

УДК 534.22-18

# ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У СИСТЕМІ ДВОХ ПАРАЛЕЛЬНИХ СТЕРЖНІВ, ПЕРІОДИЧНО ПІДКРІПЛЕНИХ ЖОРСТКИМИ ПОПЕРЕЧНИМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ І ЗВ'ЯЗАНИХ З АКУСТИЧНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

В. Н. ОЛІЙНИК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 19.03.2008

Розглянуто можливість поширення гармонічних хвиль у системі двох періодично підкріплених жорсткими поперечними перегородками паралельних ідеально пружних стержнів, які рухаються синхронно. Об'єми, обмежені стержнями й сусідніми перегородками, заповнені акустичним середовищем без дисипації. Із застосуванням методу Флоке одержано відповідне дисперсійне рівняння і проаналізовано його корені. Для ряду часткових випадків вказані діапазони існування хвилі, що поширюється. Встановлено, що при геометричних і фізичних параметрах, які відповідають будові легеневої паренхіми, для всього звукового частотного діапазону фазова швидкість знайденої хвилі не диспергує й відповідає ефективній швидкості поширення поздовжньої хвилі у гетерогенному середовищі.

Рассмотрена возможность распространения гармонических волн в системе двух периодически подкрепленных жесткими поперечными перегородками паралельных идеально упругих стержней, движущихся синхронно. Объемы, ограниченные стержнями и соседними перегородками, заполнены акустической средой без диссипации. С применением метода Флоке получено соответствующее дисперсионное уравнение и проанализированы его корни. Для ряда частных случаев указаны диапазоны существования распространяющейся волны. Установлено, что при геометрических и физических параметрах, соответствующих строению легочной паренхимы, для всего звукового частотного диапазона фазовая скорость найденной волны не диспергирует и соответствует эффективной скорости распространения продольной волны в гетерогенной среде.

The paper deals with considering the possibility of harmonic wave propagation in the system of two synchronically moving ideal elastic rods periodically supported by rigid transverse barriers. The volumes bounded by the rods and adjacent barriers are filled with a non-dissipative acoustic medium. With use of the Floquet method, the corresponding dispersion equation has been obtained and its roots have been analyzed. For some particular cases, wave propagation bands are specified. For all audible frequency range, it is shown that phase velocity of the obtained wave does not disperse and corresponds to the effective propagation velocity of the longitudinal wave in heterogeneous medium.

## ВСТУП

Хвильові властивості періодичних структур, складених з однорідних елементів, давно стали одним з традиційних модельних об'єктів у фізиці [1]. Значною мірою це пояснюється генетичною спорідненістю дискретних періодичних систем з упорядкованою атомарною або молекулярною будовою кристалічних ґраток [2]. Саме на базі такого підходу вдалося пояснити ряд фундаментальних фізичних ефектів для таких матеріалів. Багато-ступеневі електричні контури аналогічної будови широко використовуються в радіотехніці й акустиці як частотні фільтри та лінії затримки [3, 4].

Повний перелік сучасних наукових напрямків, дотичних до застосування періодичних структур, далеко виходить за межі цієї статті. Щоб проілюструвати їхню інтенсивність і різноплановість, наведемо лише деякі з публікацій у провідних наукових журналах за останнє десятиліття [5–13]. У цьому контексті зауважимо, що найбільша увага приділяється вивченню властивостей електрома-

гнітних хвилеводів та дифракції хвиль на кристалічних ґратках (зокрема, ролі локальних дефектів у модифікації частотних і просторових діапазонів пропускання).

Не оминули увагою періодичні структури й акустики та механіки, які працюють на базі континуальних підходів. Насамперед, це стосується дослідження властивостей композитних матеріалів [14, 15], поширення хвиль у шаруватих середовищах [16], дифракції акустичних [18] і гравітаційних [17] хвиль на дискретних бар'єрах, структурної акустики [19–25], тощо.

Така потреба виникла, оскільки існуючі моделі гетерогенних середовищ з газорідним заповненням виявились неспроможними пояснити ряд експериментальних результатів, одержаних при вимірюванні швидкості звуку в препарованих легенях. Так, при імпульсному навантаженні стінки легені можуть виникати специфічні хвилі [26–28], які не є поперечними і не можуть бути ототоженні з поздовжніми хвилями першого або другого роду в рамках моделі Біо [29]. Нагадаємо, що хвиля пер-

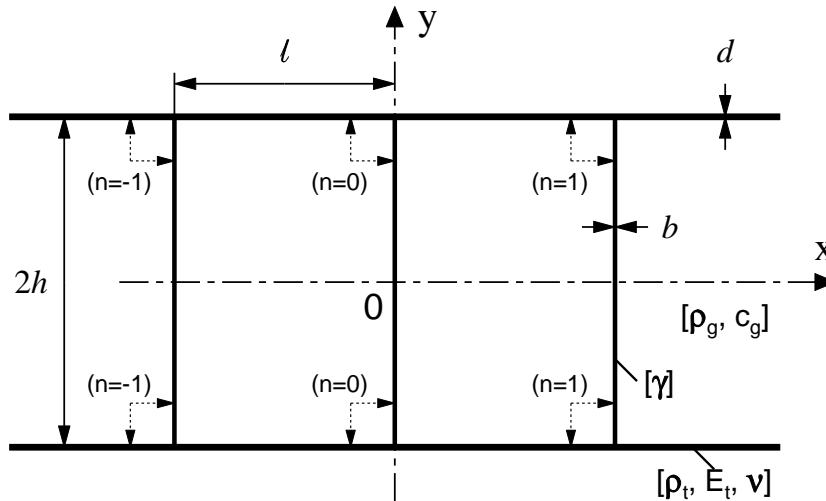


Рис. 1. Геометрія періодичної акустопружної структури

шого роду є об'ємною хвилею в однорідному середовищі з осередненими макропараметрами, а хвилею другого роду пов'язують з інтенсивними рухами порової рідини відносно пружного скелета пористого середовища [30].

Очевидно, пояснення тут слід шукати у різному характері деформування паренхіми на рівні її мікроструктури при різних типах навантаження. Виходячи зі сказаного, продуктивною видається ідея оцінювання ефективних акустичних параметрів легеневої паренхіми за допомогою акустомеханічних періодичних структур. “Піноподібна” будова легеневої тканини (її основу складають ацинуси – компактні сукупності респіраторних пухирців-альвеол) [31] визначає можливість вибору моделі у вигляді лінійної ланцюгової системи, складеної з тонкостінних пружних елементів, якими обмежені заповнені газом об'єми. Нас цікавитиме низькочастотна асимптотика хвильових властивостей об'єкта, коли довжина результуючої хвилі значно перевищує масштаб його структури. Тому регуляризація геометрії моделі не повинна суттєво вплинути на значення ефективних акустичних параметрів. Оскільки ж ми припускаємо, що поширення досліджуваних хвиль не супроводжується значним витокком альвеолярного газу в бронхіальне дерево, доцільно розглянути періодичну структуру з замкненими газонаповненими комірками. Спрощення постановки до квазіодновимірної системи дозволить при збереженні основних фізичних рис об'єкта максимально унаочнити процес одержання й інтерпретації результатів.

Основну мету цієї статті сформулюємо як від-

працювання й апробацію методики розв'язання задачі для найпростішої комбінації фізичних, геометричних і кінематичних властивостей нескінченної періодичної акустопружної системи, за допомогою якої моделюється поширення хвиль у легеневій паренхімі.

## 1. ПОСТАНОВКА І РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

На рис. 1 зображено систему, яка складається з двох паралельних пружних стержнів товщиною  $d$ , періодично (з кроком  $l$ ) підкріплених перпендикулярними до них жорсткими масивними тонкостінними перегородками довжиною  $2h$ . Вважаємо, що матеріал стержнів має густину  $\rho_t$ , модуль Юнга  $E_t$  і коефіцієнт Пуассона  $\nu$ , а перегородка – погонну (на одиницю площі) масу  $\gamma$ . Обмежені перегородками порожнини заповнені акустичним середовищем (рідиною або газом) з густиною  $\rho_g$  і швидкістю звуку  $c$ . Механічними й акустичними втратами будемо нехтувати.

Розглянемо випадок синхронного руху верхнього та нижнього стержнів, коли поля зміщень і напружень у них однаковим чином залежать від координати  $x$ . Очевидно, що при цьому перегородки рухаються поступально, а розподіли акустичних полів є функціями лише поздовжньої координати. Задамо гармонічний закон зміни усіх полів з часом –  $e^{-i\omega t}$ .

Зроблені зауваження дозволяють перейти до формалізованої математичної постановки задачі. У рамках прийнятої моделі обидва стержні представимо як послідовності з'єднаних ланок довжи-

ною  $l$ , кожній з яких (і обмеженій порожнині, заповненій газом) поставимо у відповідність номер  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (див. рис. 1). Відтак, поле зміщень  $n$ -ої ланки стержня позначимо через  $u_n$ , а потенціал швидкості в  $n$ -ій порожнині – через  $\phi_n$  (вважаємо, що потенціал швидкостей пов'язаний з акустичним тиском  $p_n$  і коливальною швидкістю  $v_n$  наступним чином):

$$p_n = \frac{d\phi}{dt} = -i\omega\phi, \quad v_n = -\frac{d\phi}{dx}.$$

У своїх областях існування поля  $u_n$  і  $\phi_n$  задовольняють рівняння

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} + k_t^2 u_n = 0, \quad k_t = \frac{\omega}{c_t},$$

$$c_t = \sqrt{\frac{E_t^*}{\rho_t}}, \quad E_t^* = \frac{E_t}{1-\nu}, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \phi_n + k_g^2 \phi = 0, \quad k_g = \frac{\omega}{c_g}. \quad (2)$$

Оператор Лапласа  $\nabla^2$  у нашому випадку спрощується до  $d^2/dx^2$ .

Граничні умови зводяться до спряження кінематичних і динамічних величин у вузлах – точках кріплення перегородок. Так, вимагається неперервність зміщень (швидкостей) межуючих кінців ланок і акустичного середовища на перегородці:

$$u_n|_{x=nl} = u_{n+1}|_{x=nl},$$

$$-\frac{d\phi_n}{dx}\Big|_{x=nl} = -\frac{d\phi_{n+1}}{dx}\Big|_{x=nl}, \quad (3)$$

$$-\frac{d\phi_n}{dx}\Big|_{x=nl} = -i\omega u_n|_{x=nl}.$$

Умова динамічної рівноваги для перегородки записується як

$$-2d(\sigma_n - \sigma_{n+1})|_{x=nl} + 2h(p_n - p_{n+1})|_{x=nl} + \omega^2 2\gamma h u_n|_{x=nl} = 0, \quad (4)$$

де  $\sigma_n = E_t^* du_n/dx$ . У рівнянні (4) знак мінус при  $\sigma_n - \sigma_{n+1}$  обумовлений тим, що пружна сила, з якою  $n$ -та ланка діє на вузол, протилежна до зусилля, створеного напруженнями у стержні. Окрім того, тут бралось до уваги, що позитивне значення тиску в рідкому (газовому) середовищі відповідає його стисненню.

Дослідимо властивості хвиль, які можуть поширюватись у розглянутій періодичній структурі.

Для цього застосуємо загальноприйнятну методику, відому як теорема Флоке [16, 19, 20, 25]. При цьому загальний розв'язок записують у вигляді гармонічної хвилі  $\sim e^{i(\kappa x - \omega t)}$  з невідомою константою поширення  $\kappa$  і амплітудою, яка взагалі може бути модульованою за координатою, поперечною до напрямку поширення. Нагадаємо, що в межах введених спрощень жоден з амплітудних множників не залежить від  $y$ , тож у нашому випадку шукана хвиля буде плоскою в точному значенні цього слова.

Константа поширення  $\kappa$  і відповідна фазова швидкість  $c = \omega/\kappa$  визначаються як розв'язки дисперсійного рівняння системи. Для того, щоб вивести його, граничні умови слід доповнити умовами періодичності для фізичних полів, які впливають з нав'язаної гармонічної залежності відносно  $x$ . Беручи до уваги очевидний зв'язок між  $\sigma_n$ ,  $v_n$  і першими похідними відповідних величин, маємо

$$u_n|_{x=(n-1)l} e^{i\kappa l} = u_{n+1}|_{x=nl},$$

$$\phi_n|_{x=(n-1)l} e^{i\kappa l} = \phi_{n+1}|_{x=nl},$$

$$-\frac{du_n}{dx}\Big|_{x=(n-1)l} e^{i\kappa l} = -\frac{du_{n+1}}{dx}\Big|_{x=nl}, \quad (5)$$

$$-\frac{d\phi_n}{dx}\Big|_{x=(n-1)l} e^{i\kappa l} = -\frac{d\phi_{n+1}}{dx}\Big|_{x=nl}.$$

Запишемо загальні розв'язки для  $u_n$  та  $\phi_n$ , які задовольняють рівняння руху (1), (2):

$$u_n = U_{1n} e^{ik_t x} + U_{2n} e^{-ik_t x}, \quad (6)$$

$$\phi_n = \Phi_{1n} e^{ik_g x} + \Phi_{2n} e^{-ik_g x}.$$

Використавши умови періодичності, отримуємо

$$U_{1n} = e^{i\kappa x} e^{-ik_t x}, \quad U_{2n} = e^{i\kappa x} e^{ik_t x}, \quad (7)$$

$$\Phi_{1n} = e^{i\kappa x} e^{-ik_g x}, \quad \Phi_{2n} = e^{i\kappa x} e^{ik_g x}.$$

Строго кажучи, вже на цьому етапі підстановка виразів (6), (7) у граничні умови (3), (4) дозволяє одержати систему з чотирьох однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь відносно чотирьох невідомих коефіцієнтів, умова існування нетривіального розв'язку якої й породжує дисперсійне рівняння для визначення  $\kappa$ . Проте для того, щоб знизити порядок визначника, який стоїть у лівій частині цього рівняння, доцільно виразити акустичний потенціал  $\phi_n$  через зміщення перегородок  $x = (n-1)l$

і  $x = nl$ :

$$\begin{aligned} \frac{i \sin k_g l}{c_g} \phi_n &= [u_n|_{x=nl} \cos k_g(x - (n-1)l) - \\ &\quad - u_n|_{x=(n-1)l} \cos k_g(x - nl)] = \\ &= U_{1n} [\cos k_g(x - (n-1)l) - \\ &\quad - e^{-ik_t l} \cos k_g(x - nl)] + \\ &\quad + U_{2n} [\cos k_g(x - (n-1)l) - \\ &\quad - e^{ik_t l} \cos k_g(x - nl)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Змістовність цієї процедури стає більш наочною, якщо ускладнити постановку, допустивши можливість повороту або прогину вставки. У цих випадках акустичне поле  $\phi_n$  вже суттєво залежить від  $y$  і представляється як ряд за відповідними власними формами. Тоді тільки встановлення явної залежності  $\phi_n = \mathcal{F}(U_{1n}, U_{2n})$  забезпечує можливість запису дисперсійного рівняння в замкнутому вигляді.

Опустивши очевидні перетворення, одержуємо дисперсійне рівняння для розглянутої системи:

$$e^{2i\kappa l} - 2q e^{i\kappa l} + 1, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\sin k_g l + \varepsilon_{gt} \sin k_t l} \times \\ &\quad \times \left[ \sin k_g l \cos k_t l + \varepsilon_{gt} \sin k_t l \cos k_g l - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu_\gamma}{2} k_t l \sin k_g l \sin k_t l \right]; \\ \varepsilon_{gt} &= \frac{\rho_g c_g h}{\rho_t c_t d}; \quad \mu_\gamma = \frac{\gamma h}{\rho_t d l}. \end{aligned}$$

Параметр  $\varepsilon_{gt}$  характеризує ступінь узгодженості хвильових опорів перерізів стержня й області існування акустичного поля у напрямку поширення, а величина  $\mu_\gamma$  слугує мірою масивності вставки.

## 2. АНАЛІЗ КОРЕНІВ ДИСПЕРСІЙНОГО РІВНЯННЯ

Легко помітити, що коефіцієнт при  $e^{i\kappa l}$  у співвідношенні (9) симетричний відносно фізичних характеристик стержня й акустичного середовища. Дійсно, розглянута постановка по суті еквівалентна задачі про коливання системи двох зв'язаних стержнів, у якій обидві компоненти рівноправні.

Розв'язки одержаного дисперсійного рівняння задовольняють умову

$$\cos \kappa l = q.$$

Формально можна записати

$$q = \begin{cases} \cos \alpha, & |q| \leq 1, \\ \text{ch } \alpha, & |q| > 1. \end{cases}$$

При  $|q| \leq 1$  повний набір розв'язків рівняння (9) має вигляд

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\omega}{c} = \pm \frac{1}{l} \arccos q + \frac{\pi m}{l}, \\ m &= 0, \pm 1, \pm 2 \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Величиною  $\kappa$  при  $m=0$  визначається найбільше значення фазової швидкості  $c$ , яке ми й будемо трактувати як швидкість результуючої хвилі (її поширенню вправо відповідає знак плюс). Періодичними розв'язками для  $m \neq 0$  визначаються хвильові компоненти, які зазнали на шляху поширення  $m$  відбиттів і в подальшому нас не цікавлять.

При  $|q| > 1$  константа поширення  $\kappa$  стає уявною, а шукана хвиля вироджується в неоднорідну. Тому насамперед слід визначити області існування хвиль, які можуть поширюватись у даній періодичній структурі без згасання. Велика кількість параметрів, які входять у рівняння (9), утруднює його повний аналіз. Для початку знехтуємо інерційними властивостями перегородок ( $\mu_\gamma \rightarrow 0$ ). У важливому частковому випадку  $\varepsilon_{gt} = 1$ , користуючись відомими тотожностями для тригонометричних величин, одержуємо

$$q = \frac{\cos \frac{(k_g + k_t)l}{2}}{\cos \frac{(k_g - k_t)l}{2}},$$

звідки умова існування гармонічної біжучої хвилі приймає вигляд

$$-\sin k_g l \sin k_t l \leq 0.$$

У припущенні  $c_g \leq c_t$  це співвідношення визначає довгохвильову смугу пропускання  $k_t l \leq \pi$ . Характер розподілів  $q$  для інших значень  $\varepsilon_{gt} \neq 1$  (рис. 2) дозволяє стверджувати, що при нехтуванні масою перегородки еквівалентна фазова швидкість  $c$  залишається дійсною у вказаному діапазоні, незалежно від ступеня узгодження хвильових імпедансів.

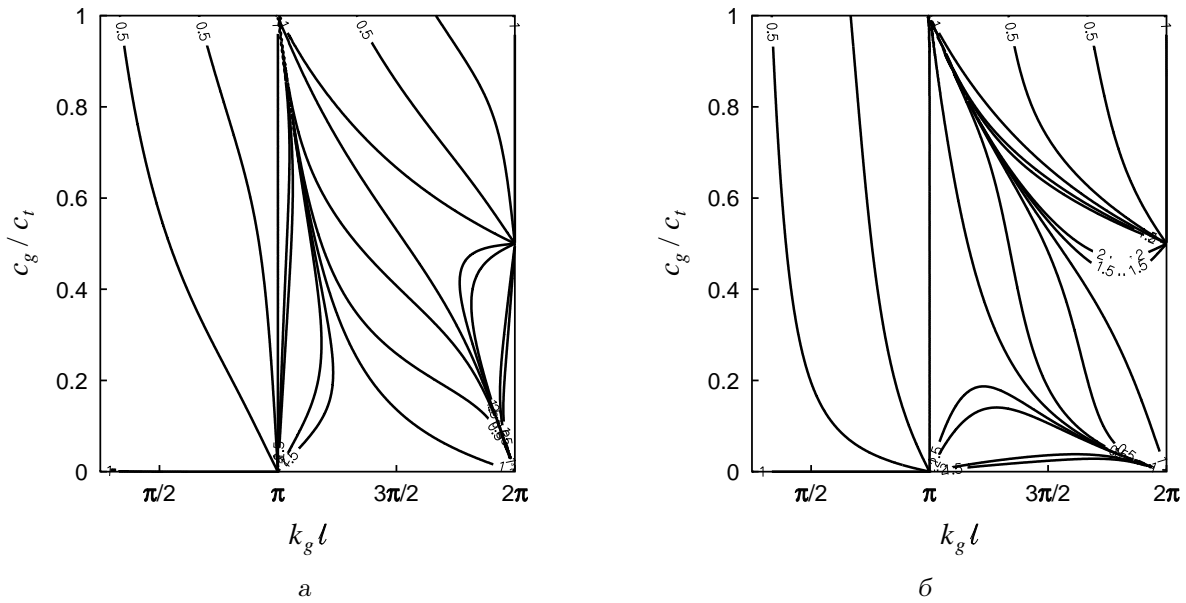


Рис. 2. Величина  $|q|$  при  $\mu_g=0$ :  
 а -  $\varepsilon_{gt}=0.33$ ; б -  $\varepsilon_{gt}=3$

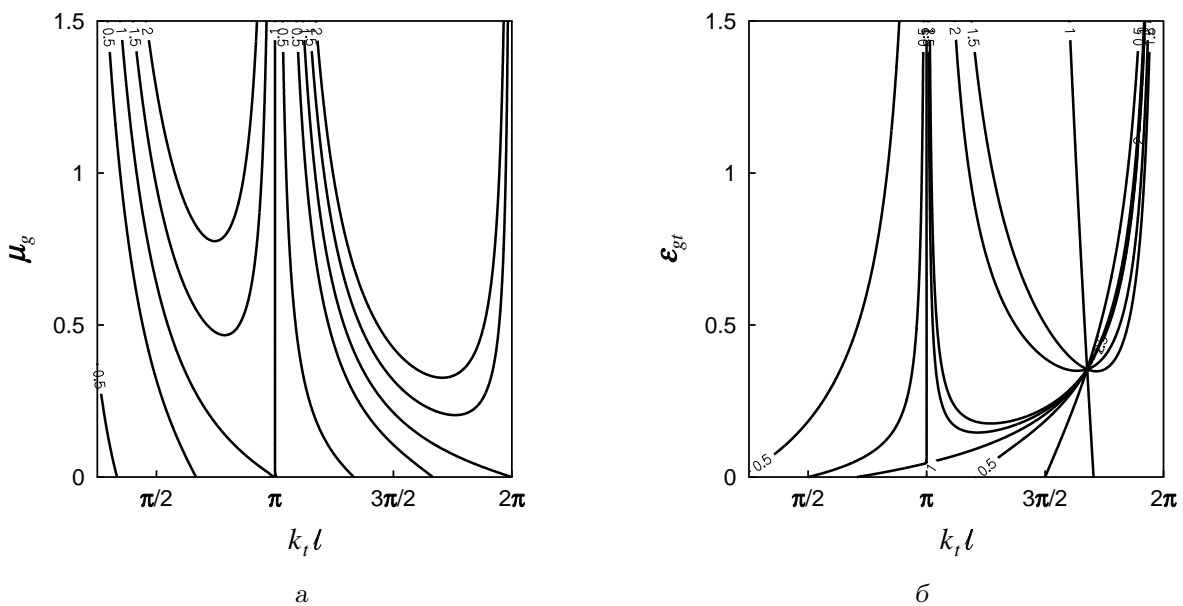


Рис. 3. Величина  $|q|$  при  $\mu_g \neq 0$ :  
 а -  $c_g = c_t$  б -  $c_t/c_g \approx 0.058, \mu_\gamma = 1$

Слід зауважити, що поетапне розв’язання задачі (спочатку з невагомими перегородками, а потім для еквівалентного стержня з періодично розташованими зосередженими масами) не забезпечує одержання дисперсійного співвідношення (9). Справа у тому, що виведене на першому етапі рівняння визначає еквівалентну швидкість хвилі, то-

ді як для коректної постановки задачі на другому етапі потрібні обидві “проміжні” динамічні величини – і пружність, і густина, а не тільки їх відношення.

Виходячи з попереднього аналізу, доцільно окремо розглянути ситуацію  $c_g = c_t$ . Тоді для проміжної постановки при  $\gamma=0$  незалежно від вели-

чини  $\varepsilon_{gt}$  справедливо  $\varkappa = k_t l$  – компоненти системи рухаються як єдине ціле. Рис. 3, а ілюструє поведінку  $q$  для цього випадку при різних значеннях  $\gamma$ . З графіка видно, що для відносно масивних перегородок ( $\mu_\gamma \gg 1$ ) шукана хвиля може ставати неоднорідною навіть на досить низьких частотах. Якщо ж  $\mu_\gamma \approx 1$ , то діапазон пропускання залишається досить широким – принаймні до  $k_t l \approx \pi/2$ .

Виберемо геометричні й фізичні параметри, наближені до характеристик матеріальних компонент паренхіми [31, 33]:  $l = 2h = 3 \cdot 10^{-4}$  м,  $b = 2d = 5 \cdot 10^{-6}$  м,  $\rho_g = 1.29$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_g = 330$  м/с,  $\rho_t = 1.1 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $E_t = 2 \cdot 10^5$  Па,  $\nu = 0.4999999$  ( $c_t \approx 19.1$  м/с)  $\gamma = b\rho_t$ . Тоді обидва безрозмірних параметри, які входять до виразу для  $q$ , близькі до одиниці –  $\varepsilon_{gt} \approx 0.813$ ,  $\mu_\gamma = 1$ . Цікаво, що при цьому  $c_t/c_g \approx 0.058 \ll 1$ . Відповідна залежність величини  $q$  від  $\varepsilon_{gt}$  (див. рис. 3б) показує, що у цьому випадку константа поширення приймає дійсні значення при  $k_t l \leq \pi$ , коли просторовий період  $l$  менший за половину довжини хвилі в стержні.

Для відносно коротких хвиль, довжина яких співрозмірна з періодом структури, система стає чутливою до навіть незначних нерегулярностей, які завжди наявні в реальності. Унаслідок цього може проявлятися відоме явище локалізації хвиль на дефекті – непроходження через неоднорідність (див., наприклад [10, 24]). Окрім того, зі збільшенням частоти зростає роль внутрішніх втрат, які у нашій моделі не враховувались. Тому в подальшому зосередимось саме на дослідженні низькочастотних (довгохвильових) властивостей моделі.

Для  $k_g, k_t \ll 1$ , замінивши тригонометричні функції їхніми наближеними значеннями при малих аргументах  $\sin z \approx z$  і  $\cos z \approx 1 - z^2/2$ , одержуємо

$$c^2 \approx \frac{E_t^* d + B_g h}{\rho_g h + \rho_t d + \gamma h/l}. \quad (11)$$

Тут  $B_g = \rho_g c_g^2$  – гідростатична пружність газу. Як і слід було очікувати, при  $\omega \rightarrow 0$  система поводить себе аналогічно до стержня з еквівалентними статичними пружністю й густиною, які визначаються своїми значеннями, осередненими по об'ємних частках відповідних компонент. Це значення  $c$  відповідає традиційній хвилі об'ємної деформації в середовищі з осередненими механічними характеристиками [32] і повністю узгоджується з уявленнями про значення ефективної швидкості об'ємних хвиль у шаруватій структурі [16]. Одержаний результат також не суперечить даним для суспензії бульбашок зі стінками, підкріпленими пружною

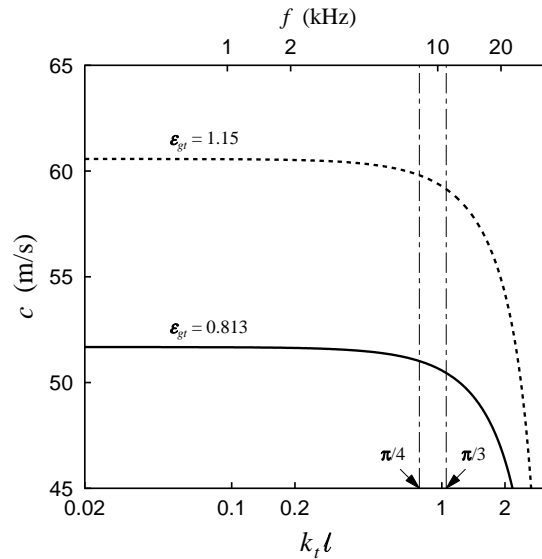


Рис. 4. Частотна залежність  $c$  при  $c_t/c_g \approx 0.058$ ,  $\mu_\gamma = 1$

оболонкою [33], якщо врахувати поправку на різницю в геометрії обох систем і те, що дисперговані в суспензії бульбашки не зв'язані між собою.

Таким чином, фазову швидкість (11) можна ототожнити з так званою райсівською швидкістю звуку в паренхімі [34–37].

Для того, щоб оцінити межі застосування низькочастотної асимптотики (11), звернімося до рис. 4, на якому зображені частотні залежності величини  $c$  для  $\varepsilon_{gt} = 0.813$  і  $1.15$ . Із графіка видно, що зміна величини фазової швидкості не перевищує 1% аж до  $k_t l \approx \pi/4$  (1/8 довжини хвилі в стержні). При вибраних геометричних і фізичних параметрах періодичної структури верхня межа цього діапазону відповідає частоті порядку 7.8 кГц. Цей висновок узгоджується з експериментальними даними [34–37], згідно з якими зафіксована швидкість звуку в паренхімі не диспергує практично в усьому звуковому діапазоні частот. Принагідно зауважимо, що принципово інший механізм дисперсії й дисипації звуку в легенях – термодинамічний – був розглянутий у роботі [38].

## ВИСНОВКИ

Розглянуто можливість поширення гармонічних хвиль в акустопружній періодичній структурі, утвореній двома паралельними пружними стержнями, періодично підкріпленими жорсткими поперечними перегородками, які рухаються синхронно. Об'єми, обмежені стержнями й сусідніми перегородками, вважалися заповненими аку-

стичним середовищем. Із застосуванням методу Флоке одержано дисперсійне рівняння системи і проаналізовані його корені. Для ряду часткових випадків вказані діапазони існування хвилі, що поширюється. Встановлено, що при геометричних і фізичних параметрах, які відповідають будові легеневої паренхіми, для всього звукового частотного діапазону фазова швидкість знайденої хвилі не диспергує й відповідає ефективній швидкості поширення поздовжньої хвилі у гетерогенному середовищі. Розроблена методика може бути поширена на більш складні випадки, коли стержні рухаються зі зсувом фаз або допускається прогин перегородок.

1. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах.– М.: ИИЛ, 1959.– 458 с.
2. Борн М., Кунь Х. Теория кристаллических решеток.– М.: ИИЛ, 1959.– 488 с.
3. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний.– М.: Наука, 1964.– 437 с.
4. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука.– М.: Изд-во МГУ, 1960.– 335 с.
5. Konotop V. V. On wave propagation in periodic structures with smoothly varying parameters // J. Opt. Soc. Amer. B.– 1997.– **14**, N 2.– P. 364–369.
6. Amari S., Vahldieck R., Bornemann J. Accurate analysis of periodic structures with an additional symmetry in the unit cell from classical matrix eigenvalues // IEEE Trans. Microwave Theory Techs.– 1998.– **46**, N 10.– P. 1513–1515.
7. Chigrin D. N., Lavrinenko A. V., Yarotsky D. A., Gaponenko S. V. All-dielectric one-dimensional periodic structures for total omnidirectional reflection and partial spontaneous emission control // J. Lightwave Technol.– 1999.– **17**, N 11.– P. 2018–2024.
8. Ruzzene M., Scarpa F., Soranna F. Wave beaming effects in two-dimensional cellular structures // Smart Mater. Struct.– 2003.– **12**, N 3.– P. 363–372.
9. Martinsson P. G., Movchan A. B. Vibrations of lattice structures and phononic band gaps // Quart. J. Mech. Appl. Math.– 2003.– **56**.– P. 45–64.
10. Khelif A., Wilm M., Laude V., Ballandras S. Guided elastic waves along a rod defect of a two-dimensional phononic crystal // Phys. Rev. E.– 2004.– **69**.– P. 067601(1–4).
11. Игнатченко В. А., Лалетин О. Н. Волны в сверхрешетке с произвольной толщиной границы между слоями // Теор. мат. физ.– 2004.– **46**, вып. 12.– С. 2216–2223.
12. Poirier L., Thompson R. I., Hache A. Impossibility of negative group velocities in a periodic layer structure with or without loss // Opt. Comm.– 2005.– **250**.– P. 258–265.
13. Силян Р. А. Электромагнитные волны в искусственных периодических структурах // Успехи физ. наук.– 2006.– **175**.– С. 562–565.
14. Kafesaki M., Sigalas M. M., Economou E. N. Elastic wave band gaps in 3-D periodic polymer matrix composites // Solid State Comm.– 1995.– **96**, N 5.– P. 285–289.
15. Vasseur J. O., Deymier P. A. Propagation of acoustic waves in periodic and random two-dimensional composite media // J. Mater. Resch.– 1997.– **12**, N 8.– P. 2207–2212.
16. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.– М.: Наука, 1973.– 344 с.
17. Iver P. M. Water-wave propagation through an infinite array of cylindrical structures // J. Fluid Mech.– 2000.– **424**.– P. 101–125.
18. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках.– Киев: Наукова думка, 1986.– 240 с.
19. Heckl M. A. Investigations on the vibrations of grilles and other simple beam structures // J. Acoust. Soc. Amer.– 1964.– **36**, N 7.– P. 1335–1343.
20. Бобровницкий Ю. И. Колебания бесконечной стержневой решетки // Акуст. ж.– 1968.– **14**, N 4.– С. 526–531.
21. Mead D. J. Free wave propagation in periodically supported, infinite beams // J. Sound Vib.– 1970.– **11**, N 2.– P. 181–197.
22. Gupta G. S. Propagation of flexural waves in doubly-periodic structures // J. Sound Vib.– 1972.– **20**, N 1.– P. 39–49.
23. Rumerman M. L. Vibration and wave propagation in ribbed plates // J. Acoust. Soc. Amer.– 1975.– **57**, N 2.– P. 370–373.
24. Benaroya H. Waves in periodic structures with imperfections // Finite Elements in Analysis and Design.– 1996.– **23**.– P. 291–302.
25. Куценко А. Г. Поширення хвиль згину вздовж періодичних ланцюгових систем платівок // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук.– 1999.– N 4.– С. 38–43.
26. Butler J. P., Lehr J. L., Drazen J. M. Longitudinal elastic wave propagation in pulmonary parenchyma // J. Appl. Physiol.– 1987.– **62**, N 4.– P. 1349–1355.
27. Jahed M., Lai-Fook S. J., Bhagat P. K., Kraman S. S. Propagation of stress waves in inflated sheep lungs // J. Appl. Physiol.– 1989.– **66**, N 6.– P. 2675–2680.
28. Jahed M., Lai-Fook S. J. Stress wave velocity measured in intact pig lungs with cross-spectral analysis // J. Appl. Physiol.– 1994.– **76**, N 2.– P. 565–571.
29. Олійник В. Н. Особливості поширення хвиль у легеневої тканині // Акуст. вісн.– 2007.– **10**, N 2.– P. 64–78.
30. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid // J. Acoust. Soc. Amer.– 1956.– **28** N 2.– С. 168–191.

31. Вейбель Э. Р. Морфометрия легких человека.– М.: Медицина, 1970.– 175 с. N 6.– P. 1862–1867.
32. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред.– М.: Наука, 1978.– 336 с.
33. Олійник В. Н. Вплив властивостей стінок альвеол на величину швидкості звуку в легеневій паренхімі // Акуст. вісн.– 2003.– 6, N 4.– P. 46–53.
34. Rice D. A. Sound speed in pulmonary parenchyma // J. Appl. Physiol.– 1983.– 54, N 1.– P. 304–308.
35. Kraman S. S. Speed of low-frequency sound through lungs of normal men // J. Appl. Physiol.– 1983.– 55, N 2.– P. 701–705.
36. Yen R. T., Fung Y. C., Ho H. H., Butterman G. Speed of stress wave propagation in lung // J. Appl. Physiol.– 1986.– 61, N 2.– P. 701–705.
37. Paciej R., Vyshedskiy A., Shane J., Murphy R. Transpulmonary speed of sound input into the supraclavicular space // J. Appl. Physiol.– 2003.– 94, N 2.– P. 604–611.
38. Олійник В. Н. О механизмах формирования акустических свойств легочной паренхимы // Акуст. вісн.– 2001.– 4, N 3.– С. 53–66.