

УДК 539.3

К ДИНАМИКЕ СЛОЖНОЙ РОТОРНОЙ КОНСТРУКЦИИ НА БАЗЕ ДВУХСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

ЯН, ФУЦЗЯН, А. Ф. УЛИТКО

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

Получено 05.06.2008

Проанализированы простейшие случаи колебаний двухслойной оболочки ротора центрифуги. Найдены соответствующие низшие резонансные частоты, которые могут оказаться близкими к угловой скорости вращения. Изучена радиальная деформация кольцевой пластины переменной толщины (элемента ротора). Проведен сравнительный анализ взаимного деформирования элементов конструкции во время вращения с заданной угловой скоростью.

Проаналізовано найпростіші випадки коливань двошарової оболонки ротора центрифуги. Знайдені відповідні найнижчі резонансні частоти, які можуть виявитись близькими до кутової швидкості обертання. Вивчено радіальну деформацію кільцевої пластини змінної товщини (елемента ротора). Проведено порівняльний аналіз взаємного деформування елементів конструкції під час обертання з заданою кутовою швидкістю.

The paper deals with analyzing of the simplest steady vibration cases for the rotor of a centrifugal unit. The corresponding lowest resonance frequencies, that may occur close to rotation angular velocity, have been determined. The radial deformation of the ring plate of variable thickness (being the element of the rotor) is studied. Mutual deformations of construction elements rotating with the preset angular velocity are compared.

ВВЕДЕНИЕ

Детальное исследование собственного спектра и форм колебаний двухслойной цилиндрической оболочки важно для проектирования современных роторов трубчатых центрифуг [1]. Необходимость расчета амплитудно-частотных характеристик оболочки, даже без учета кориолисовых эффектов в собственных колебаниях, следует из того, что частота вращения конструкции и низшие частоты колебаний оболочки зачастую находятся в непосредственной близости одна от другой. Благодаря физической связанности двух типов движения – вращения и упругих колебаний – в центрифуге могут возникнуть опасные динамические режимы, приводящие к потере устойчивости движения или даже к разрушению конструкции ротора.

В связи с этим в данной статье будут проанализированы частоты собственных колебаний двухслойной цилиндрической оболочки, соответствующие различным модам ее деформирования. Рассматриваются изгибные колебания вдоль оси, крутильные колебания вокруг оси, продольные и радиальные колебания; определяются соответствующие им низшие резонансные частоты, которые могут оказаться близкими по величине к угловой скорости вращения. При постановке задачи получены уравнения колебаний в прогибах при точном учете приведенных жесткостных характеристик и при специальном задании поверхности приведе-

ния [2]. Дополнительно учитывается влияние растяжения срединной поверхности на изгиб.

Кроме того, нас будет интересовать анализ взаимного деформирования элементов конструкции ротора, включающий данные об амплитудах перемещений его частей (двухслойной оболочки, пластин переменной толщины и др.) с целью оценки деформаций, возникающих в сечениях сочленения в рабочем режиме.

1. СТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ РОТОРА ЦЕНТРИФУГИ

Двухслойная цилиндрическая оболочка ротора центрифуги состоит из слоев с разными толщинами и физическими свойствами (рис. 1):

- 1) внешний армирующий слой – стекловолоконная намотка, трансверсально-изотропный композитный материал;
- 2) внутренний слой – алюминий, изотропный материал.

Вследствие этого для вывода уравнений колебаний двухслойной оболочки в каждом из слоев следует использовать свои соотношения для упругой деформации.

В трансверсально-изотропном внешнем слое стекловолоконной намотки соотношения обобщен-

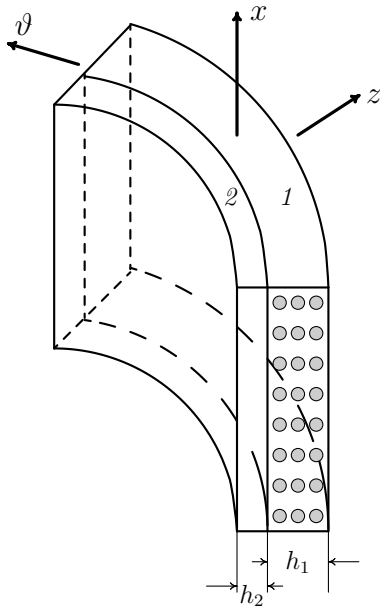


Рис. 1. Двухслойный анизотропный элемент ротора центрифуги

ного закона Гука могут быть записаны в виде [3]

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\theta} &= s_{13}(\sigma_x + \sigma_z) + s_{33}\sigma_{\theta}, \\
 \varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_z + s_{13}\sigma_{\theta}, \\
 \varepsilon_z &= s_{12}\sigma_x + s_{11}\sigma_z + s_{13}\sigma_{\theta}, \\
 \varepsilon_{xz} &= 2(s_{11} - s_{12})\tau_{xz}, \\
 \varepsilon_{x\theta} &= s_{44}\tau_{x\theta}, \quad \varepsilon_{z\theta} = s_{44}\tau_{z\theta},
 \end{aligned} \quad (1)$$

где s_{11}, s_{12}, \dots – компоненты тензора податливости материала. С учетом гипотез Кирхгофа – Лява прикладной теории оболочек ($\sigma_z \equiv 0$) уравнения, разрешенные относительно напряжений, записываются так:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta} &= \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2}(\varepsilon_{\theta} + \nu_1\varepsilon_x), \\
 \sigma_x &= \frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2}(\varepsilon_x + \nu_2\varepsilon_{\theta}), \\
 \tau_{xz} &= \frac{E_2}{2(1 + \nu_3)}\varepsilon_{xz}, \\
 \tau_{x\theta} &= G_{1,2}\varepsilon_{x\theta}, \quad \tau_{z\theta} = G_{1,2}\varepsilon_{z\theta}.
 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $E_1 = 1/s_{33}$ и $E_2 = 1/s_{11}$ – модули упругости вдоль и поперек волокон соответственно; $G_{1,2} = 1/s_{44}$ – модуль сдвига вдоль волокон; $\nu_1 = -s_{13}/s_{11}$ и $\nu_2 = -s_{13}/s_{33}$ – коэффициенты Пуассона поперек и вдоль волокон соответственно

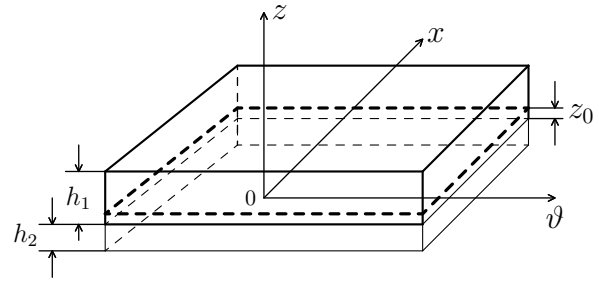


Рис. 2. Поверхность приведения двухслойного анизотропного элемента

(при этом $\nu_1 = \nu_2 E_2/E_1$); $\nu_3 = -s_{12}/s_{11}$ – коэффициент Пуассона по толщине оболочки.

В однородном изотропном слое алюминиевой основы с коэффициентом Пуассона ν , модулем упругости E и модулем сдвига G соотношения закона Гука имеют общепринятый вид:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta} &= \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_{\theta} + \nu\varepsilon_x), \\
 \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_{\theta}),
 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\tau_{xz} = G\varepsilon_{xz}, \quad \tau_{x\theta} = G\varepsilon_{x\theta}, \quad \tau_{z\theta} = G\varepsilon_{z\theta}.$$

При записи соотношений упругой деформации двухслойного элемента оболочки отсчет толщиной координаты z ведем от поверхности соединения слоев алюминия и стекловолокна. Расположение слоев по толщине определяется следующими неравенствами:

- 1) для слоя стекловолокна $-0 \leq z \leq h_1$;
- 2) для слоя алюминия $-h_2 \leq z \leq 0$.

При этом положение поверхности приведения z_0 наперед не известно (рис. 2).

Согласно соотношениям (2) и (3), с учетом выражений для деформаций $\varepsilon_{\theta}, \varepsilon_x, \varepsilon_{x\theta}$ через осевые деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, деформацию сдвига γ_{12} , кривизны $\chi_{\theta}, \chi_x, \chi_{\theta x}$ [4] и координату поверхности приведения z_0

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\theta} &= \varepsilon_1 - \chi_{\theta}(z - z_0), \\
 \varepsilon_x &= \varepsilon_2 - \chi_x(z - z_0), \\
 \varepsilon_{x\theta} &= \gamma_{12} - 2\chi_{\theta x}(z - z_0),
 \end{aligned} \quad (4)$$

напряжения в каждом из слоев можно записать как

$$\sigma_{\theta}^{(1)} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} [(\varepsilon_1 + \nu_1 \varepsilon_2) - (z - z_0) (\chi_{\theta} + \nu_1 \chi_x)],$$

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} [(\varepsilon_2 + \nu_2 \varepsilon_1) - (z - z_0) (\chi_x + \nu_2 \chi_{\theta})],$$

$$\tau_{x\theta}^{(1)} = G_{1,2} [\gamma_{12} - (z - z_0) 2 \chi_{\theta x}],$$

$$\sigma_{\theta}^{(2)} = \frac{E}{1 - \nu^2} [(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) - (z - z_0) (\chi_{\theta} + \nu \chi_x)],$$

$$\sigma_x^{(2)} = \frac{E}{1 - \nu^2} [(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) - (z - z_0) (\chi_x + \nu \chi_{\theta})],$$

$$\tau_{x\theta}^{(2)} = G [\gamma_{12} - (z - z_0) 2 \chi_{\theta x}].$$

После осреднения этих выражений по толщинам слоев h_1 и h_2 получаем весьма громоздкие выражения для механических характеристик двухслойного элемента: перерезывающих сил, изгибающих моментов, приведенных изгибных жесткостей, модулей сдвига, коэффициентов Пуассона и т. п. К примеру, для расчета сил и моментов используются формулы

$$N_{\theta} = \int_{-h_2}^0 \sigma_{\theta}^{(2)} dz + \int_0^{h_1} \sigma_{\theta}^{(1)} dz =$$

$$= \left(\frac{E h_2}{1 - \nu^2} + \frac{E_1 h_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \right) \varepsilon_1 +$$

$$+ \left(\nu \frac{E h_2}{1 - \nu^2} + \nu_1 \frac{E_1 h_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \right) \varepsilon_2 +$$

$$+ \left[\frac{E h_2}{1 - \nu^2} \left(\frac{h_2}{2} + z_0 \right) - \frac{E_1 h_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\frac{h_1}{2} - z_0 \right) \right] \chi_{\theta} +$$

$$+ \left[\nu \frac{E h_2}{1 - \nu^2} \left(\frac{h_2}{2} + z_0 \right) - \nu_1 \frac{E_1 h_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\frac{h_1}{2} - z_0 \right) \right] \chi_x,$$

$$M_{\theta} = \int_{-h_2}^0 \sigma_{\theta}^{(2)} (z - z_0) dz +$$

$$+ \int_0^{h_1} \sigma_{\theta}^{(1)} (z - z_0) dz =$$

$$= \left[\frac{E_1 h_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\frac{h_1}{2} - z_0 \right) - \frac{E h_2}{1 - \nu^2} \left(\frac{h_2}{2} + z_0 \right) \right] \varepsilon_1 +$$

$$+ \left[\nu_1 \frac{E_1 h_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\frac{h_1}{2} - z_0 \right) - \nu \frac{E h_2}{1 - \nu^2} \left(\frac{h_2}{2} + z_0 \right) \right] \varepsilon_2 -$$

$$- \frac{1}{3} \left[\frac{E h_2}{1 - \nu^2} (h_2^2 + 3 h_2 z_0 + 3 z_0^2) + \frac{E_1 h_1}{1 - \nu_1 \nu_2} (h_1^2 - 3 h_1 z_0 + 3 z_0^2) \right] \chi_{\theta} -$$

$$- \frac{1}{3} \left[\nu \frac{E h_2}{1 - \nu^2} (h_2^2 + 3 h_2 z_0 + 3 z_0^2) + \nu_1 \frac{E_1 h_1}{1 - \nu_1 \nu_2} (h_1^2 - 3 h_1 z_0 + 3 z_0^2) \right] \chi_x.$$

Величины N_x , $N_{\theta x}$, $M_{x\theta}$, M_x выражаются аналогичным образом.

Значение поверхности приведения z_0 определяется из условия статического баланса сил и моментов (7), (8) при выполнении условия $\nu_2 = \nu$ [2]:

$$z_0 = \frac{1}{2} h_1 \frac{1 - \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{1 - \nu^2} \frac{E}{E_2} \frac{h_2^2}{h_1^2}}{1 + \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{1 - \nu^2} \frac{h_2}{h_1} \frac{E}{E_2}}. \quad (9)$$

Уравнения колебаний двухслойной оболочки устанавливаются из условий баланса всех сил и моментов, действующих на ее элемент, включая силы инерции и центробежные силы. Согласно [4],

эти условия могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{b} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} &= (\rho h_2 + \rho_1 h_1) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{b} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{b} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - \frac{1}{b^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} &= \\ &= (\rho h_2 + \rho_1 h_1) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{N_\theta}{b} + \frac{1}{b} \frac{\partial^2 M_{\theta x}}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{b} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \Omega_0^2 b (\rho h_2 + \rho_1 h_1) = \\ &= (\rho h_2 + \rho_1 h_1) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь Ω_0 – заданная угловая скорость вращения; ρ и ρ_1 – плотности слоев; b – внешний радиус оболочки. Выразим входящие в формулы (7), (8) деформации и кривизны через прогибы [4]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_\theta &= \frac{1}{b} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{b}, \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \gamma_{12} = \gamma_{\theta x} &= \frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \chi_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \chi_\theta &= \frac{1}{b^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \\ \chi_{\theta x} &= \frac{1}{b} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда на основании соотношений (10) приходим к следующей общей системе уравнений колебаний двухслойной оболочки:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{G^*(h_1+h_2)}{D_N^{(0)}} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \\ &+ \left(\nu + \frac{G^*(h_1+h_2)}{D_N^{(0)}} + \frac{2g^*}{bD_N^{(0)}} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \theta} - \nu \frac{\partial w}{\partial \xi} + \\ &+ \frac{2g^*}{bD_N^{(0)}} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \theta^2} = \frac{b^2}{c_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ &\left(\nu \nu^* + \frac{G^*(h_1+h_2)}{D_N^{(1)}} - \frac{g^*}{bD_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \\ &+ \left(\frac{G^*(h_1+h_2)}{D_N^{(1)}} + \frac{g^*}{bD_N^{(1)}} + \frac{\tilde{G}(h_1+h_2)^3}{b^2 D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \\ &+ \left(1 - \frac{2d_N^{(1)}}{bD_N^{(1)}} + \frac{D_M^{(1)}}{b^2 D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \\ &- \left(1 - \frac{d_N^{(1)}}{bD_N^{(1)}} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \left(\frac{D_M^{(1)}}{b^2 D_N^{(1)}} - \frac{d_N^{(1)}}{bD_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \\ &+ \left(\nu \frac{D_M^{(0)}}{b^2 D_N^{(1)}} + \frac{\tilde{G}(h_1+h_2)^3}{D_N^{(1)}} + \frac{2g^*}{bD_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \theta} = \\ &= \frac{b^2}{c_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ &\nu \nu^* \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(1 - \frac{d_N^{(1)}}{bD_N^{(1)}} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta} - w - \\ &- \frac{2d_N^{(1)}}{bD_N^{(1)}} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{D_M^{(0)}}{b^2 D_N^{(1)}} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - \\ &- 2 \left(\nu \frac{D_M^{(0)}}{b^2 D_N^{(1)}} + \frac{\tilde{G}(h_1+h_2)^3}{b^2 D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} - \\ &- \frac{D_M^{(1)}}{b^2 D_N^{(1)}} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{2g^*}{bD_N^{(1)}} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial \theta^2} + \\ &+ \left(\frac{2g^*}{bD_N^{(1)}} - 2 \frac{\tilde{G}(h_1+h_2)^3}{b^2 D_N^{(1)}} - \nu \frac{D_M^{(0)}}{b^2 D_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^2 \partial \theta} - \\ &- \left(\frac{D_M^{(1)}}{b^2 D_N^{(1)}} - \frac{d_N^{(1)}}{bD_N^{(1)}} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - b \left(\frac{\Omega_0 b}{c_1} \right)^2 = \\ &= \frac{b^2}{c_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\xi = x/b$ – безразмерная осевая координата, а радиальные прогибы w положительны по направ-

лению внутренней нормали к поверхности приведения z_0 .

Расчетные скорости упругих волн в осевом c_2 и окружном c_1 направлениях представляются формулами

$$c_2^2 = \frac{E_2}{\rho_1(1-\nu_1\nu_2)} \frac{1 + \frac{1-\nu_1\nu_2}{1-\nu^2} \frac{E}{E_2} \frac{h_2}{h_1}}{1 + \frac{\rho}{\rho_1} \frac{h_2}{h_1}},$$

$$c_1^2 = \frac{E_1}{\rho_1(1-\nu_1\nu_2)} \frac{1 + \frac{1-\nu_1\nu_2}{1-\nu^2} \frac{E}{E_1} \frac{h_2}{h_1}}{1 + \frac{\rho}{\rho_1} \frac{h_2}{h_1}}. \quad (13)$$

Столь же громоздкими выражениями представляются значения коэффициентов системы (12). К примеру,

$$\frac{G^*(h_1+h_2)}{D_N^{(0)}} = (1-\nu_1\nu_2) \times \frac{G}{E_2} \frac{1 + \frac{G}{G_{1,2}} \frac{h_2}{h_1}}{1 + \frac{1-\nu_1\nu_2}{1-\nu^2} \frac{E}{E_2} \frac{h_2}{h_1}},$$

$$\frac{2}{b} \frac{g^*}{D_N^{(0)}} = 2(1-\nu_1\nu_2) \frac{G_{1,2}}{E_2} \frac{h_1}{b} \times \frac{\frac{G}{G_{1,2}} \frac{h_2^2}{h_1^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{z_0}{h_2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{z_0}{h_1} \right)}{1 + \frac{1-\nu_1\nu_2}{1-\nu^2} \frac{E}{E_2} \frac{h_2}{h_1}},$$

$$\nu^* = \frac{E_2}{E_1} \frac{1 + \frac{1-\nu_1\nu_2}{1-\nu^2} \frac{E}{E_2} \frac{h_2}{h_1}}{1 + \frac{1-\nu_1\nu_2}{1-\nu^2} \frac{E}{E_1} \frac{h_2}{h_1}}. \quad (14)$$

В уравнениях колебаний оболочки слагаемое $(\Omega_0 b)^2/c_1^2$ учитывает статические центробежные силы, приводящие к радиальному растяжению оболочки. Здесь не выписаны члены для сил инерции вращательного движения, соответствующие кориолисовым и центробежным (от прогибов) ускорениям, наличие которых приводит к явлениям расщепления частот колебаний и прецессии окружных нормальных мод. Однако первоначальный анализ частотных спектров оболочки при заданных геометрических размерах и материальных параметрах можно провести и без учета этих сложных эффектов, ограничившись определением собственных спектров неподвижной оболочки.

2. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ РАЗЛИЧНЫМ ТИПАМ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧКИ

2.1. Изгибные колебания

В простейшем случае симметричного гладкого контакта на торцах оболочки $\xi = \pm l/b$ с сопрягающимися элементами конструкции центрифуги решение уравнений (12) выбираем в виде

$$u(\xi, \theta, t) = A \sin \lambda_n \xi \cos \theta e^{i\omega t},$$

$$v(\xi, \theta, t) = B \cos \lambda_n \xi \sin \theta e^{i\omega t}, \quad (15)$$

$$w(\xi, \theta, t) = C \cos \lambda_n \xi \cos \theta e^{i\omega t},$$

где

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi b}{l}.$$

Собственные частоты колебаний ω_n находятся по λ_n из весьма громоздких формул. Безразмерные значения их квадратов $\bar{\omega} = (b\omega)^2/c_1^2$ представлены в табл. 1, а натуральные величины $f = c_1 \sqrt{\bar{\omega}} / (2\pi b)$ – в табл. 2. При вычислениях внешний радиус оболочки выбирался равным $b = 7$ см, ее длина – $l = 50$ см и использовались стандартные значения материальных констант алюминия и стекловолоконной намотки [5].

Заметим, что хотя частота изгибного резонанса вдоль оси оболочки $f_1^{(0)} = 2175$ Гц оказалась сравнительно низкой, она все же намного превосходит величину допустимой угловой скорости вращения. При постановке иных краевых условий на торцах резонансная частота существенно понижается, так что при достаточно больших угловых скоростях ее значение может быть критическим. В то же время, серии резонансных частот $f_2^{(n)}$ и $f_3^{(n)}$ не являются критическими.

2.2. Крутильные колебания

В случае крутильных колебаний оболочки, симметричных относительно срединного поперечного сечения $\xi = 0$, из системы (12) получаем одно уравнение

$$\left(\frac{G^*(h_1+h_2)}{D_N^{(1)}} + \frac{g^*}{bD_N^{(1)}} + \frac{\tilde{G}(h_1+h_2)^3}{b^2 D_N^{(1)}} \right) \times \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = \left(\frac{b}{c_1} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (16)$$

Будем полагать, что колебания оболочки кососимметричны относительно $\xi = 0$, а ее торцы свободны

от напряжений. Тогда

$$v(\xi, t) = \widehat{v}(\xi) e^{i\omega t},$$

$$\chi^2 \frac{d^2 \widehat{v}}{d\xi^2} + \left(\frac{\omega b}{c_1}\right)^2 \widehat{v} = 0, \quad \left. \frac{d\widehat{v}}{d\xi} \right|_{\xi=\pm l/b} = 0. \quad (17)$$

Формы крутильных колебаний находятся из решения этой элементарной краевой задачи и имеют вид

$$\widehat{v}(\xi) = C_n \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi b}{l} \xi. \quad (18)$$

Круговые и натуральные значения последовательностей резонансных частот крутильных колебаний будут такими:

$$\omega_n = \chi \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi c_1}{l}, \quad (19)$$

$$f_n = \chi \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{c_1}{2l}. \quad (20)$$

Соответствующие величины, подсчитанные для первых трех мод колебаний, представлены в табл. 3. Видно, что даже при достаточно большой угловой скорости вращения все эти частоты не являются критическими.

2.3. Радиальные колебания

В случае чисто радиальных колебаний решение задачи является достаточно простым:

$$-w = \left(\frac{b}{c_1}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad w = w_0 e^{i\omega t}, \quad (21)$$

$$\omega_0 = \frac{c_1}{b}, \quad f_0 = \frac{c_1}{2\pi b} = 24119 \text{ Гц.}$$

Очевидно, что полученное значение нижней резонансной частоты намного превосходит любые допустимые угловые скорости вращения центрифуги.

Уместно также привести оценку окружных напряжений и деформаций от центробежной силы, связанных с прогибами w и возникающих в алюминиевом слое оболочки в зависимости от угловой скорости вращения Ω_0 (см. табл. 4):

$$\varepsilon_{\theta}^{Al} = -\frac{w}{b} = \left(\frac{\Omega_0 b}{c_1}\right)^2, \quad \sigma_{\theta}^{Al} = E\varepsilon_{\theta}^{Al}. \quad (22)$$

Эти величины оказались значительно меньшими допустимых значений, при которых могли бы возникнуть необратимые деформации или нарушение сплошности оболочки (расслоение).

Табл. 1. Безразмерные квадраты частот $\bar{\omega} = (b\omega)^2/c_1^2$

n	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
0	0.00865	0.13247	1.96064
1	0.06000	0.41390	2.03257
2	0.17390	0.95398	2.18730
3	0.31908	1.78688	2.42590

Табл. 2. Значения частот $f = c_1 \sqrt{\bar{\omega}} / (2\pi b)$, Гц

n	f_1	f_2	f_3
0	2175	8510	32738
1	5727	15031	33334
2	9750	22836	34579
3	13207	31254	36416

Табл. 3. Значения частот $f_n = \chi(2n+1)c_1/(4l)$, Гц

n	0	1	2
f_n	3132	9414	15689

Табл. 4. Деформации и напряжения на границе раздела слоев

Ω_0 , об/мин	10^4	$5 \cdot 10^4$	10^5
$\varepsilon_{\theta}^{Al}$	$0.5 \cdot 10^{-4}$	$1.25 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
σ_{θ}^{Al} , кг/см ²	35	875	3500

Заметим, что во вращающейся оболочке центрифуги крутильные и радиальные колебания оказываются связанными за счет кориолисовых ускорений. Поэтому для нее формулы (16), (17) и (21) теряют смысл. В статье [6] были изучены связанные по Кориолису колебания радиально-крутильного типа. В частности, установлено, что при угловой скорости вращения $\Omega = 10^4$ об/мин резонансные частоты уменьшаются примерно на 11 % от их расчетных значений в неподвижной оболочке, а амплитуды радиально-крутильных колебаний – в 1.8 раза.

2.4. Продольные колебания

В этом случае целесообразно рассмотреть решения для функции осевых перемещений $u(\xi, t)$,

Табл 5. Значения частот $f_n^{(1)} = (2n+1)c_2/(4l)$, Гц

n	0	1	2
$f_n^{(1)}$	2102	6306	10510

определяемые уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \left(\frac{b}{c_2}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \xi = \frac{x}{b}, \quad (23)$$

при двух различных типах условий на торцах оболочки. Так, в случае симметричных относительно срединного сечения колебаний с торцами, свободными от напряжений ($N_x=0, x=\pm l$), имеем

$$u(\xi, t) = \hat{u}(\xi) e^{i\omega t}, \quad (24)$$

$$\frac{d^2 \hat{u}}{d\xi^2} + \left(\frac{\omega b}{c_2}\right)^2 \hat{u} = 0, \quad \left. \frac{d\hat{u}}{d\xi} \right|_{\xi=\pm l/b} = 0.$$

При этом формы продольных колебаний оболочки и соответствующие им частоты находятся в виде

$$\hat{u}(\xi) = A_n \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi b}{l} \xi, \quad (25)$$

$$\omega_n^{(1)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi c_2}{l}, \quad (26)$$

$$f_n^{(1)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{c_2}{2l}. \quad (27)$$

Соответствующие первым трем нормальным модам колебаний значения натуральных частот $f_n^{(1)} = (2n+1)c_2/(4l)$ для свободных торцов оболочки представлены в табл. 5.

В случае колебаний с неподвижным нижним торцом оболочки собственные частоты уменьшаются в два раза:

$$f_n^{(2)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{c_2}{4l} = \frac{1}{2} f_n^{(1)}. \quad (28)$$

Хотя нормальные моды для этого типа деформации и не испытывают изменений за счет кориолисовых ускорений, полученные здесь данные следует учитывать при верхней и нижней опор центрифуги, в которых необходимо предусмотреть средства динамической стабилизации от продольных ускорений и нагрузок.

3. РАДИАЛЬНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

Прилегающие к торцам двухслойной оболочки кольцевые пластины переменной толщины изготовлены из изотропного упругого материала (постоянные E и ν), их внешний и внутренний радиусы равны b и a , а толщины по контуру – h_1 и h_0 , соответственно (рис. 3). Толщина пластины $h(r)$ является функцией ее радиуса и вводится по формуле

$$h(r) = \frac{h_0(b-r) + h_1(r-a)}{b-a}, \quad a \leq r \leq b. \quad (29)$$

При вращении пластины с постоянной угловой скоростью Ω_0 имеем случай осесимметричной деформации – перемещения частиц пластины будут чисто радиальными ($u_r = u(r)$). Тогда уравнение для расчета радиальной деформации пластины сводится к виду

$$h(r) \left[r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u \right] + r \frac{dh(r)}{dr} \left[r \frac{du}{dr} + \nu u \right] + \frac{\Omega_0^2}{c^2} r^3 h(r) = 0. \quad (30)$$

Здесь $c = \sqrt{E/(\rho(1-\nu^2))}$ – расчетная скорость продольных упругих волн в пластине. Подставив выражение (29) в формулу (30), получим разрешающее уравнение относительно $u(r)$:

$$\left[r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u \right] - \frac{r(h_0 - h_1)}{(bh_0 - ah_1) - r(h_0 - h_1)} \times \left[r \frac{du}{dr} + \nu u \right] + \frac{\Omega_0^2}{c^2} r^3 = 0. \quad (31)$$

В общем случае как на внутреннем, так и на внешнем контуре пластины граничные условия формулируются относительно растягивающих усилий N_r , т. е. в сечениях сопряжения с другими элементами конструкции должны выполняться соотношения

$$\left. \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) \right|_{r=a} = \frac{(1-\nu^2) N_r|_{r=a}}{E h_0}, \quad (32)$$

$$\left. \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) \right|_{r=b} = \frac{(1-\nu^2) N_r|_{r=b}}{E h_1}.$$

Построение аналитического решения нелинейного уравнения второго порядка (31) – достаточно

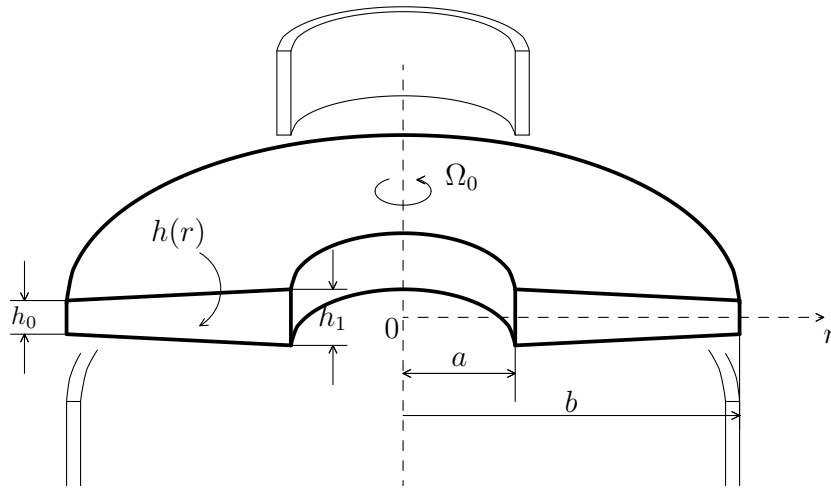


Рис. 3. Пластина переменной толщины в составе конструкции центрифуги

сложная задача. Тем не менее, поскольку кольцевые элементы переменной толщины часто используются в конструкциях рассматриваемого типа, целесообразно привести конечный вид этого решения:

$$\frac{u}{a} = \left(\frac{\Omega_0 a}{c}\right)^2 \left\{ \frac{e^t}{11+\nu} \left[3\kappa^2 \frac{3+\nu}{(1+\nu)(5+\nu)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa \frac{3+\nu}{5+\nu} e^t - e^{2t} \right] + A\psi(t) + Bg(t) \right\}. \quad (33)$$

Здесь κ – геометрический параметр; $r = a e^t$, ($0 \leq t \leq \ln(b/a)$); $\psi(t)$ и $g(t)$ – некоторые вещественные аналитические функции [7]:

$$\kappa = \frac{b/a - h_1/h_0}{1 - h_1/h_0}; \\ \psi(t) = e^t + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k e^{kt}; \\ g(t) = \psi(t) \int_0^t \frac{d\xi}{\kappa - e^\xi \psi^2(\xi)}. \quad (34)$$

Через A и B обозначены константы, определяемые из граничных условий на контурах пластины: $N_r|_{r=a}$ и $N_r|_{r=b}$.

Вычисленные по формуле (33) радиальные перемещения $u(r)$ оказались существенно меньшими, чем для пластины постоянной толщины $h = \text{const}$,

вычисляемые по формуле

$$u = \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_0}{2c}\right)^2 \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} (a^2 + b^2)r + \right. \\ \left. + \frac{3+\nu}{1-\nu} \frac{a^2 b^2}{r} - r^3 \right]. \quad (35)$$

4. ДЕФОРМАЦИИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ В СВОБОДНОМ ВРАЩЕНИИ

Корректная формулировка условий сопряжения между элементами конструкции центрифуги является нетривиальной задачей и выходит за рамки этой статьи. Нами был выполнен лишь предварительный расчет деформаций и взаимных перемещений различных элементов конструкции только под действием центробежных сил. На рис. 3 показаны сопрягающиеся элементы центрифуги – патрубок, пластина переменной толщины и армированная оболочка, а в табл. 6 приведены значения радиальных перемещений и деформаций в зависимости от величины угловой скорости. Деформация и радиальные перемещения патрубка рассчитывались по формулам классической теории цилиндрической оболочки [4].

Как видно из таблицы, перемещения на внутреннем ($a = 15$ мм) и внешнем ($b = 70$ мм) радиусах пластины переменной толщины оказались значительно меньшими, чем в пластине постоянной толщины. Что еще более важно, они хорошо согласованы с радиальными перемещениями армированной оболочки и патрубка, что оправдывает применение пластины переменной толщины в кон-

Табл 6. Деформации и перемещения элементов конструкции в свободном вращении

Ω_0 , об/мин		10^4	$5 \cdot 10^4$	10^5
Патрубок (однород. оболочка)	ε_θ	$3.95 \cdot 10^{-5}$	$9.87 \cdot 10^{-4}$	$3.95 \cdot 10^{-3}$
	w , мкм	1.875	29.6	118.5
Пластина, $h = h(r)$	$u _{r=a}$, мкм	6.67	166.7	667
	$u _{r=b}$, мкм	3.80	95.0	380.0
Пластина, $h = \text{const}$	$u _{r=a}$, мкм	5.36	134.0	536.0
	$u _{r=b}$, мкм	4.65	116.0	464.0
Армированная оболочка	ε_θ	$5 \cdot 10^{-5}$	$1.25 \cdot 10^{-3}$	$5.0 \cdot 10^{-3}$
	w , мкм	3.40	85.0	340.0

струкции центрифуги. Например, в сечении сопряжения оболочки с пластиной $r=b$ значения радиальных перемещений $u|_{r=b}$ и прогиба w даже при максимально допустимой скорости вращения $\Omega_0 \approx 10^5$ об/мин равны 380 и 340 мкм соответственно (отличаются менее, чем на 12 %). Это позволяет предположить, что напряжения в сечении сопряжения $r=b$ не будут значительными. В то же время, для пластины постоянной толщины различие указанных смещений достигает 63 %, что совершенно недопустимо для рассматриваемой трубчатой центрифуги.

ВЫВОДЫ

Выведены уравнения колебаний двухслойной оболочки ротора трубчатой центрифуги, основывающиеся на соотношениях теории тонких анизотропных оболочек и определении наперед неизвестной поверхности приведения. Рассмотрены простейшие случаи колебаний оболочки без учета кориолисовых эффектов и рассчитаны соответствующие низшие собственные частоты колебаний. При гладком контакте между оболочкой и прилегающими к ней элементами центрифуги эти частоты оказались достаточно высокими по сравнению с максимальными значениями угловой скорости вращения. Следует отметить, что при жестком закреплении оболочки низшая частота изгибных колебаний вдоль ее оси и низшая частота про-

дольных колебаний могут быть достаточно близкими к максимальным значениям угловой скорости вращения центрифуги. Указанное обстоятельство важно при определении небезопасных переходных режимов работы центрифуги.

Изучена радиальная деформация кольцевой пластины переменной толщины, которая сопрягается с двухслойной оболочкой ротора. Приведено сравнение радиальных деформаций пластины переменной толщины и двухслойной оболочки. Показана хорошая согласованность этих величин значений для различных скоростей вращения центрифуги.

1. Лукьяненко В. М., Таранец А. В. Центрифуги: Справочное издание. – М.: Химия, 1988. – 384 с.
2. Ян Фуцзян Про визначення нейтральної “середньої” площини двохшарового пружного елемента // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2006. – N 3. – С. 125–129.
3. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
4. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.
5. Алфутов Н. А., Зиновьев Н. А., Попов В. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композитных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
6. Ян Фуцзян Вимушені коливання двохшарової анізотропної циліндричної оболонки при швидкому обертотому русі // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2007. – N 4. – С. 112–117.
7. Маделунг Э. Математический аппарат физики. – М.: Физматгиз, 1960. – 620 с.