

УДК 539.3

# ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН ОТ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТИ И ПОРИСТО-УПРУГОГО НАСЫЩЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ, Т. В. СОБОЛЬ, Л. И. КОСОВЕЦ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 02.06.2008*

На основе теории Био, которая предсказывает существование трех типов волн в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде, проанализировано отражение – прохождение волн от границы жидкости и пористо-упругого полупространства. Найдено распределение энергии падающей волны между отраженными и прошедшими волнами. Качественные различия в рассматриваемом процессе для проницаемой и непроницаемой границы наблюдались, если медленная продольная волна переносила не менее 2 % энергии падающей волны. Для вертикальной компоненты среднего за период потока мощности справедлив принцип суперпозиции по энергии. Он заключается в том, что энергия, приносимая на границу падающей волной, равна сумме энергий, переносимых отраженными и прошедшими волнами. Неоднородная волна не переносит энергию в направлении, перпендикулярном границе. Вдоль границы полупространства принцип суперпозиции по энергии не выполняется.

На базі теорії Біо, яка передбачає існування трьох типів хвиль у пористо-пружному насиченому рідиною середовищі, проаналізовано відбиття – проходження хвиль на межі рідини й пористо-пружного півпростору. Знайдено розподіл енергії падаючої хвилі між відбитими хвилями і хвилями, що пройшли. Якісні відмінності в розглянутому процесі для проникної й непроникної меж спостерігалися за умови, що повільна поздовжня хвиля переносила не менш, ніж 2 % енергії падаючої хвилі. Для вертикальної компоненти середнього за період потоку потужності працює принцип суперпозиції по енергії. Він полягає у тому, що енергія, яку приносить на межу падаюча хвиля, дорівнює сумі енергій, яку переносять відбиті хвилі та хвилі, що пройшли. Неоднорідна хвиля не переносить енергію в напрямку, перпендикулярному межі. Уздовж межі принцип суперпозиції не виконується.

Wave reflection-transmission on the interface of the fluid and porous-elastic medium has been analyzed on the basis of the Biot theory, predicting the existence of three kinds of bulk waves in the porous-elastic fluid-saturated medium. Energy distribution of the incident wave between the reflected and transmitted waves has been found. For the interfaces with open and close boundary pores, the qualitative distinctions in the considered process are observed in the case when the slow longitudinal wave transfers over 2 % of energy of the incident wave. For vertical components of a period-averaged energy flux, the principle of superposition on energy is valid. It consists in equality of energy of the incident wave and sum of energies of the reflected and transmitted waves. The evanescent wave does not transfer the energy deep into the medium. The principle of superposition is not valid along the boundary.

## ВВЕДЕНИЕ

Описание процесса отражения и прохождения волн на границе раздела жидкости и пористо-упругой насыщенной жидкостью среды важно не только с точки зрения решения прикладных задач подводной акустики, сейсмологии, неразрушающего контроля, но и для понимания особенностей волновых процессов на границе раздела однофазной и двухфазной сред. На сегодняшний день приведенные в специальной литературе данные неполны, а большинство из них получено только для специальных случаев.

Работа [1] была одной из первых, где для описания отражения волн от свободной границы использовалась теория Био. Условия на границе контакта пористо-упругой среды с вакуумом или жидкостью обсуждались в [2], где были сформулированы соответствующие типы граничных условий.

В статье [3] на основе этой теории проанализирован процесс отражения волн, падающих из жидкости на границу раздела жидкость – пористо-

упругое полупространство (рассматривалась мягкая пористо-упругая среда с большой пористостью). При этом учитывались потери в скелете и вязкость поровой жидкости, а основное внимание уделялось влиянию затухания на процесс отражения – прохождения волн. Показано, что существуют качественные различия между отражением и прохождением плоских волн на границах типа жидкость – вязкоупругая среда и жидкость – пористо-упругая среда, насыщенная вязкой жидкостью. Вязкие потери в поровой жидкости играют значительную роль и обуславливают частотную зависимость коэффициентов прохождения. Следует отметить, что здесь рассматривался только случай отражения от границы с открытыми порами. Кроме того, энергетический анализ проводился только для отраженного и прошедшего полей без количественной оценки распределения энергии падающей волны между различными типами прошедших волн.

В статье [4] анализировалось влияние частотно зависимой функции, определяемой характе-

ром движения жидкости по порам упругого скелета, на коэффициенты отражения – прохождения на границе раздела жидкости и пористо-упругой среды. Были получены количественные данные, подтверждающие, что коэффициенты отражения и прохождения существенно изменяются с частотой.

В работе [5] исследовалось отражение волны, падающей под углом на границу жидкость – пористо-упругое полупространство для граничных условий общего типа (открытые или закрытые поры). Рассматривалось падение волны как из жидкости, так и из пористо-упругого полупространства. Диссипативные эффекты в средах не учитывались. Основное внимание уделялось изучению влияния типа граничных условий на распределение энергии между различными типами волн в отраженном и прошедшем полях. При этом процесс отражения – прохождения рассматривался только для конкретных сред, а зависимости процесса от параметров пористой среды не анализировались.

В статье [6] получены асимптотические выражения для коэффициентов отражения и прохождения на границе раздела пористо-упругой и жидкой сред при условии, что скелет – абсолютно жесткий. Экспериментальные данные об отражении волн на границе жидкости и пористо-упругой среды [7] хорошо согласуются с теоретическими.

В данной работе в рамках теории Био изучен процесс отражения – прохождения плоских волн на границе раздела жидкости и пористо-упругого полупространства. Рассмотрены как проникаемая, так и непроницаемая граница. При этом основное внимание уделено анализу влияния параметров пористо-упругой среды на распределение энергии падающей волны между отраженными и прошедшими волнами.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются два полупространства с общей границей, совпадающей с плоскостью  $z=0$ . Волновое движение считается плоским (все его характеристики не зависят от координаты  $y$ ). Верхнее полупространство заполнено жидкостью, а нижнее – пористо-упругой насыщенной жидкостью средой. Жидкость описывается следующими характеристиками:  $\rho_f^{(1)}$  – плотность,  $K_f^{(1)}$  – модуль всестороннего сжатия (всем величинам, относящимся к верхнему полупространству, присвоен верхний индекс (1)). Пористо-упругая насыщенная жидкостью среда описывается в рамках модели Био. В пористо-упругом полупространстве векторы сме-

щений упругого скелета  $\mathbf{u}$  и жидкости  $\mathbf{v}$  удовлетворяют уравнению движения для упругой и жидкой фаз с учетом их взаимодействия [8]:

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{u} + (H - \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - C \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} = \\ = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}, \\ C \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - M \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} = \\ = \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \frac{\alpha \rho_f}{m} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} - F \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Компоненты тензора напряжений в пористо-упругой среде имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \\ + [(H - 2\mu - Cm)e - (C - mM)\zeta] \delta_{ij}, \\ \sigma^f = m(Ce - M\zeta), \tau_{ij} = \sigma_{ij}^s + \sigma^f, \\ \zeta = \operatorname{div} \mathbf{w}, \quad e = \operatorname{div} \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $e_{ij}$  – тензор деформаций;  $\tau_{ij}$  – тензор напряжений, приложенных к пористо-упругой среде;  $\sigma_{ij}^s$  – тензор напряжений, приложенных к упругому скелету;  $\sigma^f = -mpf$ ;  $p^f$  – давление жидкости в порах упругого скелета;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $m$  – пористость;  $\mathbf{w} = m(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ .

Величины  $H$ ,  $C$ ,  $M$  – это коэффициенты, определяемые через характеристики среды:

$$\begin{aligned} H = \frac{(K_s - K_b)^2}{D - K_b} + K_b + \frac{4\mu}{3}, \\ M = \frac{K_s^2}{D - K_b}, \quad C = \frac{K_s(K_s - K_b)}{D - K_b}, \\ D = K_s \left[ 1 + m \left( \frac{K_s}{K_f} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\rho_s$  – плотность упругого скелета;  $K_s$  – модуль всестороннего сжатия упругого скелета;  $\rho_f$  – плотность поровой жидкости,  $K_f$  – модуль всестороннего сжатия поровой жидкости;  $K_b$  – модуль всестороннего сжатия пористой среды;  $\mu$  – модуль сдвига пористой среды;  $\alpha$  – извилистость. Величина  $\alpha$  определяет коэффициент динамической связи упругого скелета и жидкости:

$$\rho_{12} = (1 - \alpha)\rho_f m < 0.$$

Средняя плотность  $\rho$  связана с плотностями упругого скелета и жидкости соотношением

$$\rho = (1 - m)\rho_s + m\rho_f.$$

Диссипативный член в уравнении (1) имеет структуру  $F = f(\omega)\rho_f\nu_f/K_{pr}$ , где  $\nu_f$  – кинематическая вязкость поровой жидкости;  $K_{pr}$  – проницаемость;  $f(\omega)$  – частотно-зависимая функция, определяемая характером движения жидкости по порам упругого скелета:

$$f = \frac{kT(k)}{4(1 - 2T(k)/ik)}, \quad (4)$$

$$k = a_2\sqrt{\frac{\omega}{\nu_f}}, \quad T(k) = \frac{\text{ber}'(k) + i\text{bei}'(k)}{\text{ber}(k) + i\text{bei}(k)}.$$

Функции  $\text{ber}(k)$ ,  $\text{bei}(k)$  – действительная и мнимая части функций Кельвина;  $\omega$  – круговая частота,  $a_2$  – структурный коэффициент. Параметр  $a_2$  имеет размерность длины, зависит от размера и формы пор. Его величина определяется экспериментально. В работе [8]  $a_2$  задан в виде

$$a_2 = \eta\sqrt{\frac{K_{pr}}{m}}, \quad (5)$$

где  $\eta$  – коэффициент, учитывающий геометрию пор. Согласно последним экспериментам, проведенным на ансамбле сфер,  $\eta = 3.2$  [9].

Для полноты постановки задачи необходимо задать условия сопряжения полупространств, т.е. дать математическую формулировку характера взаимодействия сред на границе. Начиная с работы [1] (см. также [3,5,10]), условия сопряжения для контакта жидкость – пористо-упругая среда на поверхности  $z=0$  принято выражать через:

- непрерывность нормальных напряжений

$$\sigma_{zz}^s(x, 0) + \sigma^f = -p^{(1)}; \quad (6)$$

- отсутствие касательных напряжений

$$\sigma_{zx}^s(x, 0) = 0; \quad (7)$$

- равенство объемов жидкости, протекающей через границу

$$(1 - m)\frac{\partial u_z(x, 0)}{\partial t} + m\frac{\partial v_z(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial v_z^{(1)}(x, 0)}{\partial t}; \quad (8)$$

- линейное соотношение между скачком давления и нормальной компонентами скорости жидкости в пористо-упругой среде

$$k\left(\frac{\partial v_z^{(1)}(x, 0)}{\partial t} - \frac{\partial u_z(x, 0)}{\partial t}\right) = p^{(1)} - p^f, \quad (9)$$

где  $p^{(1)}$  и  $v^{(1)}$  – соответственно, давление и смещение в жидком полупространстве, а параметр  $k$  – коэффициент сопротивления, который характеризует граничную поверхность пористой среды.

Случай открытых пор  $k=0$  соответствует беспрепятственному обмену жидкостью на границе. Тогда уравнение (9) принимает вид

$$p^{(1)} = p^f. \quad (10)$$

Для случая полностью закрытых пор  $k=\infty$ . Тогда уравнение (9) может быть представлено как

$$v_z(x, 0) = u_z(x, 0). \quad (11)$$

Промежуточные случаи конечных значений  $k > 0$  соответствуют ограниченному обмену жидкостью.

Для пористо-упругой среды векторы смещения жидкости в порах и упругом скелете могут быть выражены через скалярный и векторный потенциалы:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla\phi_s + \text{rot}\psi_s, & \text{div}\psi_s &= 0, \\ \mathbf{v} &= \nabla\phi_f + \text{rot}\psi_f, & \text{div}\psi_f &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

При этом, согласно [8], скалярный потенциал допускает представление

$$\phi_s = \phi_0 + \phi_1. \quad (13)$$

Функции  $\phi_j$  определяются как решения уравнений Гельмгольца

$$\Delta\phi_j + k_j^2\phi_j = 0, \quad k_j^2 = \frac{\omega^2}{c^2}s_j, \quad j = 0, 1. \quad (14)$$

Здесь  $s_j$  – корень квадратного уравнения

$$A_1s_j^2 - B_1s_j + C_1 = 0, \quad j = 0, 1 \quad (15)$$

с коэффициентами

$$A_1 = q_{22}q_{11} - q_{12}^2, \quad C_1 = \Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2 + i\Gamma,$$

$$B_1 = q_{11}\Gamma_{22} + q_{22}\Gamma_{11} - 2q_{12}\Gamma_{12} + i\Gamma,$$

при записи которых использованы обозначения

$$q_{11} = \frac{H - 2Cm + Mm^2}{H}, \quad q_{22} = \frac{Mm^2}{H},$$

$$q_{12} = \frac{Cm - Mm^2}{H}, \quad c^2 = \frac{H}{\rho},$$

$$\rho_{11} = (1 - m)\rho_s - \rho_{12}, \quad \rho_{22} = m\rho_f - \rho_{12},$$

$$\Gamma_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{\rho}, \quad \Gamma = \frac{m^2\rho_f\nu_f}{K_{pr}\rho\omega}.$$

Для потенциала  $\phi_f$  справедливо уравнение

$$\phi_f = M_0\phi_0 + M_1\phi_1$$

с коэффициентами

$$M_j = \frac{\Gamma_{11}q_{22} - \Gamma_{12}q_{12} - A_1s_j + (q_{22} + q_{12})i\Gamma}{\Gamma_{22}q_{12} - \Gamma_{12}q_{22} + (q_{22} + q_{12})i\Gamma}, \quad (16)$$

$$j = 0, 1.$$

Векторный потенциал  $\psi_s$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\psi_s + k_2^2\psi_s = 0, \quad (17)$$

$$k_2^2 = \frac{\omega^2\rho}{\mu} [\Gamma_{11} + M_2\Gamma_{12} + (1 - M_2)i\Gamma]$$

и соотношению

$$\psi_f = M_2\psi_s, \quad M_2 = \frac{-\Gamma_{12} + i\Gamma}{\Gamma_{22} + i\Gamma}. \quad (18)$$

Вектор смещения в жидком полупространстве представим через соответствующий скалярный потенциал:

$$\mathbf{v}^{(1)} = \nabla\phi^{(1)}. \quad (19)$$

## 2. ОТРАЖЕНИЕ – ПРОХОЖДЕНИЕ ОБЪЕМНЫХ ВОЛН БЕЗ УЧЕТА ДИССИПАЦИИ

Рассмотрим отражение объемных волн от границы раздела жидкого и пористо-упругого полупространств без учета затухания в среде. Если диссипация в пористо-упругом полупространстве не учитывается, то  $\nu_f = 0$ , а  $H$ ,  $\mu$ ,  $C$ ,  $M$  – действительные коэффициенты.

Пусть из пористо-упругого полупространства падает быстрая продольная волна, которая описывается потенциалом

$$\phi^{(1)} = \widetilde{A}_1 e^{i(\widetilde{\xi}x + \widetilde{\alpha}_1 z)} e^{-i\omega t}, \quad (20)$$

$$\widetilde{\alpha}_1 = \sqrt{k_1^2 - \widetilde{\xi}^2}.$$

Здесь  $\widetilde{\xi} = k_1 \cos \gamma$  – волновое число падающей волны;  $\gamma$  – угол падения;  $k_1 = \omega/c_1$ . Геометрия задачи показана на рис. 1.

В соответствии с возможностью существования трех типов волн в пористо-упругой среде, отраженное поле запишем как сумму быстрой и медленной продольных волн, а также поперечной

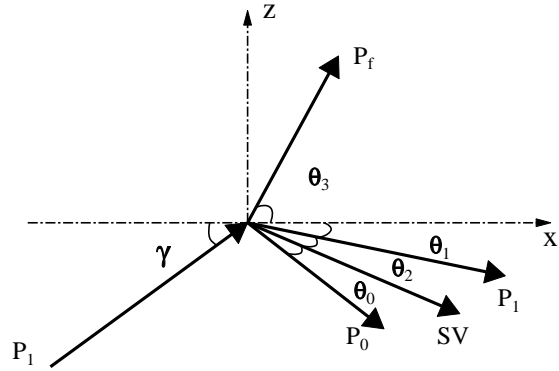


Рис. 1. Геометрия задачи

волны с потенциалами

$$\phi_0 = A_0 e^{i(\xi_0 x - \alpha_0 z)} e^{-i\omega t},$$

$$\phi_1 = A_1 e^{i(\xi_1 x - \alpha_1 z)} e^{-i\omega t},$$

$$\psi_1 = B e^{i(\xi_2 x - \alpha_2 z)} e^{-i\omega t}, \quad (21)$$

$$\alpha_i = \sqrt{k_i^2 - \xi_i^2}, \quad \xi_i = k_i \cos \theta_i,$$

$$i = 0, 1, 2.$$

В жидком полупространстве существует прошедшая волна

$$\phi^{(1)} = D e^{i(\xi_3 x + \alpha_3 z)} e^{-i\omega t},$$

$$k_3 = \omega/c_f^{(1)}, \quad c_f^{(1)} = \sqrt{K_f^{(1)}/\rho_f^{(1)}}, \quad (22)$$

$$\alpha_3 = \sqrt{k_3^2 - \xi_3^2}, \quad \xi_3 = k_3 \cos \theta_3.$$

Из граничных условий следует связь между углами падения и отражения (закон Снеллиуса):

$$k_1 \cos \gamma = k_3 \cos \theta_3 = k_0 \cos \theta_0 =$$

$$= k_1 \cos \theta_1 = k_2 \cos \theta_2, \quad (23)$$

$$\widetilde{\xi} = \xi_3 = \xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = \xi.$$

Таким образом, угол отражения быстрой продольной волны равен ее углу падения, а углы отраженных медленной продольной и поперечных волн и прошедшей волны в жидкость определяются соотношениями (23).

Выполнение условий (6)–(8) для открытых пор (проницаемая граница, случай (10)) приводит к

системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \alpha_0(1 - mm_0)A_0 + \alpha_1(1 - mm_1)A_1 - \\ & \xi(1 - mm_2)B + \alpha_3 D = \alpha_1(1 - mm_1)\widetilde{A}_1, \\ & \alpha_0 \xi A_0 + \alpha_1 \xi A_1 + \beta B = \alpha_1 \xi \widetilde{A}_1, \\ & \tau_0 A_0 + \tau_1 A_1 - \alpha_2 \xi B - \frac{\rho_f^{(1)} \omega^2}{2\mu} D = -\tau_1 \widetilde{A}_1, \\ & r_0 k_0^2 A_0 + r_1 k_0^2 A_1 - \frac{m \rho_f^{(1)} \omega^2}{2\mu} D = -r_1 k_1^2 \widetilde{A}_1. \end{aligned} \quad (24)$$

При выполнении условий (6)–(8) для закрытых пор (непроницаемая граница, случай (11)) первые три уравнения системы (24) сохраняются, а четвертое принимает вид

$$\alpha_0 m_0 A_0 + \alpha_1 m_1 A_1 - \xi m_2 B = \alpha_1 m_1 \widetilde{A}_1. \quad (25)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tau_j &= \alpha_j + \frac{H - 2\mu - m_j C m}{2\mu} k_j^2; & m_i &= 1 - M_i; \\ r_j &= \frac{C m - m^2 M m_j}{2\mu}; & \beta &= \frac{k_2^2}{2} - \xi^2; \\ & & i &= 0, 1, 2; & j &= 0, 1. \end{aligned}$$

Несмотря на кажущуюся простоту соотношений (24) и (25), аналитическое исследование специфических случаев процесса отражения – прохождения представляет значительные трудности. Имеется в виду определение условий, при которых наблюдается полное сохранение типа движения (в отраженном поле существует только волна того же вида, что и падающая) или полная трансформация типа движения (в отраженном поле отсутствует волна, имеющая тот же типа, что и падающая). Такое исследование будет проведено в дальнейшем численными методами. Здесь же отметим, что, как и при отражении от свободной границы пористо-упругого полупространства [11], медленная продольная и поперечная волны вырождаются при скользящем падении ( $\alpha_1 = 0$ ). При нормальном падении ( $\xi = 0$ ) на проницаемую или непроницаемую границы в отраженном поле полностью вырождается только поперечная волна. Медленная продольная волна и волна, прошедшая в жидкое полупространство, существуют при любых параметрах пористой среды.

При падении на границу медленной продольной или поперечной волны, приходящей из пористо-упругого полупространства, или при падении волны из жидкости ситуация существенно меняется,

поскольку здесь падающая волна распространяется медленнее одной (быстрой продольной) или нескольких объемных волн. В этом случае процесс отражения – прохождения невозможно истолковать в рамках лучевых представлений для всех углов падения. Так, при определенных значениях угла падения углы для быстрой продольной волны  $\theta_1$  становятся чисто мнимыми и она превращается в неоднородную. Это происходит для углов падения, меньших критического угла для быстрой продольной волны:

- $\cos \gamma = c_2/c_1$  – при падении поперечной волны;
- $\cos \gamma = c_0/c_1$  – при падении медленной продольной волны;
- $\cos \gamma = c_f^{(1)}/c_1$  – при падении волны из жидкости.

Для указанных углов процесс отражения может быть проанализирован количественно на основании решения систем (24), (25), с учетом того, что

$$\alpha_1 = i \sqrt{k_2^2 \cos \gamma - k_1^2}.$$

Пусть на границу раздела падает поперечная волна из пористо-упругого полупространства. Тогда, в зависимости от параметров среды, для медленной продольной волны возможны следующие варианты:

- 1) ее скорость меньше скорости поперечной волны ( $c_0 < c_2$ ) и медленная продольная волна при всех углах падения остается распространяющейся;
- 2) ее скорость превышает скорость поперечной волны ( $c_0 > c_2$ ) и при определенных углах падения медленная продольная волна становится неоднородной.

В этом случае количественные оценки можно получить из соотношений (24), (25) учитывая, что

$$\alpha_0 = i \sqrt{k_2^2 \cos \gamma - k_0^2}.$$

Отметим, что неравенство  $c_1 > c_0$  справедливо всегда. Поэтому существует диапазон углов падения поперечной волны, при которых медленная продольная волна остается распространяющейся, а быстрая – уже неоднородная.

Для прошедшей в жидкое полупространство волны справедливы аналогичные рассуждения: если  $c_f > c_2$ , то при определенных углах падения поперечной волны прошедшая волна становится

неоднородной. В этом случае в соотношениях (24), (25) нужно принять

$$\alpha_3 = i\sqrt{k_2^2 \cos \gamma - k_3^2}.$$

Если угол падения поперечной волны меньше критического, то амплитуды отраженных и прошедшей волн становятся комплексными, т.е. существует сдвиг фаз между силами, действующими на упругий скелет, и вектором его перемещений  $\mathbf{u}$ , а также силами, действующими на поровую жидкость, и вектором ее перемещений  $\mathbf{v}$  (то же – для жидкого полупространства).

Подобный анализ можно провести для случая падения медленной продольной волны или волны из жидкости. Отметим также, что при изменении типа падающей волны в системах уравнений (24) и (25) меняется только правая часть.

### 3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Исследование волновых процессов будет неполным без изучения их энергетических характеристик. Рассмотрим распределение потока мощности падающей волны между различными объемными волнами. Компоненты вектора плотности потока мощности в пористо-упругой насыщенной жидкости среде определяются соотношением [5]

$$P_i = -\sigma_{ij}^s u_j - \sigma^f \delta_{ij} v_j.$$

Для гармонических процессов, как правило, оперируют величиной  $P_j$ , усредненной за период  $T = 2\pi/\omega$ :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i = \frac{1}{T} \int_0^T P_i dt = & -\frac{i\omega}{4} \left( \sigma_{ij}^s u_j^* - \sigma_{ij}^{s*} u_j + \right. \\ & \left. + \sigma^f \delta_{ij} v_j^* - \sigma^{f*} \delta_{ij} v_j \right). \end{aligned}$$

Индекс \* означает комплексное сопряжение.

Для рассматриваемого двумерного случая компоненты среднего потока мощности можно записать как

$$\begin{aligned} \tilde{P}_x = & -\frac{i\omega}{4} (\sigma_{xx}^s u_x^* - \sigma_{xx}^{s*} u_x + \sigma_{xz}^s u_z^* - \\ & - \sigma_{xz}^{s*} u_z + \sigma^f v_x^* - \sigma^{f*} v_x), \\ \tilde{P}_z = & -\frac{i\omega}{4} (\sigma_{zz}^s u_z^* - \sigma_{zz}^{s*} u_z + \sigma_{xz}^s u_x^* - \\ & - \sigma_{xz}^{s*} u_x + \sigma^f v_z^* - \sigma^{f*} v_z). \end{aligned} \quad (26)$$

В жидком полупространстве поток мощности имеет вид

$$\begin{aligned} P_z^{(1)} = & -\frac{i\omega}{4} [p^{(1)}(-i\omega v_z^{(1)})^* - p^{(1)*}(-i\omega v_z^{(1)})], \\ P_x^{(1)} = & -\frac{i\omega}{4} [p^{(1)}(-i\omega v_x^{(1)})^* - p^{(1)*}(-i\omega v_x^{(1)})]. \end{aligned} \quad (27)$$

В случае падения на проницаемую или непроницаемую границу раздела быстрой продольной волны получаем

$$\begin{aligned} \tilde{P}_z = & \frac{\omega\mu}{2} \left( \frac{H}{\mu} [\Lambda_1 \alpha_1 (\tilde{A}_1^2 - A_1^2) - \Lambda_0 \alpha_0 A_0^2] - \right. \\ & \left. - \alpha_2 k_2^2 B^2 - \frac{\rho_f^{(1)} \omega^2}{\mu} \alpha_3 D^2 \right), \\ \Lambda_i = & k_i^2 (q_{11} + 2q_{12} M_i + q_{22} M_i^2). \end{aligned} \quad (28)$$

Поскольку в выражение (28) не входят слагаемые с перекрестными произведениями  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B$  и  $D$ , то  $z$ -компонента среднего за период потока мощности в направлении  $z$  определяется суммой потоков мощностей, которые уносятся отдельными волнами. Следовательно, в этом направлении справедлив принцип суперпозиции средних потоков мощности, переносимых разными типами волн, и равенство (28) выражает закон сохранения энергии. Вдоль границы компонента среднего за период вектора потока мощности имеет иную структуру и принцип суперпозиции по потоку мощности к ней не применим, поскольку в соответствующее выражение входят слагаемые с перекрестными произведениями. Кроме того,  $x$ -компонента вектора потока мощности зависит от  $z$ , т.е. является направленной величиной.

В случае падения медленной продольной или поперечной волны из пористо-упругого полупространства, а также волны, приходящей из жидкого полупространства, при углах падения, меньших критического, в выражении для средней за период плотности потока мощности в глубину (в направлении  $z$ ) следует сделать замены, учитывающие то, что отраженные или прошедшие волны могут стать неоднородными. Например, если падающей является поперечная волна, то при закритических углах для быстрой поперечной волны следует писать

$$\alpha_1 A_1^2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_1^*}{2} |A_1|^2 \exp(\alpha_1 - \alpha_1^*)z;$$

для углов падения, когда медленная продольная волна становится неоднородной, –

$$\alpha_0 A_0^2 = \frac{\alpha_0 + \alpha_0^*}{2} |A_0|^2 \exp(\alpha_0 - \alpha_0^*)z;$$

а для углов, когда прошедшая волна в жидкое полупространство становится неоднородной, –

$$\alpha_3 D^2 = \frac{\alpha_3 + \alpha_3^*}{2} |D|^2 \exp(\alpha_3 - \alpha_3^*) z.$$

Для докритических углов падения выполняются равенства  $\alpha_0^* = \alpha_0$ ,  $\alpha_1^* = \alpha_1$ ,  $\alpha_3^* = \alpha_3$  и все эти величины являются вещественными. Для закритических углов для быстрой продольной волны получаем  $\alpha_1^* = -\alpha_1$  (неоднородная быстрая продольная волна энергию в глубину не переносит). Аналогичный вывод справедлив и в случаях закритических углов для медленной продольной волны и волны прошедшей в жидкость. Подобные же преобразования следует проводить при падении на границу раздела медленной продольной волны или волны из жидкости.

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для более полного описания особенностей отражения волн от границы раздела жидкости и пористо-упругой среды проведенный качественный анализ следует дополнить количественными данными. Для этого приведем рассчитанные распределения энергии падающей волны между различными типами объемных волн для конкретных параметров пористо-упругих сред. При этом особое внимание будет уделено влиянию изменения физических констант среды на энергетические характеристики отраженного и прошедшего полей. Рассмотрим пористо-упругую среду, для которой  $\alpha = 1.25$ ,  $\rho_f = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $K_f = 2.25 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $K_s = 49.9 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\mu = 2.25 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\nu = 0.24$ . Считаем, что верхнее полупространство заполнено жидкостью, обладающей теми же свойствами, что и поровая жидкость ( $\rho_f = \rho_f^{(1)}$ ,  $K_f = K_f^{(1)}$ ).

##### 4.1. На границу раздела падает быстрая продольная волна из пористо-упругого полупространства

На рис. 2 представлены распределения нормированной энергии  $P_j/P^0$  между различными отраженными волнами и прошедшей волной при различных углах падения  $\gamma$ . По сути, это – коэффициенты отражения и прохождения по энергии. Здесь и далее кривые 0 соответствуют медленной продольной, 1 – быстрой продольной, 2 – поперечной, а 3 – прошедшей волне.

Из графиков видно, что распределение энергии между отраженными волнами сильно зависит от угла падения. С его увеличением коэффициент отражения по энергии для быстрой продольной

волны падает, достигая минимума (около 17 % величины  $P^0$ ) при  $\gamma = 0.66$  для обоих типов граничных условий, после чего незначительно возрастает. Энергия, переносимая быстрой продольной волной, практически (в пределах 2 %) не зависит от типа граничных условий. Поведение энергии поперечной волны демонстрирует зависимость от типа граничных условий. Ее доля растет с увеличением угла и достигает максимума – до 25 % энергии падающей волны при  $\gamma = 0.53$  для проницаемой границы, а для непроницаемой – до 30 % при  $\gamma = 0.47$ . Медленная продольная волна возбуждается незначительно: для проницаемой границы она переносит до 2.5 % энергии, а для непроницаемой – не более 1 %.

Коэффициент прохождения для прошедшей волны с увеличением угла падения возрастает. При нормальном падении быстрой продольной волны в верхнее (жидкое) полупространство переходит 64.5 % энергии  $P^0$  для проницаемой границы и 66.2 % – для непроницаемой границы. Для обоих случаев рассматриваемые энергетические коэффициенты прохождения близки (отличие составляет не более 5 % относительно проницаемой границы).

Итак, для данных параметров среды тип граничных условий наиболее сильно сказывается на коэффициенте отражения медленной продольной волны. Хотя она возбуждается относительно слабо, но для непроницаемой границы коэффициент прохождения по энергии оказывается значительно меньшим, чем для проницаемой. При малых углах падения это отличие компенсируется различной степенью возбуждения поперечной волны для разных типов граничных условий, а при больших (близких к нормальному падению) – неодинаковым возбуждением прошедшей волны. Аналогичное влияние типа граничных условий на распределение энергии падающей волны между различными отраженными и прошедшей волной отмечалось в работе [5]. Однако при изменении параметров среды ситуация может меняться и эффект смены типа граничных условий может быть более значительным.

Рассмотрим влияние пористости на особенности процесса отражения – прохождения волн на границе раздела. На рис. 3 представлены распределения энергии падающей волны между отраженными и прошедшей волнами для  $m = 0.5$ , а на рис. 4 – для  $m = 0.7$ . Прежде всего отметим, что для выбранных величин пористости существуют углы падения, при которых наблюдается полное превращение типа движения, т.е. амплитуда отраженной быстрой продольной волны равна нулю. Для

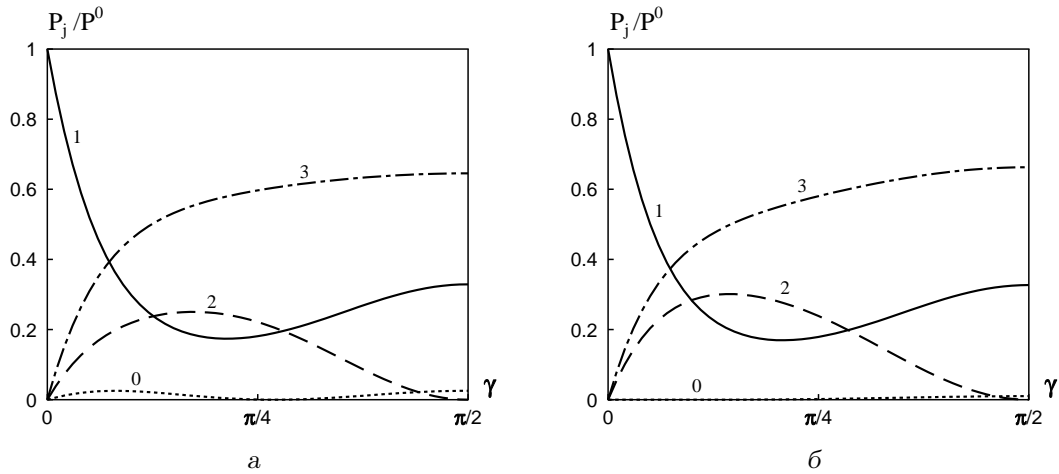


Рис. 2. Коэффициенты отражения и прохождения по энергии при различных углах падения  $\gamma$  быстрой продольной волны из пористо-упругого полупространства ( $m=0.2$ ):  
 а – проницаемая граница, б – непроницаемая граница

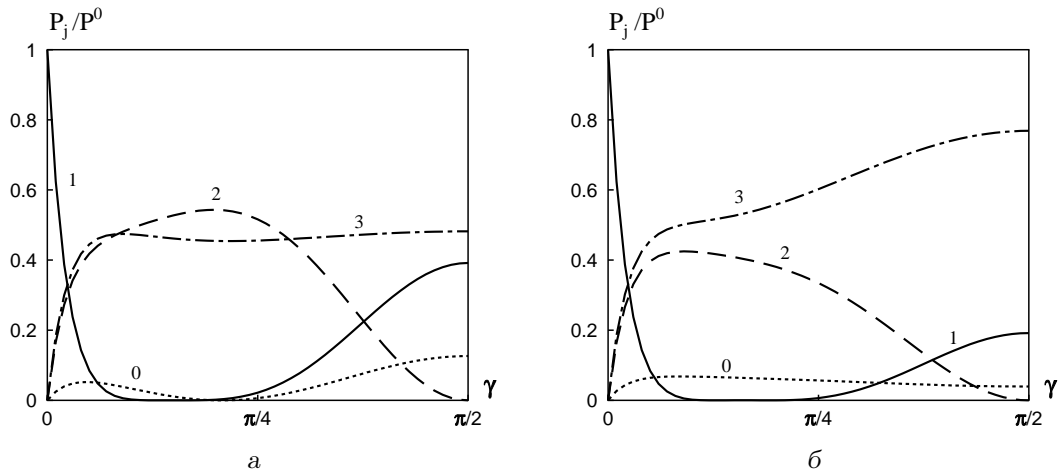


Рис. 3. Коэффициенты отражения и прохождения по энергии при различных углах падения  $\gamma$  быстрой продольной волны из пористо-упругого полупространства ( $m=0.5$ ):  
 а – проницаемая граница, б – непроницаемая граница

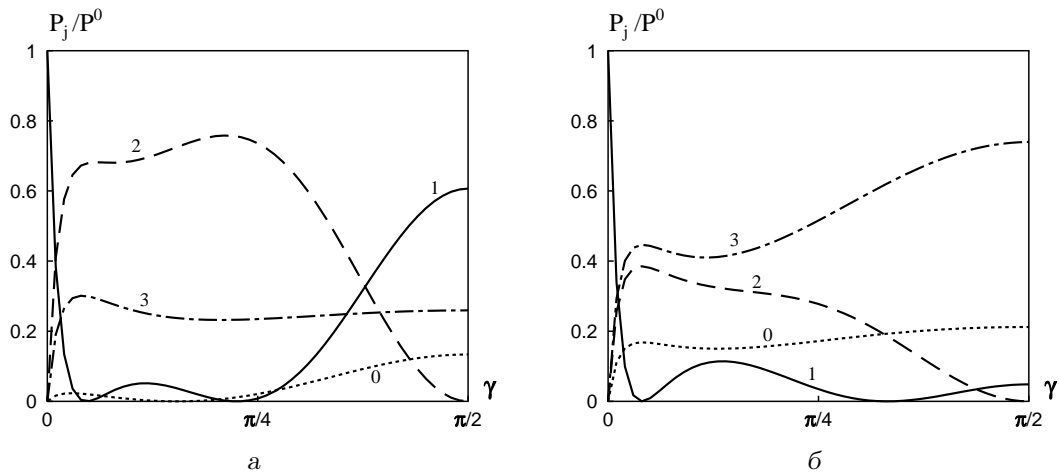


Рис. 4. Коэффициенты отражения и прохождения по энергии при различных углах падения  $\gamma$  быстрой продольной волны из пористо-упругого полупространства ( $m=0.7$ ):  
 а – проницаемая граница, б – непроницаемая граница



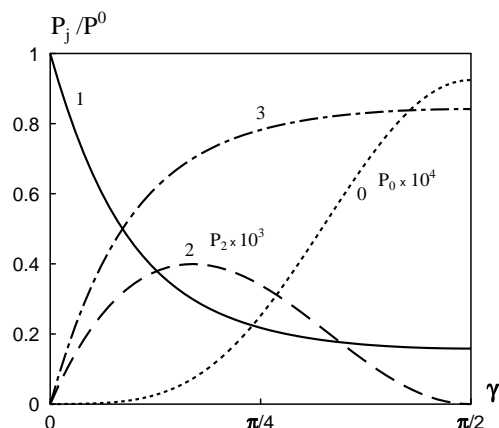


Рис. 5. Коэффициенты отражения и прохождения по энергии при различных углах падения  $\gamma$  быстрой продольной волны из мягкой среды. Для медленной продольной волны значения увеличены в  $10^4$ , а для поперечной – в  $10^3$  раз

$m=0.5$  такой угол один, а для  $m=0.7$  их два. В зависимости от типа граничных условий, величины углов, соответствующих полному превращению типа движения, изменяются. При увеличении пористости возрастают отличия в поведении коэффициентов отражения – прохождения для различных типов граничных условий. Для случая проницаемой границы (см. рис. 3, а, 4, а) значительная часть энергии переносится поперечной волной (кривая 2). Для непроницаемой границы (см. рис. 3, б, 4, б) поперечная волна возбуждается намного слабее, а наиболее энергетически выраженной оказывается прошедшая волна (кривая 3). Для непроницаемой границы медленная продольная волна возбуждается сильнее, чем для проницаемой границы.

Таким образом, утверждение о том, что характер проницаемости слабо влияет на процесс отражения – прохождения волн на границе раздела пористо-упругого полупространства и жидкости в общем случае некорректно.

Рассмотрим влияние модуля сдвига на изучаемые процессы. Изменение этого параметра практически важно, поскольку оно характеризует различные типы пористых сред. Мягкие среды, подобные песку, имеют отношение порядка  $\mu/K_f=0.01$ . Для жестких сред (например, горной породы) типично  $\mu/K_f=10$ .

Для мягких сред на рис. 5 представлено распределение энергии падающей волны между отраженными и прошедшей волной для  $m=0.3$  в случае проницаемой границы. Из графика следует, что медленная продольная и поперечная волны при

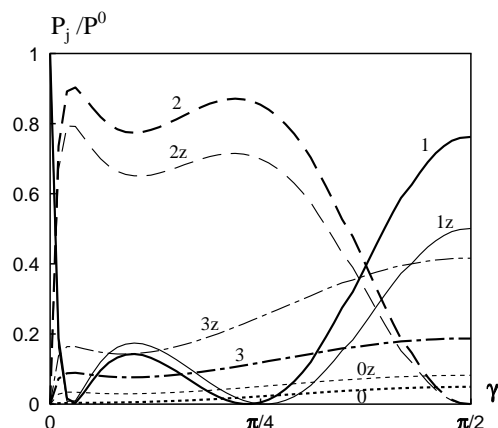


Рис. 6. Коэффициенты отражения и прохождения по энергии при различных углах падения  $\gamma$  быстрой продольной волны из жесткой среды. Индексы  $z$  соответствуют непроницаемой границе

отражении от границы раздела быстрой продольной волны практически не возбуждаются. Таким образом, процесс отражения – прохождения практически полностью определяется отраженной быстрой продольной волной и прошедшей волной в жидкое полупространство. Изменение типа граничных условий почти не влияет на распределение энергии в отраженном и прошедшем полях. Хотя для проницаемой границы отраженная медленная продольная волна возбуждается значительно сильнее, однако она переносит не более 1.6 % энергии падающей волны.

На рис. 6 показаны величины, аналогичные рис. 5, но для жесткой пористо-упругой среды (индексы  $z$  соответствуют непроницаемой границе). Очевидно, что тип граничных условий существенно изменяет распределение энергии между отдельными волнами. При этом медленная продольная волна возбуждается значительно, а для непроницаемой границы ее вклад в общее поле больше, чем для проницаемой.

Таким образом, можно сделать вывод, что тип граничных условий оказывает существенное влияние на распределение энергии быстрой продольной волны между отраженными и прошедшей волнами только тогда, когда медленная продольная волна возбуждается достаточно сильно.

#### 4.2. Волна падает из жидкого полупространства

Как уже отмечалось, в данном случае существуют критические углы падения, при которых в прошедшем поле появляются неоднородные волны. Они не переносят энергию в глубину пористо-упругого полупространства, однако их появление

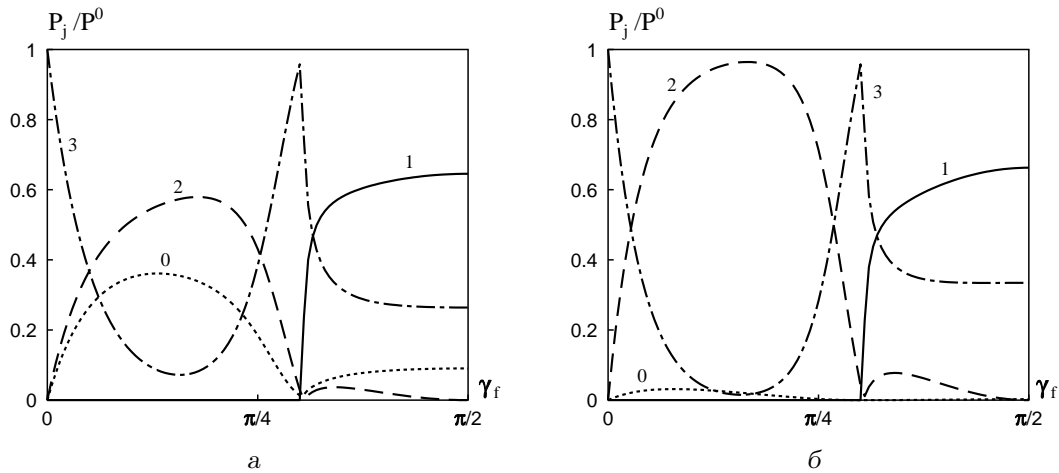


Рис. 7. Коэффициенты отражения и прохождения по энергии при различных углах падения  $\gamma_f$  волны из жидкого полупространства ( $m=0.2$ ): а – проницаемая граница, б – непроницаемая граница

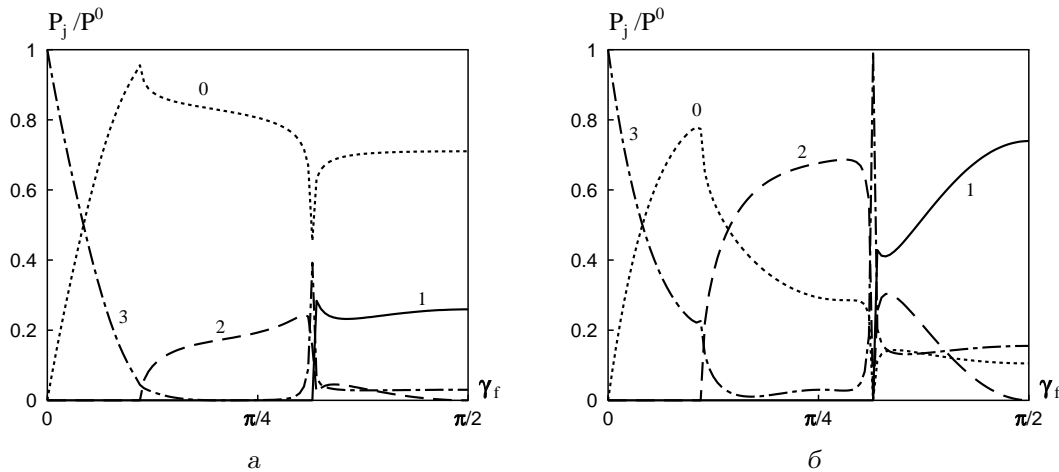


Рис. 8. Коэффициенты отражения и прохождения по энергии при различных углах падения  $\gamma_f$  волны из жидкого полупространства ( $m=0.7$ ): а – проницаемая граница, б – непроницаемая граница

существенно изменяет картину волнового поля.

Проведем энергетический анализ процесса отражения – прохождения волны, падающей из жидкости, по аналогии с предыдущим разделом. Вначале рассмотрим влияние пористости. На рис. 7 представлены распределения энергии падающей волны между отраженными и прошедшей волнами для  $m=0.2$ , а на рис. 8 – для  $m=0.7$ . Как для проницаемой, так и для непроницаемой границы при нормальном падении энергия падающей волны распределяется между волной, отраженной в жидкость, и прошедшими в пористо-упругое полупространство быстрой и медленной продольными волнами. В зависимости от типа граничных условий и параметров среды наиболее энергетически выраженной может стать как медленная,

так и быстрая продольная волна. При пористости  $m=0.2$  для обоих типов граничных условий основная часть энергии переносится прошедшей быстрой продольной волной. При  $m=0.7$  в отраженном поле для случая проницаемой границы доминирует медленная продольная волна, а для непроницаемой – быстрая продольная. Во всех ситуациях основная часть энергии падающей волны передается в пористо-упругое полупространство.

При изменении угла падения наступает момент, когда быстрая продольная волна становится неоднородной. Область углов вблизи критического значения для быстрой продольной волны ( $\gamma_f < \theta_{cr}^{(1)}$ ) характеризуется резким ростом энергии отраженного поля. Значительное уменьшение доли энергии, проходящей в пористо-упругую сре-

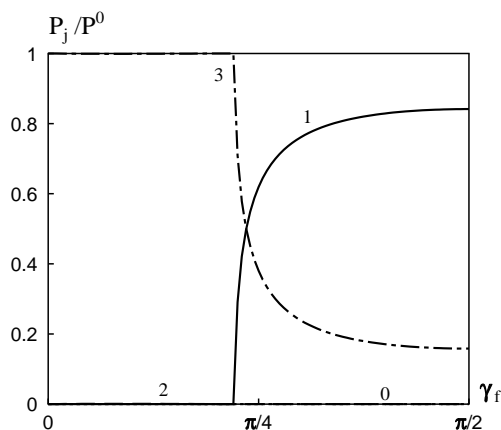


Рис. 9. Коэффициенты отражения и прохождения по энергии при различных углах падения  $\gamma_f$  волны из жидкости в мягкую среду

ду, в области критического угла отмечалось и для других параметров среды [5]. При анализе процесса отражения – прохождения волн на границе двух упругих сред [12] также было показано, что при околоскритических углах наблюдается резкое увеличение энергии отраженного поля.

Дальнейшее уменьшение угла падения приводит к росту энергии, проходящей в пористо-упругое полупространство. При этом она уносится поперечной и медленной продольной волнами. Уровень их возбуждения зависит от типа граничных условий и параметров среды. Для пористости  $m=0.7$  существует еще один критический угол для поперечной волны ( $\theta_{cr}^{(2)}=0.35$ ). Вблизи него не наблюдается резкого увеличения энергии отраженного поля, однако существует локальный максимум энергии, переносимой медленной продольной волной.

Рассмотрим влияние модуля сдвига. На рис. 9 представлены энергетические коэффициенты отражения и прохождения при падении волны из жидкости на границу раздела с мягкой средой ( $\mu/K_f=0.01$ ). Как при падении быстрой продольной волны, волновое здесь поле описывается быстрой продольной волной и волной, отраженной в жидкое полупространство. Поперечная и медленная продольная волны возбуждаются незначительно и практически не влияют на общую картину. Независимо от типа граничных условий, при нормальном падении основная часть энергии проходит в пористо-упругую среду. С уменьшением угла падения энергия отраженного поля постепенно возрастает и при углах, меньших критического для быстрой продольной волны, практически вся энергия падающей волны

отражается от границы.

Ситуация существенно изменяется при отражении от жесткого пористо-упругого полупространства с  $\mu/K_f=10$  (рис. 10). Для непроницаемой границы сохраняются отмеченные ранее особенности процесса отражения – прохождения. Речь идет о существовании локального максимума в энергии отраженного поля при угле падения, равном критическому значению для быстрой продольной волны ( $\gamma_f=1.30$ ), и резком увеличении энергии отраженного поля при падении под критическим углом для поперечной волны ( $\gamma_f=1.13$ ). Отличительной особенностью данного случая является резкое уменьшение энергии отраженного поля при закритических углах для быстрой продольной и поперечной волн. В этом диапазоне энергию падающей волны в направлении, перпендикулярном границе, переносят только волна, отраженная в жидкость, и прошедшая медленная продольная волна. При угле падения ( $\gamma_f=1.08$ ) энергия отраженного поля резко падает, причем в прошедшем поле медленная продольная волна переносит до 60 % энергии падающей волны. Такое перераспределение энергетических вкладов не может быть предсказано в рамках модели однофазных сред и является специфической особенностью процесса отражения – прохождения для пористо-упругих насыщенных сред.

Для проницаемой границы жесткой пористой среды (см. рис. 10, б) при угле падения, равном критическому углу для быстрой продольной волны, также наблюдается локальный максимум в энергии отраженного поля. В то же время, при падении под критическим углом для поперечной волны локальный экстремум в энергетическом распределении отсутствует. Значение угла падения  $\gamma_f=1.08$  ( $\gamma_f < \theta_{cr}^{(2)}$ ) также является особым. В отличие от случая непроницаемой границы, здесь наблюдается максимум отраженного поля – до 99 % энергии падающей волны.

Таким образом, при падении волны из жидкости картина распределения энергии падающей волны между отраженными и прошедшими волнами кардинально изменяется в соответствии с типом граничных условий.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проанализирован процесс отражения объемных волн от границы раздела жидкость – пористо-упругое полупространство. Показано, что значительные количественные и качественные различия при отражении волн от проницаемой и непрони-

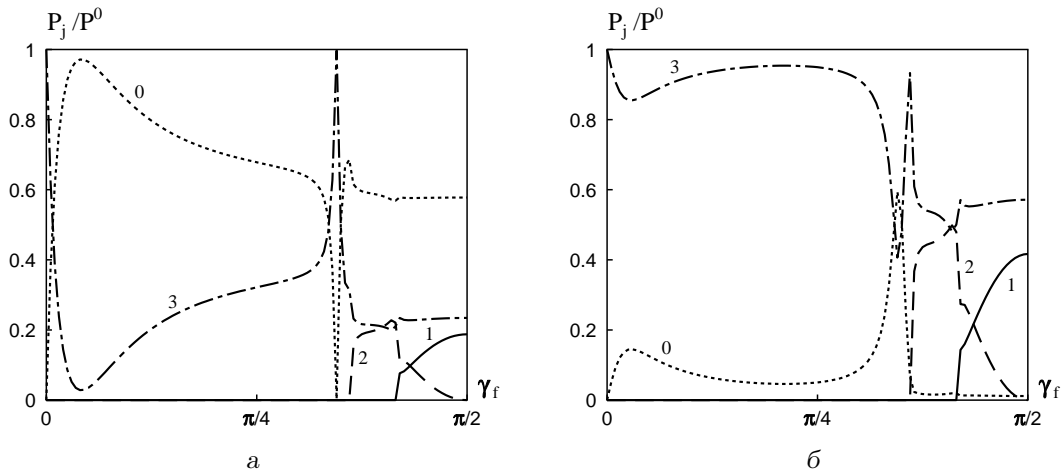


Рис. 10. Коэффициенты отражения и прохождения по энергии при различных углах падения  $\gamma_f$  волны из жидкости в жесткую среду:  
а – проницаемая граница, б – непроницаемая граница;

паемой свободной границы существуют, если медленная продольная волна возбуждается достаточно сильно (переносит не менее 2 % энергии падающей волны). Как и при отражении волны от границы жидкости с упругим полупространством, для определенных параметров пористой среды наблюдаются явления как полного сохранения, так и полного превращения типа движения.

При падении на границу волны из жидкости существуют критические углы, ниже которых объемная волна становится неоднородной. Вблизи критических значений при незначительных изменениях углов падения наблюдаются резкие изменения в распределении энергии падающей волны по отдельным типам движения. Для процесса отражения – прохождения волн на границе жидкость – пористо-упругое полупространство характерно резкое изменение характера распределения энергии падающей волны для закритических углов (т. е. углов, меньших критического).

Для вертикальной компоненты среднего за период вектора потока мощности справедлив принцип суперпозиции по энергии. Он заключается в том, что энергия, которая приносится на границу падающей волной, равна энергии, которую переносят отраженная и прошедшие волны. Неоднородная волна энергию в глубину не переносит. Вдоль границы полупространства принцип суперпозиции по энергии не выполняется.

1. *Deresiewicz H., Rice J. T.* The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid. III. Reflection of plane waves at a free plane boundary (general case) // *Bull. Seism. Soc. Amer.*– 1962.– **52**,

N 3.– P. 595–625.

2. *Deresiewicz H., Skalak R.* On uniqueness in dynamic poroelasticity // *Bull. Seism. Soc. Amer.*– 1963.– **53**, N 4.– P. 783–788.
3. *Stoll R., Kan T.-K.* Reflection of acoustic waves at a water-sediment interface // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1981.– **70**, N 1.– P. 149–156.
4. *Santon J. E., Corbero J. M., Ravazzoli C. L., Hensley J. L.* Reflection and transmission coefficients in fluid-saturated porous media // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1992.– **91**, N 4, Pt. 1.– P. 1911–1923.
5. *Wu K., Xue Q., Adler L.* Reflection and transmission of elastic waves from a fluid-saturated porous solid boundary // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1990.– **87**, N 6.– P. 2349–2358.
6. *Denneman A. I. M., Drijkoningen G. G., Smeulders D. M. J., Wapenaar K.* Reflection and transmission of waves at a fluid/porous-medium interface // *Geophysics.*– 2002.– **67**, N 1.– P. 282–291.
7. *Chotiros N. P.* Biot model of sound propagation in water-saturated sand // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1995.– **97**, N 1.– P. 199–214.
8. *Biot M. A.* Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1956.– **28**, N 2.– P. 168–191.
9. *Badiey M., Cheng A. H.-D., Mu Y.* From geology to geoacoustics. – Evaluation of Biot–Stoll sound speed and attenuation for shallow water acoustics // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1998.– **103**, N 1.– P. 309–320.
10. *Feng F., Johnson D. L.* High-frequency acoustic properties of a fluid-porous solid interface. I. New surface mode // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1983.– **74**, N 3.– P. 906–914.
11. *Городецкая Н. С.* Отражение волн от свободной границы пористо-упругого насыщенного жидкостью полупространства // *Акуст. вісн.*– 2002.– **5**, N 4.– С. 5–14.
12. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.