ISSN 1028-7507 Акустичний вісник. 2008. Том 11, N 2. С. 45 – 57

УДК 539.3:534.13

РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИЙСЯ МЕТОД РИТЦА В ЗАДАЧЕ ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ В ФОРМЕ КУПОЛА

В. А. ТРОЦЕНКО, Ю. В. ТРОЦЕНКО

Институт математики НАН Украины, Киев

Получена 10.06.2008

Развит вариационный метод решения спектральной задачи о свободных осесимметричных колебаниях куполообразных оболочек вращения, который обладает одинаковой скоростью сходимости как при средних, так и при малых значениях их относительной толщины. Системы координатных функций строились с учетом установленной структуры формальных асимптотических разложений фундаментальной системы решений исходной системы дифференциальных уравнений. В качестве примера приведен расчет частот и форм колебаний оболочки, имеющей форму сферического купола.

Розвинуто варіаційний метод розв'язання спектральної задачі про вільні осесиметричні коливання куполоподібних оболонок обертання, який має однакову швидкість збіжності як при середніх, так і при малих значеннях їх відносної товщини. Системи координатних функцій будувалися з урахуванням встановленої структури формальних асимптотичних розкладів фундаментальної системи розв'язків вихідної системи диференціальних рівнянь. В якості прикладу наведено розрахунок частот та форм коливань оболонки, що має форму сферичного купола.

A variational method is proposed for solution of the spectral problem on free vibration of shells of revolution. This method had the same rate of convergence both for middle and small shell thickness ratios. The systems of coordinate functions were formed subject to the preset structure of the formal asymptotic decompositions of fundamental system solutions of the initial system of differential equations. The computation of frequencies and vibration modes for the dome-like shell of revolution is presented as an example.

ВВЕДЕНИЕ

В машиностроении и строительстве широко применяются конструкции, при моделировании которых используется теория тонкостенных оболочек. Определение частот и форм свободных колебаний как основных характеристик оболочек является первым этапом их динамического расчета. Большое количество публикаций посвящено разработке методов решения соответствующих спектральных задач теории оболочек (например, см. обзор в [1]). Из этих работ следует, что при исследовании собственных колебаний оболочек вращения наиболее распространены метод конечных элементов и метод, основанный на сведении двухточечной граничной задачи к последовательности начальных задач, для решения которых применяется численный метод Рунге – Кутта с использованием дискретной ортогонализации решений С. К. Годунова [2 – 4]. Из аналитических подходов здесь наибольшее развитие получил асимптотический метод, изложенный в монографии [5].

Следует отметить, что упомянутые численные методы решения задач о колебаниях оболочек весьма чувствительны к значению ее относительной толщины. С уменьшением толщины оболочки приходится уменьшать шаг дискретизации. При определенных параметрах тонкостенности это приводит к потере устойчивости вычислительного процесса до достижения предельных значений для искомых решений. Дело в том, что при малых значениях относительной толщины оболочки исходная задача переходит в разряд сингулярно возмущенной граничной задачи, для которой характерно наличие высоких градиентов решений, локализованных в малой окрестности граничных точек [6]. Аппроксимация таких решений разностными соотношениями или конечными рядами без использования специальных приемов вызывает значительные трудности.

Как правило, при решении сингулярно возмущенных задач существует такая область изменения малого параметра, где асимптотические подходы еще не дают требуемой точности (необходимо брать большое число приближений), а традиционные уже не могут применяться. В связи с этим возникает известная проблема разработки таких методов решения граничных задач для уравнений с параметром при старшей производной, которые имели бы одинаковую сходимость как при малых, так и при средних его значениях. В литературе они получили название равномерно сходящихся по параметру. Обзор библиографии по численным методам решения сингулярно возмущенных краевых задач содержится в публикации [7]. Разработке разностных схем, сходящихся равномерно по па-

раметру, посвящена монография [8].

Несмотря на свою привлекательность, метод Ритца не нашел должного применения при решении задач теории оболочек. По-видимому, это связано с проблемой построения систем базисных функций, позволяющих эффективно аппроксимировать искомые решения во всей области их определения. Полученные на такой основе аналитические решения оказываются весьма полезными в случаях, когда оболочка является составляющим элементом более сложной упругой конструкции или когда необходимо рассматривать ее взаимодействие с находящейся внутри жидкостью. Из числа опубликованных в последнее время работ по применению метода Ритца в оболочечных задачах следует отметить публикации [9, 10]. В первой из этих работ рассматривались колебания толстостенной конической оболочки, а во второй – колебания цилиндрической оболочки с присоединенным к одному из ее торцов абсолютно твердым телом конечных размеров. Применение вариационного метода при решении сингулярно возмущенной задачи о собственных колебаниях незамкнутой в меридиональном направлении оболочки вращения рассмотрено в статье [11].

Данное исследование посвящено развитию метода Ритца для решения задачи о колебаниях осесимметричной оболочки вращения в форме купола в условиях ее сингулярного возмущения. При этом класс допустимых функций, на котором реализуется метод Ритца, выбирается на основе установленной структуры асимптотического разложения фундаментальной системы решений исходных уравнений, имеющих особенности как по параметру при старшей производной, так и по независимой переменной (регулярная особая точка в полюсе оболочки). Эффективность такого подхода построения приближенного аналитического решения спектральной задачи и его сходимость проанализирована на примере задачи о собственных колебаниях сферической оболочки.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим тонкостенную упругую оболочку, срединная поверхность которой является поверхностью вращения. Предполагается, что оболочка ограничена одной из ее параллелей и замкнута в своей вершине. В дальнейшем будем рассматривать линейные осесимметричные колебания объекта. В качестве независимой переменной выберем длину дуги меридиана s, отсчитываемую от вершины оболочки ($0 \le s \le s_1$), а расстояние точек срединной поверхности до оси вращения обозначим через $r(s)$. Тогда главные радиусы кривизны поверхности оболочки R_1 и R_2 определяются по формулам

$$R_1 = -\frac{\sqrt{1-(r')^2}}{r''}, \quad R_2 = \frac{r}{\sqrt{1-(r')^2}}. \qquad (1)$$

Проекции перемещения точек срединной поверхности на положительное направление меридиана и ее внешнюю нормаль обозначим через $u(s,t)$ и $w(s,t)$, где t – временная координата. Обозначим через h толщину оболочки, а через R_0 – ее характерный линейный размер.

При рассмотрении свободных колебаний оболочки после отделения временной координаты и перехода к безразмерным величинам уравнения для определения функций $u(s)$, $w(s)$ и частоты колебаний ω будут иметь вид [12]

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{ds}(ru)\right) - \frac{(1-\nu)}{R_1R_2}u + \frac{(1-\nu)}{R_2}\frac{dw}{ds} - \\ -\frac{d}{ds}\left(\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)w\right) - \lambda u = 0,$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{d}{ds}(ru) - \frac{(1-\nu)}{r}\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{R_2}u\right) + \\ +\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{2\nu}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\right)w + c^2\left[\Delta\Delta w + \right. \\ \left. +\frac{(1-\nu)}{r}\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{R_1R_2}\frac{dw}{ds}\right)\right] - \lambda w = 0, \qquad (2)$$

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{d}{ds}\left(r\frac{d}{ds}\right), \quad c^2 = \frac{h^2}{12R_0^2}, \quad \lambda = \frac{(1-\nu^2)\rho R_0^2\omega^2}{E},$$

где E, ν, ρ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки соответственно.

При написании соотношений (2) в формулах для изменения кривизны и кручения поверхности оболочки были удержаны члены, содержащие только компоненту перемещения $w(s)$. Такие уравнения получили название уравнений Муштари – Донелла – Власова [13] и нашли широкое применение при расчетах упругих конструкций.

Решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2) с переменными коэффициентами должны быть подчинены соответствующим граничным условиям. При абсолютно жестком закреплении края оболочки они имеют вид

$$u(s_1) = w(s_1) = \left.\frac{dw}{ds}\right|_{s=s_1} = 0. \qquad (3)$$

Для свободного перемещения края оболочки силовые граничные условия при $s = s_1$ будут следу-

ющими:

$$T_1 = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1} + \nu\left(\frac{r'}{r}u + \frac{w}{R_2}\right) = 0,$$
$$M_1 = -c^2\left(\frac{d^2w}{ds^2} + \nu\frac{r'}{r}\frac{dw}{ds}\right) = 0, \qquad (4)$$
$$Q_1 = -c^2\left(\frac{d}{ds}\Delta w + \frac{1-\nu}{R_1R_2}\frac{dw}{ds}\right) = 0.$$

Здесь T_1, M_1, Q_1 – усилие, момент и перерезывающая сила в срединной поверхности деформированной оболочки соответственно. В других случаях крепления края используется линейная комбинация условий (3) и (4). В полюсе решения $u(s)$ и $w(s)$ должны обеспечивать ограниченность перемещений и деформаций.

В дальнейшем для решения спектральной задачи для системы уравнений (2) при граничных условиях (3) или (4) будет использован вариационный метод Ритца, реализация которого в существенной мере зависит от выбора систем базисных функций для аппроксимации искомых решений $u(s)$ и $w(s)$. Для построения систем таких функций предварительно установим формальную структуру фундаментальных решений системы уравнений (2) для оболочек в форме купола, применяя элементы аналитической теории дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных и уравнений с регулярной особой точкой.

2. ФОРМАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ИНТЕГРАЛОВ ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Под куполообразными будем понимать такие оболочки, для которых в вершине имеется горизонтальная касательная плоскость, а для радиусов кривизны выполняются соотношения

$$(R_1)_{s=0} = (R_2)_{s=0} = R. \qquad (5)$$

К этому классу относятся, в частности, сфера, эллипсоид, параболоид и гиперболоид вращения. Для них $r(s)$ – аналитическая нечетная функция, которую в окрестности точки $s = 0$ можно представить в виде разложения

$$r(s) = s\left(1 - \frac{1}{6R^2}s^2 + a_4s^4 + \ldots\right). \qquad (6)$$

В свою очередь, кривизны рассматриваемых оболочек будут иметь следующие представления в окрестности их вершин:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}\left[1 + \left(\frac{1}{8R^2} - 15R^2a_4\right)s^2 + b_4s^4 + \ldots\right],$$
$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}\left[1 + \left(\frac{1}{24R^2} - 5R^2a_4\right)s^2 + c_4s^4 + \ldots\right]. \qquad (7)$$

Следует отметить, что сформулированная в предыдущем разделе спектральная задача имеет две характерные особенности. Первая из них связана разложениями (6) и (7), которые определяют степень вырождения коэффициентов системы уравнений (2) при $s \to 0$ и, следовательно, асимптотику искомых ограниченных решений в окрестности полюса оболочки. Вторая же обусловлена наличием параметра c^2 при старшей производной от функции $w(s)$ в исходных уравнениях, который для тонкостенных оболочек может принимать достаточно малые значения. В этом случае рассматриваемая задача будет относиться к разряду сингулярно возмущенных граничных задач, для которых характерно наличие медленно меняющейся составляющей решения и части решения с высоким градиентом, которая локализована в окрестности края оболочки.

Исходя из этих рассуждений, будем строить формальные разложения для интегралов исходных уравнений. Для удобства в дальнейшем введем малый параметр μ, который связан с параметром тонкостенности оболочки c^2 следующим соотношением:

$$\mu^4 = c^2. \qquad (8)$$

Чтобы выяснить характер поведения линейно независимых решений системы (2) в окрестности вершины купола оболочки и оценить влияние малого параметра μ на их структуру, воспользуемся методами асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных задач [6, 14].

Первые интегралы уравнений (2), которые ограничены при $s = 0$, будем искать в виде прямого разложения по параметру μ:

$$u(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^{4k}u_k(s),$$
$$w(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^{4k}w_k(s). \qquad (9)$$

Для определения функций $u_k(s)$ и $w_k(s)$ подставим разложения (9) в исходные уравнения (2) и приравняем к нулю коэффициенты при различных степенях параметра μ. При $\mu = 0$ получим вырожденную систему уравнений относитель-

но функций $u_0(s)$ и $w_0(s)$. После несложных преобразований ее можно представить в виде

$$\alpha_1 \frac{du_0}{ds} + \alpha_2 u_0 + \alpha_3 w_0 = 0, \qquad \gamma_1 \frac{dw_0}{ds} + \gamma_2 w_0 + \gamma_3 u_0 = 0. \tag{10}$$

Переменные коэффициенты этих уравнений определяются следующим образом:

$$\alpha_1 = \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}, \qquad \alpha_2 = \frac{r'}{r}\left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} - \lambda,$$

$$\gamma_1 = -\alpha_1\left(\lambda - \frac{1-\nu^2}{R_2^2}\right),$$

$$\gamma_2 = (1-\nu^2)\left[\frac{1}{R_1^2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)' + \frac{2}{R_1 R_2}\left(\frac{1}{R_2}\right)'\right] + \lambda\left[\left(\frac{1}{R_1}\right)' + (2\nu - 1)\left(\frac{1}{R_2}\right)'\right], \tag{11}$$

$$\gamma_3 = (\nu-1)\left(\frac{r'}{r}\right)'\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{\nu-1}{R_1 R_2} - \frac{\nu}{R_2^2}\right) + (\nu^2-1)\frac{r'}{r}\left[\frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{R_1}\right)' - \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{R_2}\right)'\right] + (1-\nu)\left(\frac{r'}{r}\right)^2\left(\frac{\nu}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} + \frac{1-\nu}{R_1 R_2}\right) - \alpha_1^2\left(\lambda + \frac{1-\nu}{R_1 R_2}\right).$$

Очевидно, что функции $u_0(s)$ и $w_0(s)$ определяют решения для уравнений безмоментной теории оболочек вращения.

Определение последующих членов разложений (9) сводится к интегрированию системы уравнений (10), правые части которой содержат некоторые операторы от решений, найденных на предыдущем приближении. Высшие члены в разложениях (9) не влияют на структуру решений нулевого приближения. Это позволяет установить поведение интегралов уравнений (10) в окрестности точки $s=0$. Сведем исходную систему уравнений к нормальному виду (коэффициенты – аналитические функции при $s \in [0, s_1]$). Заметим, что с учетом разложений (6) и (7) коэффициенты α_2 и γ_3 имеют полюсы первого порядка при $s \to 0$, а остальные являются аналитическими функциями.

Введя в рассмотрение вектор-функцию

$$\vec{y} = \{y_1, y_2\}, \qquad y_1 = u_0(s), \qquad y_2 = w_0(s), \tag{12}$$

систему уравнений (10) перепишем в нормальной форме

$$s\frac{d\vec{y}}{ds} = F(s,\lambda)\vec{y}. \tag{13}$$

Здесь элементы f_{ij} матрицы $F(s,\lambda)$ – аналитические функции при $s \in [0,1]$ и не все одновременно обращаются в нуль при $s=0$. Они определяются выражениями

$$f_{11} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}s, \qquad f_{12} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}s, \qquad f_{21} = -\frac{\gamma_3}{\gamma_1}s, \qquad f_{22} = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}s. \tag{14}$$

Из вида уравнений (13) следует, что $s=0$ является для них регулярной особой точкой [6]. При построении интегралов этих уравнений будем пользоваться обобщенным методом степенных рядов.

Матрицу $F(s,\lambda)$ можно представить в виде ряда, расположенного по целым степеням s:

$$F(s,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k s^k. \tag{15}$$

Матрицы F_k $(k=1,2,\ldots)$ имеют следующую структуру:

$$F_0 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad F_{2k-1} = \begin{Vmatrix} 0 & f_{12}^{(2k-1)} \\ f_{21}^{(2k-1)} & 0 \end{Vmatrix}, \quad F_{2k} = \begin{Vmatrix} f_{11}^{(2k)} & 0 \\ 0 & f_{22}^{(2k)} \end{Vmatrix}.$$

Здесь $f_{ij}^{(k)}$ – коэффициенты разложений в степенные ряды элементов f_{ij}.

Решение системы (13) будем искать в виде

$$y_i = s^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} g_{i,k} s^k, \qquad i = 1, 2. \tag{16}$$

В этих разложениях σ и $g_{i,k}$ – неопределенные постоянные. Воспользовавшись далее формулой Коши для умножения степенных рядов, получим

$$f_{p,q} y_q = s^\sigma \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} g_{q,j} f_{p,q}^{(k-j)} s^k, \quad p, q = 1, 2. \tag{17}$$

Подстановка рядов (16) и (17) в уравнения (13) и приравнивание коэффициентов при s^σ в обеих

частях полученного равенства приводит к однородной алгебраической системе относительно первых коэффициентов разложений (16), которая в матричном представлении имеет вид

$$(F_0 - \sigma E)\vec{g_0} = 0. \tag{18}$$

Здесь E – единичная матрица; $\vec{g_0}$ – вектор с компонентами $g_{i,0}$ $(i=1,2)$.

Приравнивание коэффициентов при $s^{\sigma+k}$ $(k=1,2,\ldots)$ приводит к неоднородным алгебраическим системам вида

$$[F_0 - (\sigma + k)]\vec{g_k} = \vec{d_k}. \tag{19}$$

Здесь $\vec{g_k}$ – векторы с компонентами $g_{i,k}$; $\vec{d_k}$ – векторы с компонентами $d_i^{(k)}$, которые вычисляются по формулам

$$d_i^{(k)} = -\sum_{q=1}^{2}\sum_{j=0}^{k-1} g_{q,j} f_{i,q}^{(k-j)}.$$

Таким образом, определение показателя σ и коэффициентов разложений (16) свелось к решению однородной алгебраической системы (18) относительно вектора $\vec{g_0}$ и последовательности неоднородных систем (19) относительно векторов $\vec{g_k}$ $(k = 1,2,\ldots)$, правые части которых линейно выражаются через $k-1$ решение предыдущих алгебраических систем.

Из условия существования нетривиального решения системы (18) получаем характеристическое уравнение относительно показателя σ, корни которого принимают следующие значения: $\sigma_1=0$, $\sigma_2=-1$.

Положив в уравнениях (19) $\sigma=\sigma_1$, получим формальное представление первого интеграла уравнений (2):

$$\begin{aligned} y_1(s) = u(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} g_{1,2k-1} s^{2k-1}, \\ y_2(s) = w(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} g_{2,2k} s^{2k}. \end{aligned} \tag{20}$$

Явное вычисление коэффициентов этих разложений является весьма трудоемкой задачей. Для корня $\sigma_2=-1$ можно получить второй интеграл исходных уравнений, однако он будет принимать неограниченные значения при $s\to 0$.

Прямое разложение решений по малому параметру не дает возможности получить все интегралы уравнений (2), необходимые для выполнения граничных условий (3) или (4). Поэтому в соответствии с теорией сингулярно возмущенных уравнений [6, 14] остальные два интеграла будем искать в виде разложений, включающих в себя экспоненциальный множитель, а именно:

$$\begin{aligned} u(s) &= \mu\gamma(s)\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k \tilde{u}_k(s), \\ w(s) &= \gamma(s)\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k \tilde{w}_k(s), \\ \gamma(s) &= \exp\left\{\frac{1}{\mu}\int_{s_0}^{s}\varphi(t)dt\right\}, \end{aligned} \tag{21}$$

где s_0 – пока произвольная точка интервала $(0, s_1]$.

Неизвестные функции $\varphi(s)$, $\tilde{u}_k(s)$ и $\tilde{w}_k(s)$ находим, подставляя разложения (21) в уравнения (2) и приравнивая к нулю коэффициенты при различных степенях μ. При этом для определения функции $\varphi(s)$ получим уравнение

$$(\varphi(s))^4 - b_0(s) = 0, \qquad b_0(s) = \lambda - \frac{1-\nu^2}{R_2^2}. \tag{22}$$

В дальнейшем будем полагать, что $b_0(s)\neq 0$, $b_0(s)<0$ при $s\in[0, s_1]$. Первое условие исключает из рассмотрения точки поворота, т. е. такие точки, по разные стороны от которых представление искомых функций различно. Второе условие означает, что мы ограничиваемся рассмотрением только низшей части спектра оболочки.

При принятых допущениях уравнение (22) определяет четыре попарно-сопряженных комплексных корня. Два из них имеют отрицательные действительные части, а два – положительные. Располагая их в порядке возрастания действительных частей, имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= \frac{-1+i}{\sqrt{2}}|b_0|^{1/4}, \quad \varphi_2(s) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}|b_0|^{1/4}, \\ \varphi_3(s) &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}|b_0|^{1/4}, \quad \varphi_4(s) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}|b_0|^{1/4}. \end{aligned} \tag{23}$$

Каждому из значений $\varphi_k(s)$ соответствует свое частное решение исходных уравнений. Положим в представлении (21) $s_0=s_1$ и подставим в них значения корней $\varphi_k(s)$ с положительной действительной частью. Тогда после отделения в этих интегралах действительной и мнимой части для экспоненциального множителя получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} &e^{\beta(s)}\cos\beta(s), \qquad e^{\beta(s)}\sin\beta(s), \\ &\beta(s) = \frac{1}{\mu\sqrt{2}}\int_{s_1}^{s}|b_0(t)|^{1/4}dt. \end{aligned} \tag{24}$$

Эти функции при малых значениях параметра μ являются сильно осцилирующими и резко убывают при удалении от точки $s=s_1$ вовнутрь интервала $(0, s_1)$. При подстановке в выражения (21) корней $\varphi_k(s)$ с отрицательными действительными частями получим решения, которые будут резко возрастать с уменьшением независимой переменной s. Для анализа оболочек в форме купола такие интегралы не нужны.

Для нахождения функций $\tilde{u}_k(s)$ и $\tilde{w}_k(s)$, входящих в разложения (21), приходится, кроме алгебраических, решать линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Явные выражения для главных членов асимптотических разложений получены в работах П. Е. Товстика [5, 15]. Нетрудно убедиться, что функции $\tilde{u}_k(s)$ и $\tilde{w}_k(s)$ могут быть представлены в виде разложений в ряды Тейлора в окрестности точки $s=s_1$. Конкретные значения коэффициентов этих рядов здесь не понадобятся, поскольку в дальнейшем нас будет интересовать лишь структура интегралов исходных уравнений.

Исходя из сказанного, заключаем, что два последних интеграла уравнений (2), которые локализованы в окрестности края оболочки, имеют следующее формальное представление:

$$\begin{aligned} u^{(j)}(s) &= \mu\gamma^{(j)}(s)\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\sum_{i=0}^{\infty}u_{k,i}^{(j)}(s-s_1)^i, \\ w^{(j)}(s) &= \gamma^{(j)}(s)\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\sum_{i=0}^{\infty}w_{k,i}^{(j)}(s-s_1)^i. \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь $u_{k,i}^{(j)}$, $w_{k,i}^{(j)}$ – неизвестные коэффициенты разложений; $j=2,3$ – индекс, указывающий на номер найденного частного решения;

$$\gamma^{(j)}(s) = \begin{cases} e^{\beta(s)}\cos(\beta(s)) & \text{при} \quad j=2, \\ e^{\beta(s)}\sin(\beta(s)) & \text{при} \quad j=3. \end{cases}$$

Для тех оболочек вращения, для которых интеграл, входящий в выражение для $\beta(s)$, не вычисляется в элементарных функциях, решения (25) можно представить в другой форме, воспользовавшись результатами работы [14]. Например, решения для функций $w^{(j)}(s)$ при $\mathbf{Re}\,\varphi_{j+1}(s)>0$ $(j=2,3)$ записываются виде следующих асимптотических разложений:

$$w^{(j)}(s) = \exp\{\varphi_{j+1}(s_1)\tau\}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k P_j^{(k)}(\tau), \tag{26}$$

где $\tau=(s-s_1)/\mu$; $P_j^{(k)}(\tau)$ – полином по τ степени $2k$ с постоянными коэффициентами, зависящими от коэффициентов уравнений (2) и их производных в точке $s=s_1$.

При построении интегралов (25) предполагалось, что оболочка обладает такими геометрическими параметрами, при которых можно пренебречь влиянием функций погранслоя на поведение искомых решений в окрестности ее полюса. При этом допускается малая погрешность порядка

$$\varepsilon = \exp\left\{-\frac{1}{\mu\sqrt{2}}\int_0^{s_1}|b_0(t)|^{1/4}dt\right\}.$$

Учитывая полученные формальные представления всех линейно независимых решений системы уравнений (2), ее общее решение после перегруппировки членов в выражениях (25) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} [u,w] &= R[u,w]+ \\ &+e^{\beta(s)}\cos\beta(s)\sum_{i=0}^{\infty}[u_{i,1},w_{i,1}](s-s_1)^i+ \\ &+e^{\beta(s)}\sin\beta(s)\sum_{i=0}^{\infty}[u_{i,2},w_{i,2}](s-s_1)^i, \end{aligned} \tag{27}$$

где $R[u,w]$ – регулярная часть общего решения, структура которого представлена формулами (20); $u_{i,1}$, $u_{i,2}$ и $w_{i,1}$, $w_{i,2}$ – неопределенные постоянные (в них входит и параметр μ), предназначенные для аппроксимации соответственно функций $u(s)$ и $w(s)$.

По сути, представления решений в форме (27) включают в себя все последовательные приближения при асимптотическом интегрировании рассматриваемых уравнений. После их подчинения главным граничным условиям задачи, оставшиеся неопределенные постоянные будем находить из условий стационарности соответствующего квадратичного функционала.

3. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Для получения вариационного уравнения для рассматриваемой спектральной задачи воспользуемся принципом возможных перемещений

$$\delta\Pi = \delta A, \tag{28}$$

где $\delta\Pi$ – вариация потенциальной энергии упругой деформации оболочки; δA – работа инерционных сил на возможных перемещениях оболочки. Потенциальная энергия Π и работа δA при свободных

колебаниях оболочки после перехода к безразмерным величинам принимают вид [13]

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^{s_1}[\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2+ +c^2(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2+2\nu\varkappa_1\varkappa_2)]rds,$$

$$\delta A = \lambda\int_0^{s_1}(u\delta u+w\delta w)rds.$$

Здесь деформации срединной поверхности оболочки выражаются через ее перемещения по следующим формулам:

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds}+\frac{w}{R_1}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{r'}{r}u+\frac{w}{R_2},$$

$$\varkappa_1 = -\frac{d^2w}{ds^2}, \qquad \varkappa_2 = -\frac{r'}{r}\frac{dw}{ds}.$$

С учетом этого вариационное уравнение рассматриваемой задачи удобно представить как

$$\delta I = \int_0^{s_1}[\Psi_{11}(u,\delta u)+\Psi_{12}(w,\delta u)+ +\Psi_{12}(\delta w,u)+\Psi_{22}(w,\delta w)]rds- -\lambda\int_0^{s_1}(u\delta u+w\delta w)rds = 0. \tag{29}$$

Введенные здесь дифференциальные операторы $\Psi_{ij}(p,q)$ определяются выражениями

$$\Psi_{11}(p,q) = \left(\frac{dp}{ds}+\frac{\nu r'}{r}p\right)\frac{dq}{ds}+ +\left[\nu\frac{r'}{r}\frac{dp}{ds}+\left(\frac{r'}{r}\right)^2p\right]q,$$

$$\Psi_{12}(p,q) = \left(\frac{1}{R_1}+\frac{\nu}{R_2}\right)p\frac{dq}{ds}+\frac{r'}{r}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{\nu}{R_1}\right)pq,$$

$$\Psi_{22}(p,q) = \left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{2\nu}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\right)pq+ +c^2\left\{\frac{d^2p}{ds^2}\frac{d^2q}{ds^2}+\left[\frac{\nu r'}{r}\frac{d^2p}{ds^2}+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\frac{dp}{ds}\right]\frac{dq}{ds}+ +\frac{\nu r'}{r}\frac{dp}{ds}\frac{d^2q}{ds^2}\right\}.$$

Для решения вариационной задачи (29) воспользуемся методом Ритца. В связи с этим представим функции $u(s)$ и $w(s)$ в виде отрезков обобщенных рядов:

$$u(s) = \sum_{j=1}^{N}x_jU_j(s), \qquad w(s) = \sum_{j=1}^{N}x_{j+N}W_j(s). \tag{30}$$

Здесь x_j $(j=1,2,\ldots,2N)$ – неопределенные постоянные; $\{U_j(s)\}$ и $\{W_j(s)\}$ – системы координатных функций, которые подчинены лишь кинематическим граничным условиям задачи. Силовые граничные условия являются естественными граничными условиями для соответствующего функционала I и, следовательно, нет необходимости их априорного выполнения в представлениях (30) для перемещений оболочки. Это существенно облегчает проблему построения систем координатных функций.

Для вывода алгебраической системы относительно неизвестных x_j $(j=1,2,\ldots,2N)$ подставим разложения (30) в уравнение (29). Отсюда, полагая $\delta u=U_i(s)$, $\delta w=0$, получим первые N уравнений, а остальные – при $\delta u=0$, $\delta w=W_i(s)$, где i пробегает значения от 1 до N. В итоге решение исходной задачи сводится к решению обобщенной алгебраической проблемы на собственные значения

$$(A-\lambda B)\vec{x} = 0, \qquad \vec{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_{2N}) \tag{31}$$

с симметричными матрицами A и B. Симметричность матрицы A следует из симметричности оператора, порожденного дифференциальными уравнениями (2) и определенного на классе функций, подчиненных граничным условиям задачи и установленным свойствам поведения решений в окрестности регулярной особой точки. Элементы a_{ij}и b_{ij} матриц A и B соответственно в алгебраической системе (31) вычисляются по следующим формулам:

$$a_{i,j} = \int_0^{s_1}\Psi_{11}(U_j,U_i)rds,$$

$$a_{i+N,j+N} = \int_0^{s_1}\Psi_{22}(W_j,W_i)rds,$$

$$b_{i,j} = \int_0^{s_1}(U_j,U_i)rds,$$

$$b_{i+N,j+N} = \int_0^{s_1}(W_j,W_i)rds$$

$$(i=1,2,\ldots,N, j\geq i),$$

$$a_{i,j+N} = \int\limits_0^{s_1} \Psi_{12}(W_j, U_i) r ds,$$

$$b_{i,j+N} = 0$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, N).$$

Построение координатных функций осуществляется на основе подчинения общего решения задачи (27) главным граничным условиям. В результате получаем некоторые дополнительные соотношения между коэффициентами в разложениях для функций $u(s)$ и $w(s)$, подставив которые в общий вид решения, находим наборы координатных функций для метода Ритца. Полученные таким образом координатные функции для аппроксимации регулярной части решений выражаются через степенные функции с некоторыми весовыми множителями. Они оказываются пригодными для тех случаев, когда в разложениях для $u(s)$ и $w(s)$ можно удерживать небольшое количество членов ряда, поскольку вычисление степенных функций приводит к достаточно быстрому накоплению погрешностей в их значениях. Поэтому в дальнейшем, не нарушая полноты представления решений, степенные ряды заменим соответствующими полиномами Лежандра, которые являются линейными комбинациями степенных функций. Целесообразность такой подстановки обусловлена тем, что полиномы Лежандра имеют амплитудные значения, заключенные в интервале $[-1, 1]$ и для достаточно высоких их степеней могут быть вычислены с помощью существующих рекуррентных соотношений без заметного накопления погрешностей. Построенные таким образом системы координатных функций позволяют в четыре – пять раз увеличить предельное значение количества членов в разложениях регулярной части решений по сравнении со степенном базисом. Это обеспечивает возможность расширения диапазона входных параметров задачи, при которых можно проводить расчеты с заданной точностью.

После применения описанной процедуры система базисных функций для аппроксимации функции $w(s)$ приобретет следующую структуру:

$$\{W_i(s)\}_{i=1}^N = \{W_1, \ldots, W_m; \quad W_{m+1}, \ldots, W_{m+m_p}; \quad W_{m+m_p+1}, \ldots, W_{m+2m_p}\}. \tag{32}$$

В выражении (32) выделены три группы функций, отделенные друг от друга точкой с запятой. Первая группа из m функций представляет собою регулярный базис, образованный из полиномов Лежандра с определенной весовой функцией. Вторая и третья группы связаны с аппроксимацией погранслойных решений в окрестности точки $s = s_1$. Количество функций в этих группах обозначено через m_p. Аналогичную структуру имеют и координатные функции для нахождения функции $u(s)$.

Явные выражения для координатных функций $U_j(s)$ и $W_j(s)$ при использовании представления погранслойных функций в форме Вышика – Люстерника (26) таковы:

$$\begin{gathered}
U_j = s(s^2 - s_1^2) P_{2j-1}\left(\frac{2s}{s_1} - 1\right), \\
W_j = (s^2 - s_1^2)^2 P_{2j-1}\left(\frac{2s}{s_1} - 1\right), \\
(j = 1, 2, \ldots, m), \\
U_{m+1} = g_c - \frac{s}{s_1}, \quad U_{m+2} = (s - s_1) g_c, \\
U_{m+m_p+1} = g_s, \quad U_{m+m_p+2} = (s - s_1) g_s, \\
W_{m+1} = g_c - 1 - \frac{p}{2s_1}(s^2 - s_1^2), \\
W_{m+2} = (s - s_1) g_c - \frac{1}{2s_1}(s^2 - s_1^2), \\
W_{m+m_p+1} = g_s - \tfrac{p}{2s_1}(s^2 - s_1^2), \\
W_{m+m_p+2} = (s - s_1) g_s, \\
U_{m+j} = W_{m+j} = (s - s_1)^{j-1} g_c, \\
U_{m+m_p+j} = W_{m+m_p+j} = (s - s_1)^{j-1} g_s \\
(j = 3, 4, \ldots, m_p).
\end{gathered} \tag{33}$$

Здесь функции $g_c(s)$ и $g_s(s)$ вычисляются по формулам

$$g_c = \exp\{p(s - s_1)\} \cos p(s - s_1);$$

$$g_s = \exp\{p(s - s_1)\} \sin p(s - s_1);$$

$$p = p(\lambda) = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} \sqrt[4]{\left|\lambda - \frac{1 - \nu^2}{R_2^2(s_1)}\right|},$$

а $P_j(s)$ – смещенные на единицу по индексу j и перенесенные на интервал $[0, s_1]$ многочлены Ле-

Табл 1. Значения низших частот колебаний сферической оболочки в зависимости от количества членов m в регулярном базисе при $m_p = 2$ и $\theta_f = 135^\circ$

m	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\delta = 100$					
2	0.424822	0.810329	0.935994	1.036195	1.595648
4	0.424767	0.801161	0.886484	0.925515	1.091895
6	0.424767	0.801159	0.885994	0.920509	0.951959
8	0.424767	0.801159	0.885994	0.920490	0.943053
10	0.424767	0.801159	0.885994	0.920490	0.942929
12	0.424767	0.801159	0.885994	0.920490	0.942929
$\delta = 1000$					
2	0.407475	0.810061	0.962506	1.067890	1.541983
4	0.407312	0.791919	0.880269	0.925323	0.959443
6	0.407312	0.791908	0.878332	0.910762	0.929201
8	0.407312	0.791908	0.878330	0.910476	0.925902
10	0.407312	0.791908	0.878330	0.910476	0.925853
12	0.407312	0.791908	0.878330	0.910476	0.925853
$\delta = 2000$					
2	0.405188	0.810334	0.966930	1.070927	1.562291
4	0.404998	0.790777	0.879828	0.926367	0.960434
6	0.404998	0.790765	0.877607	0.910297	0.929309
8	0.404998	0.790765	0.877605	0.909941	0.925456
10	0.404998	0.790765	0.877605	0.909941	0.925388
12	0.404998	0.790765	0.877605	0.909941	0.925388

жандра. Вычисление их и первых двух производных по аргументу s осуществляется с помощью рекуррентных соотношений

$$P_{j+2}(s) = \frac{1}{j+1}[(2j+1)sP_{j+1}(s) - jP_j(s)],$$

$$P'_{j+2}(s) = sP'_{j+1}(s) + (j+1)P_{j+1}(s),$$

$$P''_{j+2}(s) = sP''_{j+1}(s) + (j+2)P'_{j+1}(s),$$

$$P_1(s) = 1, \quad P_2(s) = s, \quad P_3(s) = \frac{1}{2}(3s^2 - 1).$$

Определенные неудобства доставляет то, что, как и следовало ожидать, в показатель изменяемости p погранслойных координатных функций входит заранее неизвестный частотный параметр λ. Это переводит линейную алгебраическую задачу (31) в разряд нелинейной задачи по ее собственным значениям. Во избежание упомянутой трудности параметр λ в формулах (33) можно заменить его приближенным значением $\tilde{\lambda}$, отличающимся от λ на малую величину порядка μ. Поскольку параметр λ – интегральная характеристика задачи, то его приближенное значение с высокой точностью вычисляется при использовании только регулярной части базиса. При этом погрешность задания λ в формулах (33) будет компенсироваться полиномиальной частью погранслойных координатных функций. Значение $\tilde{\lambda}$ легко находится в рамках общей программы расчета частот и форм колебаний рассматриваемых оболочек.

4. АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем некоторые результаты расчета частот и форм собственных колебаний сферического купола с жестко закрепленным краем, полученных на основе предлагаемого алгоритма. В качестве характерного линейного размера оболочки выберем ее радиус и положим коэффициент Пуассона равным 0.3. Отношение радиуса оболочки к ее толщине в обозначим через δ, угол между осью симметрии оболочки и нормалью к ее срединной поверхности – через θ, а его значение для закрепленной параллели – через θ_f.

В табл. 1 приведены значения первых пяти безразмерных частот $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ осесимметричных колебаний сферического купола в зависимости от

Табл 2. Значения w_1, T_1, M_1, Q_1 в точке $\theta^* = 0.95$ для первой формы колебаний в зависимости от количества членов m в регулярном базисе при $m_p = 2$ и $\theta_f = 135°$

m	w_1	T_1	M_1	Q_1
$\delta = 100$				
2	-0.48655	0.32695	$-0.3572 \cdot 10^{-3}$	$0.1540 \cdot 10^{-2}$
4	-0.47964	0.32650	$-0.3433 \cdot 10^{-3}$	$0.1330 \cdot 10^{-2}$
6	-0.47954	0.32654	$-0.3427 \cdot 10^{-3}$	$0.1332 \cdot 10^{-2}$
8	-0.47953	0.32654	$-0.3427 \cdot 10^{-3}$	$0.1333 \cdot 10^{-2}$
10	-0.47952	0.32653	$-0.3427 \cdot 10^{-3}$	$0.1333 \cdot 10^{-2}$
12	-0.47952	0.32653	$-0.3427 \cdot 10^{-3}$	$0.1333 \cdot 10^{-2}$
$\delta = 1000$				
2	-0.66267	0.30698	$0.2381 \cdot 10^{-5}$	$0.1218 \cdot 10^{-4}$
4	-0.66974	0.31265	$0.1276 \cdot 10^{-5}$	$-0.1936 \cdot 10^{-4}$
6	-0.66974	0.31285	$0.1253 \cdot 10^{-5}$	$-0.2058 \cdot 10^{-4}$
8	-0.66972	0.31286	$0.1253 \cdot 10^{-5}$	$-0.2078 \cdot 10^{-4}$
10	-0.66971	0.31286	$0.1254 \cdot 10^{-5}$	$-0.2085 \cdot 10^{-4}$
12	-0.66970	0.31286	$0.1256 \cdot 10^{-5}$	$-0.2085 \cdot 10^{-4}$
14	-0.66970	0.31286	$0.1256 \cdot 10^{-5}$	$-0.2084 \cdot 10^{-4}$
$\delta = 2000$				
2	-0.65883	0.30248	$0.7736 \cdot 10^{-8}$	$0.1982 \cdot 10^{-4}$
4	-0.66188	0.31066	$0.6321 \cdot 10^{-7}$	$0.1384 \cdot 10^{-4}$
6	-0.66158	0.31068	$0.6789 \cdot 10^{-7}$	$0.1371 \cdot 10^{-4}$
8	-0.66154	0.31067	$0.6874 \cdot 10^{-7}$	$0.1372 \cdot 10^{-4}$
10	-0.66153	0.31067	$0.6908 \cdot 10^{-7}$	$0.1374 \cdot 10^{-4}$
12	-0.66153	0.31067	$0.6913 \cdot 10^{-7}$	$0.1375 \cdot 10^{-4}$
14	-0.66153	0.31067	$0.6901 \cdot 10^{-7}$	$0.1376 \cdot 10^{-4}$

количества членов m в регулярном базисе при $\theta_f = 135°$ для трех значений параметра δ. Для аппроксимации решений, локализованных в окрестности точки θ_f и имеющих большие градиенты, использовались две погранслойные координатные функции ($m_p = 2$). Значения нормального прогиба w_1, меридионального усилия T_1, изгибающего момента M_1 и перерезывающей силы Q_1 в точке $\theta^* = \theta/\theta_f = 0.95$ при $\theta_f = 135°$ для первой формы колебаний оболочки в зависимости от количества членов m в регулярном базисе при фиксированном числе погранслойных базисных функций ($m_p = 2$) приведены в табл. 2. Здесь и далее амплитуды собственных форм колебаний оболочки нормировались к максимальному прогибу в направлении внешней нормали.

Данные таблиц свидетельствуют о том, что предложенный алгоритм решения рассматриваемой спектральной задачи обладает одинаковой сходимостью как при малых, так и при средних значениях относительной толщины оболочки. Аналогичный характер сходимости величин, приведенных в табл. 2, наблюдается и при других значениях независимой переменной θ. Следовательно, построенные системы координатных функций обеспечивают поточечную сходимость не только самих решений, но и их производных до определенного порядка. Это позволяет определять усилия, моменты и перерезывающие силы во всех точках срединной поверхности оболочки. Таким образом, при удачном выборе системы базисных функций вариационный метод позволяет построить приближенное решение задачи, которое в определенном смысле близко к ее точному решению.

Следует также отметить, что подобные результаты для рассматриваемой оболочки можно получить с использованием только регулярных координатных функций ($m_p = 0$), однако построенный на такой основе алгоритм решения задачи не будет обладать свойством равномерной сходимости по параметру μ. Для получения результатов с заданной точностью количество членов в разложениях Ритца с использованием только регулярного базиса необходимо увеличить по отношению к базису с погранслойными функциями в 1.5, 2 и 3 раза при $\delta = 100$, 1000 и 2000 соответственно. При дальнейшем уменьшении относительной толщины оболочки использование только регулярного бази-

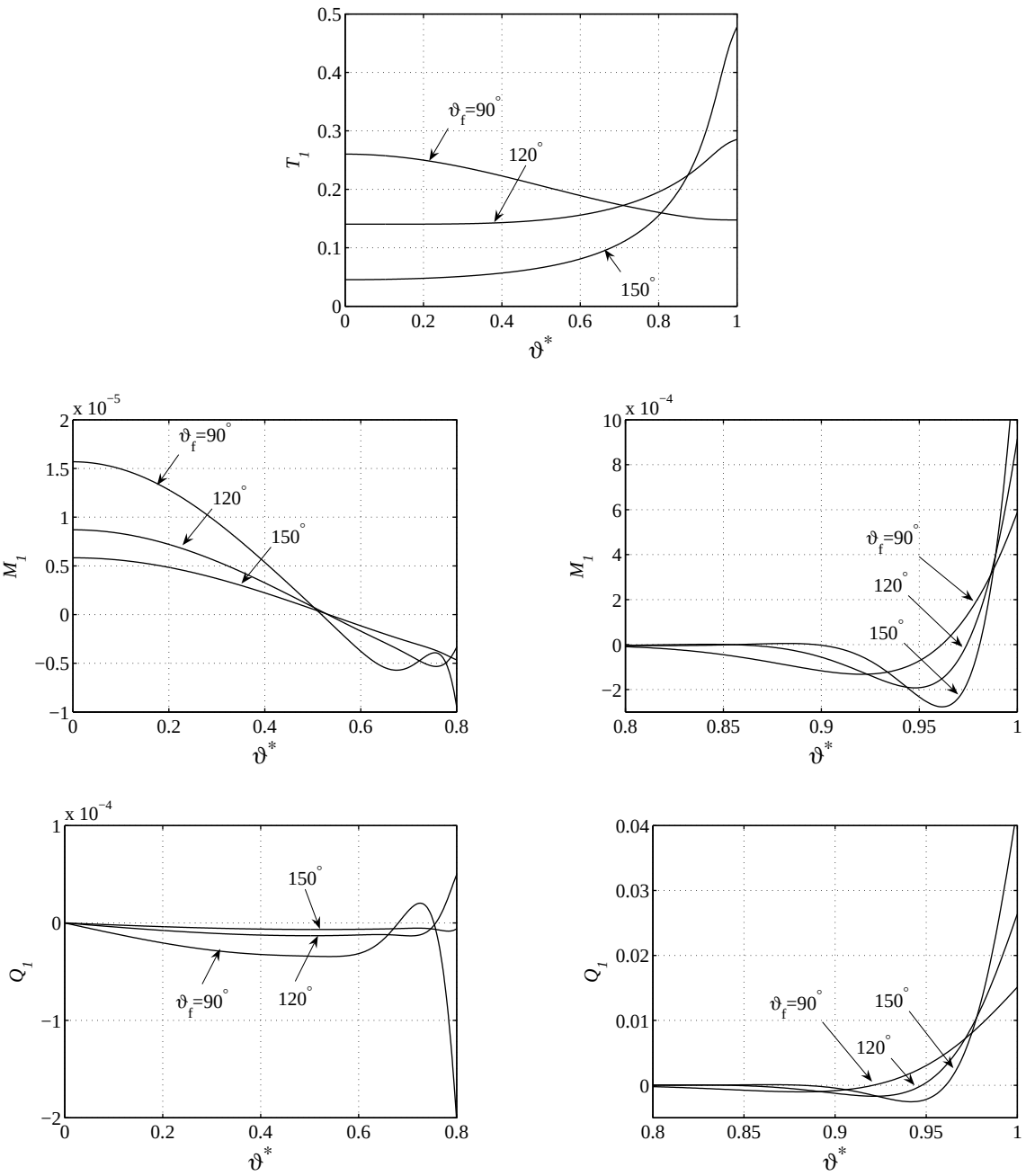

Рисунок. Распределение усилий T_1, моментов M_1 и перерезывающих сил Q_1 по меридиану оболочки для различных значений угла θ_f при $\delta = 150$

са для получения решений рассматриваемого качества становится неэффективным, поскольку может наступить потеря устойчивости вычислительного процесса до достижения предельных значений рассчитываемых величин. Дело в том, что точные решения, включающие в себя экспоненциальные функции с большим аргументом, плохо аппроксимируются рядами Тейлора. Если в практических расчетах нет необходимости вычислять производные от форм колебаний, то (в соответствии с результатами таблиц) можно существенно понизить порядок решаемой алгебраической системы.

На рисунке показано поведение функций $T_1(\theta^*)$, $M_1(\theta^*)$ и $Q_1(\theta^*)$ в зависимости от аргумента $\theta^* = \theta/\theta_f$ при различных значениях угла θ_f закрепленной параллели оболочки и при $\delta = 150$. Из гра-

фиков следует, что все рассматриваемые величины принимают наибольшие значения в окрестности закрепленного контура оболочки (за исключением усилия T_1 при $\theta_f = 90°$). При этом в указанной окрестности по мере увеличения угла θ_f возрастают и амплитуды силовых факторов. Следует отметить, что при расчете замкнутых в полюсе оболочек вращения непосредственное применение ортогональной прогонки или других приближенных методов решения рассматриваемой спектральной задачи невозможно, так как в этом случае система исходных дифференциальных уравнений имеет регулярную особую точку. Поэтому в ряде работ [9, 16] принимается дополнительное предположение, что наличие малого отверстия в полюсе оболочки не оказывает существенного влияния на характер собственных колебаний замкнутых в полюсе оболочек. При этом на параллели, соответствующей отверстию ($\theta = \theta_0$), ставятся граничные условия для свободного края:

$$(T_1)_{\theta=\theta_0} = (M_1)_{\theta=\theta_0} = (Q_1)_{\theta=\theta_0} = 0. \qquad (34)$$

Исходя из установленного выше поведения решений $u(\theta)$ и $w(\theta)$ в окрестности полюса оболочки, можно показать, что при $\theta \to 0$ перерезывающая сила Q_1 убывает до нуля, тогда как усилие T_1 и момент M_1 стремятся к своим предельным величинам. Расчеты показывают, что функция $M_1(\theta)$ в окрестности полюса оболочки принимает малые значения (см. рисунок). Таким образом, для исходной оболочки при малых значениях угла θ первое условие (34) не выполняется, а второе и третье выполняются приближенно. Тем не менее, сравнение полученных в этом исследовании частот колебаний сферической оболочки с результатами работы [16] подтверждает правомерность применения в данном случае расчетной схемы, основанной на замене исходной оболочки оболочкой с малым свободным отверстием в окрестности полюса. По-видимому, несоответствие условий (34) действительному поведению силовых факторов оболочки при $\theta \to 0$ может сказаться при определении форм колебаний оболочки (особенно, их производных) в окрестности ее полюса. В целом же при расчете интегральных характеристик для куполообразных оболочек применение упомянутой приближенной расчетной схемы оправдано.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный на основе вариационного метода алгоритм решения задачи об осесимметричных колебаниях куполообразных оболочек вращения имеет одинаковую скорость сходимости как при малых, так и при средних значениях относительной толщины оболочки. В области тех толщин, когда возможно применение регулярного базиса с использованием полиномов Лежандра, расширение класса допустимых функций функциями типа погранслоя приводит к понижению порядка решаемых алгебраических систем.

Предложенные в работе системы координатных функций в методе Ритца обеспечивают равномерную сходимость решений и их первых производных во всех точках области интегрирования уравнений, описывающих собственные осесимметричные колебания куполообразных оболочек вращения.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при частичной поддержке Deutsche Forschung Gemeinschaft и НИР N 0107U002198.

1. *Leissa A. W.* Vibration of shells.– Washington, DC: NASA SP-288, Gov. Print. Of, 1993.– 428 p.
2. *Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций.– К.: Наук. думка, 1986.– 172 с.
3. *Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н.* Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций.– М.: Машиностроение, 1975.– 376 с.
4. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений // Усп. мат. наук.– 1961.– **16**, вып. 3(99).– С. 171–174.
5. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек.– М.: Наука, 1979.– 384 с.
6. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.– М.: Мир, 1968.– 464 с.
7. *Боглаев Ю. П., Станилевский А. А.* Обзор библиографии по численным методам решения задач с пограничным слоем.– М.: Препринт АН СССР, Ин-т физики твердого тела, 1984.– 48 с.
8. *Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У.* Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем.– М.: Мир, 1983.– 200 с.
9. *Kang J. H., Leissa A. W.* Three-dimensional vibration analysis of thick, complete conical shells // Trans. ASME.– 2004.– **71**.– P. 502–507.
10. *Trotsenko Yu. V.* Frequencies and modes of vibration of a cylindrical shell with attached rigid body // J. Sound Vib.– 2006.– **292**.– P. 535–551.
11. *Троценко В. А., Троценко Ю. В.* Решение задачи о собственных колебаниях незамкнутой оболочки вращения в условиях ее сингуляпного возмущения // Нелінійні коливання.– 2005.– **8**, N 3.– С. 415–432.
12. *Асланян А. Г., Лидский В. Б.* Распределение собственных частот тонких упругих оболочек.– М.: Наука, 1974.– 156 с.

13. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек.– Л.: Судостроение, 1962.– 431 с.

14. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Усп. мат. наук.– 1957.– **12**, вып. 5(77).– С. 3–122.

15. *Товстик П. Е.* Низкочастотные колебания выпуклой оболочки вращения // Изв. АН СССР, Мех. тв. тела.– 1975.– N 6.– С. 110–116.

16. *Медведев В. И., Соков Л. М.* О собственных колебаниях сферических оболочек // Прикл. пробл. прочн. пластичн.– 1975.– Вып. 2.– С. 36–43.