5–24.
19. *Копачевский Н. Д.* О задаче Коши для малых колебаний вязкой жидкости в слабом поле массовых сил // Ж. выч. мат. физ.– 1987.– **7**, N 1.– С. 128–146.
20. *Барняк М. Я.* Применение метода ортогональных проекций к исследованию малых колебаний жидкости в сосуде // Мат. физ. нелиней. мех.– 1988.– **10(44)**.– С. 37–43.
21. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям.– М.: Наука, 1979.– 832 с.
22. *Демидович Б. И., Марон И. А.* Основы вычислительной математики.– М.: Наука, 1966.– 664 с.