

УДК 534.87:654.928

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АНАЛИЗА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИЕМА СИГНАЛОВ В АКУСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ С МНОГОХОДОВЫМ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ И РАССЕЙЯНИЕМ ЗВУКА

А. Я. КАЛЮЖНЫЙ

*Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев**Получено 19.09.2007*

Предложен универсальный метод оценки эффективности обнаружения сигналов в средах со сложными условиями распространения, для которых точное решение задачи анализа сопряжено с непреодолимыми математическими трудностями. В частности, он позволяет учесть возможность негауссовских флуктуаций поля сигнала вследствие рассеяния на статистических неоднородностях среды. Метод основан на использовании асимптотического распределения неотрицательных случайных величин в области экстремальных значений аргумента. Показано, что для широкого класса алгоритмов приема исходные данные могут быть сведены к двум основным параметрам: отношению сигнал/помеха и индексу “мерцаний” сигнала на выходе обработки. Погрешность метода исследована на традиционных моделях рэлеевского и райсовского каналов. Показана возможность контроля точности вычислений с использованием параметров системы обработки. Практическое применение метода проиллюстрировано на примере задачи анализа эффективности обнаружения сигналов в многолучевом акустическом канале с рассеянием звука на статистических неровностях поверхности. Предложена методика оценки качества приема по критерию порогового отношения сигнал/помеха на излучателе. Показаны ее преимущества перед традиционным критерием порогового отношения сигнал/помеха на выходе обработки.

Запропоновано універсальний метод оцінки ефективності виявлення сигналів у середовищах зі складними умовами поширення, для яких точне розв'язання задачі аналізу пов'язане з непереборними математичними труднощами. Зокрема, він дозволяє врахувати можливість негаусівських флуктуацій поля сигналу внаслідок розсіювання на статистичних неоднорідностях середовища. Метод базується на використанні асимптотичного розподілу ненегативних випадкових величин в області екстремальних значень аргументу. Показано, що для широкого класу алгоритмів прийому вихідні дані можна звести до двох основних параметрів: відношення сигнал/перешкода та індексу “мерехтін” сигналу на виході обробки. Досліджено похибку методу на традиційних моделях релєївського та райсівського каналів. Показана можливість контролю точності обчислень з використанням параметрів системи обробки. Практичне застосування методу проілюстровано на прикладі задачі аналізу ефективності виявлення сигналів у багатопроменевому акустичному каналі з розсіюванням звуку на статистичних нерівностях поверхні. Запропоновано методику оцінки якості прийому за критерієм граничного відношення сигнал/перешкода на випромінювачі. Показані його переваги перед традиційним критерієм граничного відношення сигнал/перешкода на виході обробки.

A universal method is proposed for evaluation of signal detection efficiency in media with complex propagation conditions for which the exact solving of the analysis problem is mathematically impossible. In particular, it allows the studying of the non-gaussian signal fluctuations due to scattering on the statistical inhomogeneities of the medium. The method is based on the asymptotic distribution of the non-negative random parameters for the extremal argument values. It is shown that for a wide class of processing algorithms the initial data may be reduced to two parameters: signal-to-noise ratio and scintillation index of the signal at processing output. The inaccuracy of the method is investigated for the traditional Rayleigh and Rician channels. The possibility of calculation accuracy control with use of the processing system parameters is shown. Practical application of the method is illustrated for the problem of detection efficiency analysis in the multipath acoustic channel with sound scattering on the statistical surface roughness. The technique for estimating of detection quality by a criteria of the threshold signal-to-noise ratio at signal source is proposed. Its advantages in comparison with a traditional criterion of a threshold signal-to-noise ratio at processing output are shown.

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшим этапом в разработке любой системы приема акустических сигналов является анализ ее эффективности, т. е. способности решать основную задачу в заданном комплексе условий акустической среды и собственных параметров. В свою очередь, критерии эффективности приемной системы определяются ее назначением. В данной работе мы ограничимся задачей обнаружения сигналов, играющей важную роль в средствах акустической локации и пеленгования, медицинской и технической диагностики. Кроме того, несмотря на

кажущуюся простоту задачи обнаружения, ее решение зачастую связано с выполнением довольно сложной и многоэтапной обработки, ядро которой может быть полезным и для решения других задач: оценивания параметров, классификации сигналов и т. п. [1]. Наконец, факторы, способствующие более эффективному обнаружению сигнала, благоприятствуют повышению эффективности приема в целом.

На общем уровне задача обнаружения акустических сигналов может быть сформулирована следующим образом. Задана некоторая среда распространения (например, область водного или во-

здушного пространства), в которой расположены источники информационного сигнала, источники помех и приемная система, которой достигают звуковые колебания, возбуждаемые в среде указанными источниками. Приемная система содержит датчики акустических колебаний, которые преобразуют акустическое поле $u(t, \mathbf{r})$ на некоторой пространственной $\mathbf{r} \in \mathbf{D}_A$ и временной $t \in \mathbf{T}$ апертурах в физический вид, пригодный для последующей обработки (например, в электрические сигналы или цифровые данные). Эту систему датчиков принято называть акустической антенной. В общем случае поле $u(t, \mathbf{r})$ может быть многокомпонентным (например, при одновременной регистрации звукового давления и скорости частиц среды). В данной работе рассмотрение ограничено скалярными акустическими полями.

Значения поля $u(t, \mathbf{r})$ на апертуре $\{\mathbf{r} \in \mathbf{D}_A, t \in \mathbf{T}\}$ образуют текущий массив наблюдений \mathbf{u} , который будем рассматривать как вектор в некотором функциональном пространстве. Следует также принять во внимание то, что датчики и другие входные устройства обладают собственными шумами, которые добавляются к общему сигналу на их выходах. Таким образом, в состав акустического поля $u(t, \mathbf{r})$, регистрируемого приемной системой, в общем случае входят внешние акустические помехи $z(t, \mathbf{r})$, собственные шумы приемной системы $w(t, \mathbf{r})$ и, возможно, полезный сигнал $s(t, \mathbf{r})$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{z} + \mathbf{w} + \theta \cdot \mathbf{s}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{z} , \mathbf{w} , \mathbf{s} – векторы, соответствующие полям внешних помех, собственных шумов приемной системы и полезного сигнала; θ – формальный параметр ситуации, который принимает значение $\theta = 0$ при отсутствии сигнала и $\theta = 1$ при его наличии. Определение фактической величины θ при заданных наблюдениях \mathbf{u} и составляет суть задачи обнаружения сигналов, решение которой в общем случае сводится к проверке выполнения неравенства [1]

$$F(\mathbf{u}) \underset{\hat{\theta}=0}{\overset{\hat{\theta}=1}{>}} \Pi, \quad (2)$$

где $F(\mathbf{u})$ – некоторый функционал обработки (тестовая статистика) над вектором наблюдений \mathbf{u} ; $\hat{\theta}$ – решение о значении параметра ситуации θ ; Π – порог обнаружения. Различные алгоритмы обнаружения сигналов отличаются между собой выбором функционала $F(\mathbf{u})$ и константы Π , причем, обе они допускают возможность оптимизации. В качестве меры эффективности при этом обычно

используется так называемый критерий Неймана – Пирсона, оперирующий вероятностями выполнения неравенства (2) в ситуациях $\theta = 0$ и $\theta = 1$. Первую из них

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= P(F(\mathbf{u}) \geq \Pi / \theta = 0) = \\ &= \int_{\Pi}^{\infty} p_F(y / \theta = 0) dy, \end{aligned} \quad (3)$$

соответствующую ситуации отсутствия сигнала, называют уровнем ложных тревог обнаружителя, а вторую –

$$\begin{aligned} P_{\text{ПО}} &= P(F(\mathbf{u}) \geq \Pi / \theta = 1) = \\ &= \int_{\Pi}^{\infty} p_F(y / \theta = 1) dy \end{aligned} \quad (4)$$

вероятностью правильного обнаружения сигнала. Здесь $p_F(y / \theta)$ – плотность вероятности функционала обработки $F(\mathbf{u})$ в ситуации θ . В соответствии с критерием Неймана – Пирсона соотношение (3) рассматривается как уравнение относительно пороговой константы Π при заданном значении вероятности α_0 . Таким образом, для сравнения любых алгоритмов обнаружения по данному критерию, их, прежде всего, необходимо выровнять по величине вероятности (3). Тогда более эффективным считается тот из алгоритмов, который обеспечивает большую величину вероятности (4).

Вычисление вероятностей (3), (4) является довольно сложной математической задачей, точные решения которой известны лишь для весьма ограниченного набора традиционных моделей среды, видов сигналов, характеристик помех и функционалов обработки $F(\mathbf{u})$. В частности, в этот перечень не входят такие важные для задач приема акустических сигналов модели [2], как среды с многоходовым распространением сигнала и рассеянием звука на статистических неоднородностях, в которых поле сигнала имеет сложную структуру и является случайным. Поэтому для его описания необходимо задать набор распределений вероятности, характеристических и моментных функций и пр. Вообще говоря, указанные статистические характеристики могут быть найдены в результате решения соответствующих уравнений [3] или экспериментально. Однако на обоих путях зачастую встречаются существенные математические или технические трудности. Поэтому на практике обычно используют приближенные подходы, в основе которых лежит расчет поля сигнала для де-

терминированных сред передачи, а рассеяние звука учитывается путем введения в постановку некоторых случайных параметров. Одна из наиболее употребительных моделей этого класса может быть представлена следующим выражением для поля сигнала [2]:

$$s(t, \mathbf{r}) = \sum_{p=1}^L \operatorname{Re} \{ \dot{\eta}_p^* \dot{s}_p(t, \mathbf{r}) \}. \quad (5)$$

Здесь $\{ \dot{s}_p(t, \mathbf{r}) \}_{p=1}^L$ – аналитические комплексные представления некоторых сигнальных компонент поля, соответствующие отсутствию статистического рассеяния; $\{ \dot{\eta}_p \}_{p=1}^L$ – случайные комплексные коэффициенты, обусловленные флуктуацией амплитуды и фазы сигнала вследствие статистической неоднородности акустической среды. Физический смысл компонент $\{ \dot{s}_p(t, \mathbf{r}) \}_{p=1}^L$ определяется принятым способом описания поля сигнала. Так, в лучевом приближении компоненту $\dot{s}_k(t, \mathbf{r})$ относят к составляющей поля сигнала, которая распространяется по k -ой лучевой траектории; при использовании разложения поля по нормальным волнам $\dot{s}_k(t, \mathbf{r})$ соответствует k -ой моде поля и т. д.

Если статистические свойства комплексных амплитуд $\{ \dot{\eta}_p \}_{p=1}^L$ заданы, то модель (5) дает всю необходимую информацию для определения статистики поля сигнала, которая в совокупности со статистикой поля шумов и помех в принципе позволяет решать поставленную задачу анализа эффективности обнаружения, т. е. расчета значений вероятностей (3), (4). Однако и здесь встречаются немалые трудности. Во-первых, распределение декомпозиции (5) относительно просто находится лишь в предположении о гауссовской статистике флуктуаций комплексных амплитуд $\{ \dot{\eta}_p \}_{p=1}^L$. Учет возможности негауссовских флуктуаций этих величин представляет сложную теоретическую задачу, решение которой не всегда существует. Во-вторых, количество компонент модели (5) и их параметры зависят от текущего положения излучателя и приемной системы, которые, вообще говоря, могут изменяться. Поэтому распределение декомпозиции (5) также будет переменным и решение, найденное для какого-то одного положения корреспондирующих объектов, для другого положения окажется бесполезным. В-третьих, нас в конечном итоге интересует не распределение поля сигнала само по себе, а распределение функционала обработки $F(\mathbf{u})$, который, как правило, связан с наблюдениями нелинейной зависимостью.

Учитывая указанные обстоятельства, констатируем необходимость разработки таких методов

анализа эффективности, которые бы объединяли в себе универсальность с относительной простотой в реализации практических вычислений. Их построение неизбежно сопряжено с некоторым отходом от математической строгости. Однако это – обычная проблема прикладной науки, где приходится искать компромисс между адекватностью математической модели физическим условиям и возможностями ее практического применения при приемлемых затратах вычислительных или других ресурсов. Одна из наиболее плодотворных идей такого рода была высказана Накагами [4], который предложил так называемое М-распределение (получившее впоследствии его имя). В зависимости от цели исследований, возможны различные интерпретации метода Накагами [5]. Здесь предлагается развитие данной идеи под углом зрения поставленной задачи – поиска универсального метода анализа эффективности приема сигналов для произвольных моделей среды передачи.

1. ОСНОВЫ МЕТОДА

Обсудим физические предпосылки предлагаемого метода. Для вычисления вероятностей (3), (4) необходимо найти распределение $p_F(y/\theta)$ тестовой статистики $F(\mathbf{u})$ правила (2) при гипотезах наличия и отсутствия сигнала. В большинстве ситуаций, представляющих теоретический и практический интерес, функционал $F(\mathbf{u})$ – неотрицательно определен, т. е. при любых наблюдениях $F(\mathbf{u}) \geq 0$. Еще одно общее соображение заключается в том, что уровень ложных тревог α_0 решающих правил (2) обычно выбирают довольно низким ($10^{-3} \div 10^{-5}$). В свою очередь, низким уровням ложных тревог соответствуют высокие значения пороговой константы Π . Таким образом, для приближенного вычисления вероятностей (3), (4) при низких уровнях α_0 можно применить асимптотическое распределение неотрицательных случайных величин в области экстремальных значений аргумента. Для его поиска воспользуемся разложением плотности вероятностей $p_F(y)$ тестовой статистики $F(\mathbf{u})$ в базисе ортогональных полиномов Лагерра [6]:

$$L_n^{(\nu)}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma(n + \nu + 1)}{\Gamma(k + \nu + 1)} \frac{x^k}{(n - k)! k!}, \quad (6)$$

$$x \geq 0,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ – порядок полинома; ν – “свободный” параметр, который может выбираться в диапазоне значений $\nu > -1$; $\Gamma(z)$ – гамма-функция [6].

Учитывая возможность произвольного выбора параметра ν , представим плотность распределения тестовой статистики в виде следующего полиномиального ряда:

$$p_F(y) = \left(\frac{M_F}{\Omega_F}\right)^{M_F} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp\left\{-\frac{M_F y}{\Omega_F}\right\} \times y^{M_F-1} L_n^{(M_F-1)}\left(\frac{M_F y}{\Omega_F}\right), \quad (7)$$

где M_F и Ω_F – некоторые новые “свободные” параметры; c_n – коэффициенты разложения, для которых с учетом ортогональности полиномов (6) можно получить выражение

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{(n-k)! k!} \left(\frac{M_F}{\Omega_F}\right)^k \frac{m_F^{(k)}}{\Gamma(M_F+k)}, \quad (8)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь

$$m_F^{(k)} = \langle F^k(\mathbf{u}) \rangle = \int_0^{\infty} y^k p_F(y) dy -$$

k -ый начальный момент тестовой статистики. Теперь выберем параметры M_F и Ω_F , исходя из условия $c_1 = c_2 = 0$, которое в совокупности с определением коэффициентов разложения (8) приводит к следующим выражениям для параметров M_F и Ω_F :

$$\Omega_F = m_F^{(1)}, \quad M_F = \frac{\Omega_F^2}{m_F^{(2)} - \Omega_F^2}. \quad (9)$$

С учетом данного выбора параметров M_F и Ω_F разложение (7) запишем как

$$p_F(y) = p_F^{(0)}(y) + R_F(y), \quad (10)$$

где

$$p_F^{(0)}(y) = \frac{1}{\Gamma(M_F)} \left(\frac{M_F}{\Omega_F}\right)^{M_F} \times y^{M_F-1} \exp\left\{-\frac{M_F y}{\Omega_F}\right\} - \quad (11)$$

нулевой член ряда;

$$R_F(y) = \left(\frac{M_F}{\Omega_F}\right)^{M_F} \sum_{n=3}^{\infty} c_n \exp\left\{-\frac{M_F y}{\Omega_F}\right\} \times y^{M_F-1} L_n^{(M_F-1)}\left(\frac{M_F y}{\Omega_F}\right) -$$

остаток разложения, которое включает члены порядка выше второго.

Функциональный вид выражения (11) для нулевого члена разложения совпадает со стандартным гамма-распределением [6], параметры которого определены в соответствии с формулой (9). Это определение, хотя и в несколько ином виде, и было предложено Накагами [4]. Он задавал свое M -распределение следующим образом:

$$p_{\text{Nakag}}(x) = \frac{2}{\Gamma(M)} \left(\frac{M}{\Omega}\right)^M x^{2M-1} \exp\left\{-\frac{Mx^2}{\Omega}\right\}.$$

Легко видеть, что плотность распределения вероятностей (11) соответствует квадрату случайной величины $y = x^2$, где x подчиняется распределению Накагами. Соответственно, определение параметров распределения M и Ω , предложенное Накагами [4], отличалось от формулы (9) тем, что вместо первого и второго моментов статистики там фигурировали ее второй и четвертый моменты. Заметим, что эти отличия непринципиальны. Поэтому в дальнейшем будем называть величины M_F и Ω_F , определенные соотношением (9), параметрами Накагами.

Наша цель – поиск метода вычисления вероятности правильных или неправильных решений для общего статистического правила (2). В свою очередь, последний показатель находится как интеграл от плотности распределения вероятностей тестовой статистики по области $y \in (\Pi, \infty)$ для каждой из конкурирующих гипотез. После интегрирования разложения (10) запишем ряд для вероятности принятия решения в пользу гипотезы $\theta = 1$:

$$P(F(\mathbf{u}) \geq \Pi) = \frac{\Gamma(M_F, M_F \Pi / \Omega_F)}{\Gamma(M_F)} - \int_0^{\Pi} R_F(y) dy, \quad (12)$$

где

$$\Gamma(z, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt -$$

неполная гамма-функция [6].

Рассмотрим погрешность разложения (12), которая с учетом остатка ряда (10) принимает вид

$$\int_0^{\Pi} R_F(y) dy = \sum_{n=3}^{\infty} c_n \int_0^{\frac{M_F \Pi}{\Omega_F}} x^{M_F-1} \times \exp\{-x\} L_n^{(M_F-1)}(x) dx.$$

Из общих свойств полиномов Лагерра (6) следует [6], что при $n > 1$

$$\int_0^{\infty} x^{\nu} e^{-x} L_n^{(\nu)}(x) dx \equiv 0.$$

Принимая во внимание это соотношение, легко видеть, что при $M_F \Pi / \Omega_F \rightarrow \infty$ погрешность разложения (12) стремится к нулю. Итак, для больших значений параметра $M_F \Pi / \Omega_F$ вероятность принятия решений о наличии сигнала можно вычислять по следующей приближенной формулой:

$$P(F(\mathbf{u}) \geq \Pi / \theta) \cong \frac{\Gamma(M_F(\theta), M_F(\theta) \Pi / \Omega_F(\theta))}{\Gamma(M_F(\theta))}, \quad (13)$$

где $M_F(\theta)$, $\Omega_F(\theta)$ – параметры распределения, связанные формулой (9) с моментами тестовой статистики для ситуации θ . При этом выражение (13) при $\theta = 0$ соответствует вероятности ложных тревог, а при $\theta = 1$ – вероятности правильного обнаружения сигнала.

2. ПАРАМЕТРЫ НАКАГАМИ И ИНДЕКС “МЕРЦАНИЯ” ПОЛЯ СИГНАЛА

Конкретные значения параметров M_F , Ω_F определяются заданной моделью среды передачи сигнала и алгоритмом приема. Модель поля сигнала задана выражением (5), которое в компактных векторно-матричных обозначениях может быть записано в виде

$$s(t, \mathbf{r}) = \text{Re} \{ \dot{\boldsymbol{\eta}}^H \cdot \dot{\mathbf{S}}(t, \mathbf{r}) \}. \quad (14)$$

Здесь $\dot{\mathbf{S}}(t, \mathbf{r}) = [\dot{s}_1(t, \mathbf{r}), \dot{s}_2(t, \mathbf{r}), \dots, \dot{s}_L(t, \mathbf{r})]^T$ – векторное поле комплексных аналитических компонент поля сигнала; $\dot{\boldsymbol{\eta}} = [\dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \dots, \dot{\eta}_L]^T$ – вектор (матрица-столбец) случайных коэффициентов передачи среды, обусловленных рассеянием; $(\cdot)^H$ – символ эрмитового сопряжения матрицы. В общем случае класс функционалов обработки наблюдений поля для рассматриваемой модели акустической среды может быть представлен следующим образом [2]:

$$F(\mathbf{u}) = \dot{\mathbf{V}}^H(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{u}), \quad (15)$$

где

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{u}) = \int_{\mathbf{D}_A} \int_{\mathbf{T}} \dot{\mathbf{B}}(t, \mathbf{r}) \cdot u(t, \mathbf{r}) dt d\mathbf{r} \quad (16)$$

вектор линейных комплексных статистик поля \mathbf{u} ; $\dot{\mathbf{B}}(t, \mathbf{r}) = [\dot{b}_1(t, \mathbf{r}), \dot{b}_2(t, \mathbf{r}), \dots, \dot{b}_{\tilde{L}}(t, \mathbf{r})]^T$ – \tilde{L} -мерное

векторное поле некоторых комплексных весовых функций; $\dot{\mathbf{Y}}$ – эрмитова матрица порядка \tilde{L} (в общем случае $\tilde{L} \neq L$).

Алгоритм обработки (15), (16) охватывает основные случаи оптимального, квазиоптимального и неоптимального приема сигналов для сред с многоходовым распространением [2]. В частности, при гауссовской статистике шумов и помех оптимальные весовые функции $\dot{b}_k(t, \mathbf{r})$ являются решениями системы уравнений [2]

$$g_w \dot{b}_k(t, \mathbf{r}) + \int_{\mathbf{D}_A} \int_{\mathbf{T}} K_z(t, t'; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \dot{b}_k(t', \mathbf{r}') dt' d\mathbf{r}' = \dot{s}_k(t, \mathbf{r}), \quad (17)$$

$$t \in \mathbf{T}, \quad \mathbf{r} \in \mathbf{D}_A, \quad k = 1, \dots, L,$$

где g_w – спектральная плотность мощности собственных помех приемной системы; $K_z(t, t'; \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – пространственно-временная корреляционная функция внешних помех. В этом случае размерность вектора линейных функционалов (16) определяется фактическим числом сигнальных компонент, т. е. $\tilde{L} = L$. Следовательно, каждая из компонент функционала (16) является результатом линейной обработки принятого акустического поля, согласованной под прием отдельных составляющих поля сигнала. Решение о наличии сигнала выносится по значению нелинейной статистики (15), которая обеспечивает накопление полной энергии сигнала с учетом всех его компонент. В общем случае алгоритм (15), (16) охватывает случаи произвольного выбора весовых функций $\dot{b}_k(t, \mathbf{r})$ и произвольного количества каналов линейной обработки \tilde{L} , которое может не совпадать с фактическим количеством сигнальных компонент L . В частности, распространенным способом обработки является одноканальный прием, когда $\tilde{L} = 1$, а настройки линейной части приемника согласуются с параметрами наиболее интенсивной сигнальной составляющей.

Рассмотрим вычисление параметров $M_F(\theta)$, $\Omega_F(\theta)$ для алгоритмов приема сигналов указанного класса. В соответствии с моделью (1), функционал (16) может быть представлен как

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{u}) = \dot{\mathbf{V}}_N(\mathbf{u}) + \theta \cdot \dot{\mathbf{V}}_S(\mathbf{u}), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_N(\mathbf{u}) = & \int_{\mathbf{D}_A} \int_{\mathbf{T}} \dot{\mathbf{B}}(t, \mathbf{r}) w(t, \mathbf{r}) dt d\mathbf{r} + \\ & + \int_{\mathbf{D}_A} \int_{\mathbf{T}} \dot{\mathbf{B}}(t, \mathbf{r}) z(t, \mathbf{r}) dt d\mathbf{r} - \end{aligned}$$

шумы и помехи, а

$$\dot{\mathbf{V}}_S(\mathbf{u}) = \int_{\mathbf{D}_A} \int_{\mathbf{T}} \dot{\mathbf{B}}(t, \mathbf{r}) s(t, \mathbf{r}) dt d\mathbf{r} -$$

сигнал на выходе линейной части обработки. Используя модель поля сигнала (14) и свойства аналитических сигнальных функций [7], последнее выражение преобразуем к виду

$$\dot{\mathbf{V}}_S(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}, \quad (19)$$

где

$$\dot{\mathbf{Q}} = \int_{\mathbf{D}_A} \int_{\mathbf{T}} \dot{\mathbf{B}}(t, \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{S}}^H(t, \mathbf{r}) dt d\mathbf{r} - \quad (20)$$

прямоугольная матрица $\tilde{L} \times L$. Запишем статистические характеристики сигналов и помех на выходе линейной обработки в предположении, что шумы и помехи подчиняются гауссовскому распределению вероятностей с нулевым математическим ожиданием. Тогда непосредственно из выражений (18), (19) находим, что на линейном выходе приемной системы математическое ожидание шумов и помех – нулевое, а вектор математических ожиданий сигнала имеет вид

$$\dot{\mathbf{m}}_S = E\{\dot{\mathbf{V}}_S(\mathbf{u})\} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\mathbf{a}}, \quad (21)$$

где $\dot{\mathbf{a}} = \langle \dot{\boldsymbol{\eta}} \rangle$ – математическое ожидание L -мерного вектора случайных коэффициентов передачи среды.

Для ковариационной \tilde{L} -мерной матрицы шумов и помех находим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_N = E\{\dot{\mathbf{V}}_N(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{V}}_N^H(\mathbf{u})\} = \\ = g_w \cdot \int_{\mathbf{D}_A} \int_{\mathbf{T}} \dot{\mathbf{B}}(t, \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{B}}^H(t, \mathbf{r}) dt d\mathbf{r} + \\ + \int_{\mathbf{D}_A} \int_{\mathbf{D}_A} \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} K_z(t, t'; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \dot{\mathbf{B}}(t, \mathbf{r}) \cdot \\ \cdot \dot{\mathbf{B}}^H(t', \mathbf{r}') dt d\mathbf{r} dt' d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (22)$$

Ковариационная \tilde{L} -мерная матрица сигналов имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_S = \\ = E\left\{(\dot{\mathbf{V}}_S(\mathbf{u}) - \dot{\mathbf{m}}_S) \cdot (\dot{\mathbf{V}}_S(\mathbf{u}) - \dot{\mathbf{m}}_S)^H\right\} = \quad (23) \\ = \frac{1}{4} \dot{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\mathbf{W}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^H, \end{aligned}$$

где

$$\dot{\mathbf{W}} = \langle (\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\mathbf{a}}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\mathbf{a}})^H \rangle - \quad (24)$$

ковариационная L -мерная матрица вектора неизвестных параметров, обусловленных рассеянием звука в среде передачи.

Выражения (21)–(24) могут быть применены для произвольных опорных функций линейной обработки $\dot{\mathbf{B}}(t, \mathbf{r})$. При оптимальной линейной обработке функции $\dot{\mathbf{B}}(t, \mathbf{r})$ удовлетворяют уравнению (17), с учетом которого получаем $\dot{\mathbf{K}}_N = \mathbf{Q}$. В этом случае матрица (20) является $L \times L$ -мерной.

Теперь мы имеем все необходимые данные для того, чтобы записать моменты тестовой статистики (15) первых двух порядков. При этом воспользуемся известным тождеством матричной алгебры [8]

$$\mathbf{x}^H \cdot \mathbf{y} = \text{Tr}[\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}^H],$$

где \mathbf{x} , \mathbf{y} – матрицы-столбцы одинаковой размерности, $\text{Tr}[\mathbf{A}]$ – след квадратной матрицы \mathbf{A} , т. е., сумма ее диагональных элементов. Непосредственно из определения тестовой статистики (15) с учетом соотношений (21)–(24) находим ее математическое ожидание:

$$\begin{aligned} m_F^{(1)}(\theta) = \langle \dot{\mathbf{V}}^H(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{u}) / \theta \rangle = \\ = \text{Tr}[\dot{\mathbf{Y}} \cdot (\dot{\mathbf{K}}_N + \theta \cdot \dot{\mathbf{K}}_S)] + \quad (25) \\ + \theta \cdot \dot{\mathbf{m}}_S^H \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{m}}_S. \end{aligned}$$

Дисперсию статистики (15) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_F^2(\theta) = \langle [\dot{\mathbf{V}}_N^H(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}}_N(\mathbf{u})]^2 \rangle - \\ - [\langle \dot{\mathbf{V}}_N^H(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}}_N(\mathbf{u}) \rangle]^2 + \\ + \theta \left(\langle [\dot{\mathbf{V}}_S^H(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}}_S(\mathbf{u})]^2 \rangle - \right. \\ \left. - [\langle \dot{\mathbf{V}}_S^H(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}}_S(\mathbf{u}) \rangle]^2 \right) + \\ + 2\theta \langle \dot{\mathbf{V}}_N^H(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}}_S(\mathbf{u}) \cdot \\ \cdot \dot{\mathbf{V}}_S^H(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}}_N(\mathbf{u}) \rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

Согласно принятым допущениям, распределение шумов и помех является гауссовским, так что комплексная величина $\dot{\mathbf{V}}_N(\mathbf{u})$ – также гауссовская. Как известно, моменты любых порядков гауссовских величин можно представить через моменты первых двух порядков [7]. В частности, для первой строки формулы (26) справедливо

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[\dot{\mathbf{V}}_N^H(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}}_N(\mathbf{u}) \right]^2 \right\rangle - \\ & - \left[\left\langle \dot{\mathbf{V}}_N^H(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}}_N(\mathbf{u}) \right\rangle \right]^2 = \\ & = \text{Tr} \left[(\dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{K}}_N)^2 \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Что же касается сигнала, то его флуктуации в реальной акустической среде могут быть и негауссовскими. Поэтому для второй строки выражения (26) применим следующее тождественное представление:

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[\dot{\mathbf{V}}_S^H(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}}_S(\mathbf{u}) \right]^2 \right\rangle - \\ & - \left[\left\langle \dot{\mathbf{V}}_S^H(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}}_S(\mathbf{u}) \right\rangle \right]^2 = \\ & = I_M \cdot \left[\left\langle \dot{\mathbf{V}}_S^H(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}}_S(\mathbf{u}) \right\rangle \right]^2, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} I_M = & \frac{1}{\left[\left\langle \dot{\mathbf{V}}_S^H(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}}_S(\mathbf{u}) \right\rangle \right]^2} \times \\ & \times \left(\left\langle \left[\dot{\mathbf{V}}_S^H(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}}_S(\mathbf{u}) \right]^2 \right\rangle - \right. \\ & \left. - \left[\left\langle \dot{\mathbf{V}}_S^H(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}}_S(\mathbf{u}) \right\rangle \right]^2 \right) - \end{aligned} \quad (29)$$

отношение дисперсии статистики (15) к квадрату ее математического ожидания в ситуации наличия сигнала при отсутствии шумов и помех. Выражение (29) подобно так называемому индексу “мерцаний” сигнала, который используется в теории распространения волн в статистически неоднородных средах [3], однако до сих пор этот показатель вычислялся непосредственно для поля сигнала, существующего в среде. В нашем случае параметр (29) относится к флуктуациям сигнала по выходу обработки, включая линейный и нелинейный этапы. Поэтому по аналогии назовем его индексом “мерцаний” сигнала, но по уже выходу системы обработки.

Будем пока что считать I_M заданным из каких-то физических соображений, а вопрос его вычисления обсудим чуть позже. Заметим только, что по определению этот параметр должен быть неотрицательным – $I_M \geq 0$. Принимая во внимание соотношения (25), (27), (28), выражение (26) приведем к виду

$$\begin{aligned} \sigma_F^2(\theta) = & \text{Tr}[(\dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{K}}_N)^2] + \\ & + \theta I_M (\text{Tr}[\dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{K}}_S] + \dot{\mathbf{m}}_S^H \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{m}}_S)^2 + \\ & + 2\theta \text{Tr}[\dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{K}}_S \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{K}}_N] + \\ & + 2\theta \dot{\mathbf{m}}_S^H \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{K}}_N \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{m}}_S. \end{aligned} \quad (30)$$

Теперь введем еще один параметр

$$q^2 = 2\tilde{L} \frac{\text{Tr}[\dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{K}}_S] + \dot{\mathbf{m}}_S^H \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{m}}_S}{\text{Tr}[\dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{K}}_N]},$$

являющийся отношением полной энергии сигнала по выходу обработки к средней мощности помех на выходе одного квадратурного канала. С учетом формул (21), (23) он записывается как

$$\begin{aligned} q^2 = & \frac{L}{2\text{Tr}[\dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{K}}_N]} \times \\ & \times \left(\text{Tr} \left[\dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\mathbf{W}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^H \right] + \right. \\ & \left. + \dot{\mathbf{a}}^H \cdot \dot{\mathbf{Q}}^H \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\mathbf{a}} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Нетрудно показать, что частные случаи для величины q^2 соответствуют общепринятым определениям отношения сигнал/помеха по выходу обработки [1, 2]. Этот параметр, также как и выражения (25), (30), зависит от \tilde{L} -мерной матрицы $\dot{\mathbf{Y}}$ весовых коэффициентов нелинейного накопителя (15), которая до сих пор полагалась произвольно заданной. Теперь выберем ее в виде

$$\dot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{K}}_N^{-1}, \quad (32)$$

который является оптимальным для случая приема сильных сигналов [2]. Тогда на основании выражений (25), (30) и с учетом определения (31) параметры Накагами для рассматриваемой задачи представим в виде

$$\Omega_F(\theta) = \tilde{L} \left(1 + \theta \frac{q^2}{2\tilde{L}} \right), \quad (33)$$

$$M_F(\theta) = \frac{\tilde{L} \left(1 + \theta \frac{q^2}{2\tilde{L}}\right)^2}{1 + \theta \frac{q^2}{\tilde{L}} + \theta I_M L \left(\frac{q^2}{2\tilde{L}}\right)^2}. \quad (34)$$

Таким образом, практически полностью определен параметр для того, чтобы воспользоваться приближенной формулой (13) вычисления вероятностей принятия правильных или неправильных решений для общего алгоритма обработки (15), (16), где матрицу весовых коэффициентов выбрано в виде (32). Осталось лишь обсудить вопрос вычисления индекса “мерцаний” сигнала, заданного выражением (29). С учетом формулы (19) запишем его следующим образом:

$$I_M = \frac{\left\langle \left(\text{Tr} \left[\dot{Q}^H \cdot \dot{Y} \cdot \dot{Q} \cdot \dot{\eta} \cdot \dot{\eta}^H \right] \right)^2 \right\rangle}{\left(\text{Tr} \left[\dot{Q}^H \cdot \dot{Y} \cdot \dot{Q} \cdot \dot{K}_{\eta}^{(2)} \right] \right)^2} - 1.$$

Здесь $\dot{K}_{\eta}^{(2)} = \langle \dot{\eta} \cdot \dot{\eta}^H \rangle$ – матрица начальных смешанных моментов вектора $\dot{\eta}$ второго порядка. Используя соотношения матричной алгебры [8], последнее выражение преобразуем к виду

$$I_M = \frac{1}{\left(\text{Tr} \left[\dot{Q}^H \cdot \dot{Y} \cdot \dot{Q} \cdot \dot{K}_{\eta}^{(2)} \right] \right)^2} \times \text{Tr} \left[\dot{K}_{\eta}^{(4)} \cdot \left(\left(\dot{Q}^H \cdot \dot{Y} \cdot \dot{Q} \right) \otimes \left(\dot{Q}^H \cdot \dot{Y} \cdot \dot{Q} \right) \right) \right] - 1, \quad (35)$$

где $\dot{K}_{\eta}^{(4)} = \langle \dot{\eta} \cdot \dot{\eta}^H \otimes \dot{\eta} \cdot \dot{\eta}^H \rangle$ – матрица начальных смешанных моментов вектора $\dot{\eta}$ четвертого порядка; $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ – внешнее (кронекеровское) произведение матриц [8]. При выполнении с точностью до постоянных множителей соотношений $\mathbf{Q} \sim \mathbf{E}_L$, $\mathbf{Y} \sim \mathbf{E}_L$, выражение (35) принимает вид

$$I_M = \frac{\langle |\dot{\eta}|^4 \rangle}{(\langle |\dot{\eta}|^2 \rangle)^2} - 1. \quad (36)$$

Таким образом, в частном случае однородности компонент сигнала и их полного разделения в каналах линейной обработки индекс “мерцаний” сигнала по выходу совпадает с индексом “мерцаний” комплексных амплитуд $\dot{\eta}$. Во всех других случаях параметр (35) определяется как статистикой вектора $\dot{\eta}$, так и алгоритмом приема. Отметим также, что проведенный анализ дает четкие ориентиры относительно содержания и объе-

ма информации о статистических характеристиках флуктуаций сигнала в среде его распространения, необходимых для анализа эффективности приема. Эта информация фактически сводится к матрицам начальных смешанных моментов комплексных амплитуд $\dot{\eta}$ парциальных составляющих сигнала второго $\dot{K}_{\eta}^{(2)}$ и четвертого $\dot{K}_{\eta}^{(4)}$ порядков. В рамках гауссовской статистики флуктуаций вектора $\dot{\eta}$ их вычисляются теоретически. Есть определенные возможности и для учета негауссовских флуктуаций. Наконец, необходимые статистические характеристики можно получить экспериментально или путем математического моделирования.

Отдельно запишем индекс “мерцаний” сигнала для гауссовской модели флуктуаций вектора $\dot{\eta}$. В этом случае, используя для сигнальных компонент соотношение, аналогичное (27), находим

$$I_M = \frac{1}{\left(\text{Tr} \left[\dot{Y} \cdot \dot{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \dot{Q}^H \right] + \dot{a}^H \cdot \dot{Q}^H \cdot \dot{Y} \cdot \dot{Q} \cdot \dot{a} \right)^2} \times \text{Tr} \left[\left(\dot{Y} \cdot \dot{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \dot{Q}^H \right)^2 \right] + 2\dot{a}^H \cdot \dot{Q}^H \cdot \dot{Y} \cdot \dot{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \dot{Q}^H \cdot \dot{Y} \cdot \dot{Q} \cdot \dot{a}. \quad (37)$$

Анализ выражения (37) показывает, что значения индекса “мерцаний” в случае гауссовских флуктуаций поля сигнала ограничены диапазоном $I_M \in (0, 1)$.

3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА К АНАЛИЗУ ТРАДИЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ КАНАЛОВ ПЕРЕДАЧИ

Для того, чтобы проиллюстрировать возможные погрешности предлагаемой методики анализа эффективности приема сигналов, применим ее к моделям канала передачи, где точные решения хорошо известны. Наиболее распространен так называемый райсовский канал [9], который является частным случаем модели (5) при $L=1$ и гауссовском распределении комплексного коэффициента передачи среды $\dot{\eta}$:

$$p_{\dot{\eta}}(\dot{\eta}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\eta}^2} \exp \left\{ -\frac{|\dot{\eta} - \dot{a}|^2}{2\sigma_{\eta}^2} \right\},$$

где $\dot{a} = \langle \dot{\eta} \rangle$ – математическое ожидание; σ_{η}^2 – дисперсия флуктуаций комплексных компонент случайной величины $\dot{\eta}$. Физически параметр \dot{a} опре-

деляет уровень постоянной или, как принято называть [9], когерентной компоненты поля сигнала, а дисперсия σ_η^2 – интенсивность случайной (некогерентной) компоненты. Если флуктуации отсутствуют ($\sigma_\eta^2=0$), то получаем случай обнаружения заведомо известного сигнала, если же отсутствуют когерентная компонента поля ($\dot{a}=0$), то райсовский канал переходит в рэлеевский, модель которого также известна [9].

При практическом применении указанных моделей обычно прибегают к определенному нормированию параметров \dot{a} и σ_η^2 . В частности, если исходить из условия $\langle |\dot{\eta}|^2 \rangle = 1$, их целесообразно определить следующим образом:

$$\dot{a} = \sqrt{\gamma_{\text{coh}}}, \quad \sigma_\eta^2 = \frac{1 - \gamma_{\text{coh}}}{2},$$

где $\gamma_{\text{coh}} = |\dot{a}|^2 / (|\dot{a}|^2 + 2\sigma_\eta^2)$ – относительный по мощности уровень детерминированной компоненты, который будем называть параметром когерентности поля сигнала ($0 \leq \gamma_{\text{coh}} \leq 1$). Теперь можно записать частные случаи полученных выше общих выражений. В частности, из формулы (37) находим индекс “мерцаний” сигнала $I_M = 1 - \gamma_{\text{coh}}^2$. Тогда с учетом соотношений (33), (34) параметры Накагами принимают вид

$$\Omega_F(\theta) = 2\sigma_N^2(1 + \theta q^2/2), \quad (38)$$

$$M_F(\theta) = \frac{(1 + \theta q^2/2)^2}{1 + \theta q^2 + \theta I_M (q^2/2)^2}, \quad (39)$$

где

$$q^2 = \frac{1}{4\sigma_N^2} \left| \int_{D_A} \int_T \dot{b}(t, \mathbf{r}) \dot{s}^*(t, \mathbf{r}) dt d\mathbf{r} \right|^2 -$$

отношение сигнал/помеха; $\sigma_N^2 = K_N/2$ – дисперсия шумов и помех по выходу одного канала линейной квадратурной обработки (16). При отсутствии сигнала ($\theta=0$) параметры (38) и (39) принимают значения $\Omega_F(\theta=0) = 2\sigma_N^2$ и $M_F(\theta=0) = 1$. Из формулы (13) получим вероятность ложных тревог

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= P(F(\mathbf{u}) \geq \Pi / \theta = 0) = \\ &= \Gamma(1, \Pi / (2\sigma_N^2)) = \exp \left\{ -\frac{\Pi}{2\sigma_N^2} \right\}, \end{aligned}$$

откуда следует, что порог обнаружения, обеспечивающий заданный уровень α_0 , составляет $\Pi = -2\sigma_N^2 \ln \alpha_0$.

С учетом последнего выражения и соотношений (38), (39) из формулы (13) находим вероятность правильного обнаружения сигнала:

$$\begin{aligned} P_{\text{ПО}} &\cong \\ &\cong \frac{\Gamma \left(\frac{(1+q^2/2)^2}{1+q^2+I_M(q^2/2)^2}, \frac{-(1+q^2/2) \ln \alpha_0}{1+q^2+I_M(q^2/2)^2} \right)}{\Gamma \left(\frac{(1+q^2/2)^2}{1+q^2+I_M(q^2/2)^2} \right)}. \end{aligned} \quad (40)$$

Точное решение для рассматриваемой задачи имеет вид [9]

$$\begin{aligned} P_{\text{ПО}} &= \\ &= Q \left(\sqrt{\frac{\gamma_{\text{coh}} q^2}{1+(1-\gamma_{\text{coh}})q^2/2}}, \sqrt{\frac{-2 \ln \alpha_0}{1+(1-\gamma_{\text{coh}})q^2/2}} \right), \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$Q(v, z) = \int_z^\infty x \exp \left\{ -\frac{x^2 + v^2}{2} \right\} I_0(vx) dx -$$

специальная функция, которую часто называют функцией Рэлея – Райса [9].

Сопоставляя результаты расчетов по точной (41) и приближенной (40) формулам, можно оценить погрешность предлагаемого метода анализа эффективности. Сравнение проведем по критерию порогового отношения сигнал/помеха $q_{\text{пор}}^2$, которое находим в результате решения уравнения

$$P_{\text{ПО}} = P_{\text{ПО}}(\alpha_0, q_{\text{пор}}^2) = \beta_0.$$

Таким образом, параметр $q_{\text{пор}}^2 = q_{\text{пор}}^2(\alpha_0, \beta_0)$ численно равен такому отношению сигнал/помеха по выходу обработки, которое при заданном уровне ложных тревог α_0 обеспечивает вероятность правильного обнаружения сигнала на уровне β_0 .

Значения $q_{\text{пор}}^2$ для алгоритма некогерентного приема сигнала в райсовском канале в зависимости от параметра когерентности поля сигнала γ_{coh} представлены на рис. 1, а. Сплошные кривые построены с применением точной формулы (41), а штриховые соответствуют приближенному решению (40). Расчеты выполнялись для уровней ложных тревог $\alpha_0 = 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5}$ и вероятности правильного обнаружения $\beta_0 = 0.9$. Как следует из графика, погрешность приближенной формулы (40) по критерию порогового отношения сигнал/помеха не превышает 1 дБ, что вполне удовлетворительно для практических нужд. Обращает

на себя внимание и зависимость этой погрешности от параметра когерентности γ_{coh} . Так, для $\gamma_{\text{coh}} = 0$ погрешность равна нулю, что объясняется совпадением для этой ситуации приближенной и точной формул. Отметим, однако, что погрешность очень мала и для $\gamma_{\text{coh}} = 1$, при котором выражения (40) и (41) различны.

Эту особенность объясняет рис. 1, б, на котором представлены соответствующие значения параметра $M_F\Pi/\Omega_F$. Как было показано выше, погрешность приближенного метода уменьшается, когда это отношение возрастает. Из графика видно, что в ситуациях, когда параметр когерентности γ_{coh} близок к единице, наибольших значений достигает и $M_F\Pi/\Omega_F$. Таким образом, имеем подтверждение ключевого значения параметра $M_F\Pi/\Omega_F$ для обеспечения точности приближенного подхода.

4. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИЕМА СИГНАЛОВ В КАНАЛЕ С МНОГОЛУЧЕВОСТЬЮ

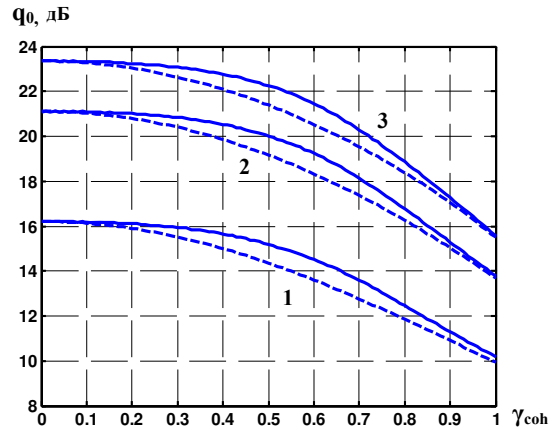
Рассмотрим более реалистическое представление канала, в котором, кроме рассеяния звука, присутствует и многолучевое распространение сигнала, обусловленное рефракцией. В качестве модели среды примем полупространство $z \geq 0$, $x, y \in (-\infty, \infty)$, в котором скорость распространения звука – линейная функция координаты z :

$$c(x, y, z) = c(z) = c_0(1 + az), \quad z \in (0, \infty).$$

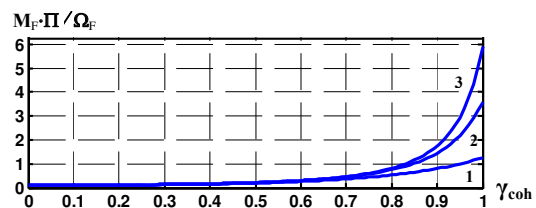
Здесь c_0 – скорость звука на горизонте $z=0$; a – нормированный градиент¹. Несмотря на внешнюю простоту, эта модель довольно широко применяется в океанологии, поскольку (при определенной идеализации) реальные условия распространения звука в некоторых акваториях Мирового океана довольно близки к указанным [10]. Для описания канала воспользуемся лучевым приближением. В соответствии с ним акустическое поле представляется совокупностью плоских волн, каждая из которых распространяется по определенной лучевой траектории. Параметры лучевой модели (времена распространения, углы скольжения, амплитуды лучей) могут быть вычислены по известным формулам лучевой акустики [11].

Наиболее вероятной причиной рассеяния звука в канале данного типа будет статистическая неровность поверхности. Действительно, каждая лучевая траектория в такой среде состоит из отрезков

¹Типовое значение океанологического параметра a составляет приблизительно 0.012 км^{-1} [10].



а



б

Рис. 1. Пороговое отношение сигнал/помеха (а) и параметр, определяющий ошибку аппроксимации Накагами, (б) в зависимости от параметра когерентности поля сигнала:

сплошные – точная формула,
штриховые – аппроксимация Накагами;
1 – $\alpha_0 = 10^{-1}$, 2 – $\alpha_0 = 10^{-3}$, 3 – $\alpha_0 = 10^{-5}$

окружностей определенного радиуса. Их центры находятся выше границы полупространства, поэтому каждая траектория на той или иной дистанции обязательно выходит к поверхности и отражается от нее. Если поверхность имеет статистические неровности, то каждое отражение звука сопровождается рассеянием части энергии сигнала и дополнительными флюктуациями его фазы. В случае плавных крупномасштабных неровностей поверхности математическое ожидание случайных амплитуд (когерентная компонента поля) определяется соотношением [12]

$$\dot{a}_k = \langle \dot{\eta}_k \rangle = \exp\{-\nu_k \mathcal{P}_k^2 / 2\},$$

где $\mathcal{P}_k = 4\pi(\delta_{\Pi}/\lambda) \sin \alpha_k$ – параметр Рэлея; δ_{Π} – среднеквадратичное отклонение поверхности от идеальной плоскости; λ – длина акустической волны; α_k – угол скольжения k -го луча возле поверхности; ν_k – количество ударов луча об поверхность.

Для согласования по энергетике, как и выше,

принимая условие $\langle |\dot{\eta}_k|^2 \rangle \equiv 1$. Отсюда следует, что дисперсия флюктуаций случайных амплитуд лучей может быть найдена из соотношения

$$\langle |\dot{\eta}_k - \langle \dot{\eta}_k \rangle|^2 \rangle = 1 - \exp\{-\nu_k \mathcal{P}_k^2\}.$$

Пусть для распределения вероятностей флюктуаций коэффициента передачи канала справедлив гауссовский закон. Кроме того, поскольку разные лучи, как правило, отражаются разными участками шероховатой поверхности, то случайные величины $\{\dot{\eta}_k\}_{k=1}^L$ считаем статистически независимыми.

Для проведения расчетов осталось определить параметры полезного сигнала и приемной антенны. Пусть полезный сигнал имеет вид импульса продолжительностью T с квазигармоническим заполнением и линейной частотной модуляцией (ЛЧМ-сигнал):

$$\dot{s}_0(t) = A_0 \exp \left\{ j2\pi \left(f_0 t + \frac{\beta_d}{2} \left(t - \frac{T}{2} \right)^2 \right) \right\}, \quad (42)$$

$$t \in (0, T),$$

где f_0 – центральная частота сигнала; $\beta_d = \Delta f_d / T$ – скорость модуляции; Δf_d – девиация частоты. Сигналы вида (42) относятся к классу сложных, для которых произведение длительности на полосу частот (коэффициент сложности) $\Delta f_s T \gg 1$. Частным случаем сигнала (42) является импульс с тональным заполнением, которому соответствует значение $\beta_d = 0$ и коэффициент сложности $\Delta f_s T = 1$.

В качестве приемной антенны будем рассматривать вертикальную линейку с равномерным расположением m акустических датчиков. Она не имеет горизонтальной направленности, что в данном случае несущественно: в рассматриваемом волноводе важна лишь селекция лучей по их углам скольжения. Для помех ограничимся случаем, когда собственные шумы приемной антенны преобладают над внешними их источниками. С учетом этого упрощения элементы матрицы (20) для рассматриваемой модели могут быть вычислены по формуле

$$(\mathbf{Q})_{p,q} = A_p A_q \dot{\Psi}(\tau_q - \tau_p) \dot{\Theta}_q^*(\alpha_p), \quad (43)$$

где A_k – амплитуды лучей;

$$\dot{\Psi}(\tau) = \frac{\sin(\pi \beta_d \tau (T - |\tau|))}{\pi \beta_d \tau} \exp\{2\pi f_0 \tau\} \quad (44)$$

функция неопределенности сигнала (42) по време-

ни [13];

$$\dot{\Theta}_k(\alpha) = \frac{\sin \left(\pi \frac{md}{\lambda} (\sin \alpha_k - \sin \alpha) \right)}{\sin \left(\pi \frac{d}{\lambda} (\sin \alpha_k - \sin \alpha) \right)} \times$$

$$\times \exp \left\{ j\pi \frac{(m-1)d}{\lambda} (\sin \alpha_k - \sin \alpha) \right\} -$$

диаграмма направленности вертикальной линейной решетки; α_k и α – угол ориентации антенны и угол прихода сигнала соответственно. Теперь мы имеем все необходимые данные для проведения расчетов эффективности приема в заданном канале. Для начала рассмотрим оптимальную обработку, согласованную с полем сигнала. Предположим, что источник и приемная антенна удалены от поверхности на одинаковое относительное расстояние $az = 2.4 \cdot 10^{-3}$ (размещение источника непосредственно у поверхности в силу идеализации модели приводит к аномально высокой силе звука, которая не имеет места в реальных средах). Горизонтальное же расстояние между ними изменяется в пределах $ar = 0.2 \div 1$. На каждом шаге по дистанции следует вычислять параметры коррелирующих лучей: их общее количество, время задержки, углы скольжения, амплитуды, параметры Рэлея. Имея эту информацию, по формуле (43) можно вычислить матрицу \mathbf{Q} и все производные от нее величины. Указанную методику вычислений иллюстрирует рис. 2, который соответствует приему ЛЧМ-сигнала с коэффициентом сложности $\Delta f_s T = 100$. При этом количество приемных элементов антенны составляет $m = 10$, относительный шаг решетки $d/\lambda = 0.45$.

На рис. 2, а показана зависимость от дистанции индекса “мерцаний” сигнала I_M для трех значений относительного параметра статистической шероховатости поверхности $\delta_{\Pi}/\lambda = 0.2, 0.5, 1$. Поскольку по предположению флюктуации поля сигнала – гауссовские, то значение указанного индекса лежит в диапазоне от нуля до единицы². Отметим, что величина I_M возрастает при росте неровности поверхности, т. е. параметра δ_{Π}/λ . Кроме того, значение индекса “мерцаний” очень неравномерно по дистанции. Этот результат свидетельствует о том, что для некоторых расстояний поле сигнала формируется преимущественно рассеянными компонентами.

Далее, используя полученные значения индекса “мерцаний”, выражения для параметров На-

²При негауссовских флюктуациях возможны ситуации, когда $I_M > 1$.

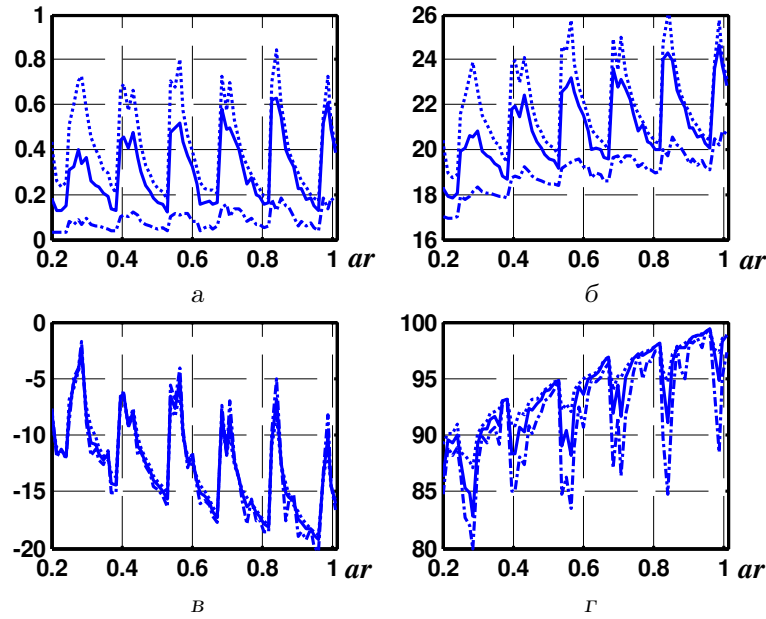


Рис. 2. Эффективность оптимального приема ЛЧМ-сигнала для трех значений параметра статистической шероховатости поверхности:

а – индекс “мерцаний” I_M ; б – пороговое отношение сигнал/помеха, $q_{\text{пор}}^2$, дБ;
 в – фактическое отношение сигнал/помеха, q^2 , дБ; г – пороговое отношение сигнал/помеха на источнике, дБ;
 сплошные – $\delta\pi/\lambda=0.5$, штрих-пунктирные – $\delta\pi/\lambda=0.2$, штриховые – $\delta\pi/\lambda=1$

кагами (33), (34) и формулу (13), найдем пороговое отношение сигнал/помеха $q_{\text{пор}}^2 = q_{\text{пор}}^2(\alpha_0, \beta_0)$, соответствующее $\alpha_0 = 10^{-5}$ и $\beta_0 = 0.9$. Эти результаты приведены на рис. 2, б. В целом кривые на нем ведут себя подобно зависимостям для индекса I_M . Отметим только, что пороговое отношение сигнал/помеха возрастает при увеличении дистанции приема, причем ухудшение находится в пределах $3 \div 6$ дБ. Это объясняется тем, что для длинных дистанций возрастает количество коррелирующих лучей, т. е. общая энергия сигнала все больше “распыляется” между лучевыми траекториями. В то же время, даже при оптимальной обработке “сборка” сигнала не может быть идеальной из-за недостаточного разделения лучевых составляющих в парциальных каналах. Кроме того, при этом все более значительную роль играют и эффекты рассеяния звука в канале, о чем свидетельствует поведение индекса “мерцаний”.

Для простых каналов с одноходовым распространением сигнала значения параметра $q_{\text{гран}}^2$ исчерпывали бы задачу анализа. Однако в рассматриваемом случае этого недостаточно. В самом деле, пороговое отношение сигнал/помеха определяется статистикой флуктуаций сигнала по выходу обработки, но этот параметр не принимает во

внимание использование общей энергетики сигнала. Например, пусть приемная система построена так, что из всех лучевых компонент сигнала выделяется лишь одна, а остальные отсеиваются. Тогда статистика флуктуаций сигнала на выходе обработки очень благоприятна, а значение параметра $q_{\text{пор}}^2$ невысоко. Но в этом случае теряется та часть энергии сигнала, которая приходится на отброшенные приемником лучевые составляющие. Следовательно, по общей эффективности такой способ обработки может оказаться не самым лучшим. Поэтому в средах со сложными условиями распространения желательно использовать другие критерии эффективности, более общие, чем $q_{\text{пор}}^2$.

Для того, чтобы понять, каким должен быть такой критерий, рассмотрим рис. 2, в, где показано фактическое отношение сигнал/помеха по выходу обработки q^2 (вычисления выполнены по формуле (31)). Здесь довольно четко видны участки, на которых отношение сигнал/помеха имеет существенные подъемы над средним уровнем. Таким образом, с точки зрения использования общей энергии сигнала критерий q^2 обладает преимуществом перед критерием $q_{\text{пор}}^2$. Однако, если сравнивать этот график с рис. 2, б, ясно, что некоторые важные физические нюансы своего отображения

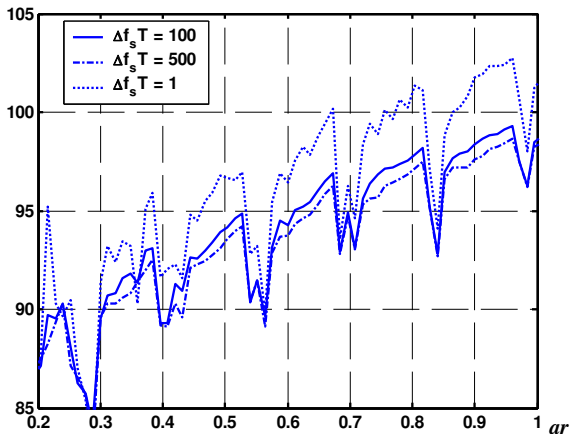


Рис. 3. Эффективность оптимального приема (пороговое отношение сигнал/помеха на источнике) для различных значений сложности сигнала

при таком оценивании не нашли. В частности, параметр q^2 лишь очень незначительно зависит от статистической шероховатости поверхности.

Проведенный анализ подсказывает целесообразность использования такого критерия эффективности, который объединял бы положительные черты показателей q^2 и $q_{\text{пор}}^2$. Обозначим отношение общей энергии сигнала E_s , излучаемого источником, к общей спектральной мощности помех в точке приема через

$$\mu_0 = \frac{E_s}{g_w + g_z(\omega_0)}. \quad (45)$$

Назовем этот параметр отношением сигнал/помеха на источнике. Пусть при определенном значении μ_0 некоторая приемная система обеспечивает заданные вероятности правильного обнаружения сигнала β_0 и ложных тревог α_0 . Будем называть такое значение параметра (45) пороговым отношением сигнал/помеха на источнике $\mu_0^{\text{пор}} = \mu_0^{\text{пор}}(\alpha_0, \beta_0)$. Расчет величины $\mu_0^{\text{пор}}$ может быть выполнен на основании следующих соображений. Пусть q_0^2 – фактическое отношение сигнал/помеха по выходу линейной обработки, которое соответствует какому-то стандартному отношению сигнал/помеха у источника μ_0 . Анализ формулы (31) показывает, что значение q_0^2 связано с μ_0 пропорциональной зависимостью. Следовательно, пороговое отношение сигнал/помеха у источника может быть найдено как

$$\mu_0^{\text{пор}} = \mu_0 \frac{q_{\text{пор}}^2}{q_0^2}. \quad (46)$$

Результаты вычислений по формуле (46) пред-

ставлены на рис. 2, г. Этот график позволяет сделать выводы, существенно отличающиеся от тех, которые можно было бы сделать на основании рис. 2, б. Действительно, те дистанции между источником и приемной антенной, которые ранее можно было определить как неблагоприятные, согласно рис. 2, г оказываются, наоборот, наиболее желательными. Это обстоятельство можно объяснить следующим образом. На определенных дистанциях параметры лучевых составляющих сигнала таковы, что приемная система плохо их разделяет, что и приводит к ухудшению статистики флюктуаций сигнала по выходу парциальных каналов. Однако, как видно из рис. 2, в, общая энергетика сигнала используется при этом более полно. Как результат, по общему критерию $\mu_0^{\text{пор}}$ ситуация на рассматриваемых дистанциях оказывается более благоприятной, чем там, где статистика флюктуаций лучше. Отсюда, конечно, не следует вывод, что хорошее разделение лучей нежелательно. В конечном итоге, успех определяется возможностью сбора энергии сигнала по всем лучевым траекториям. Поэтому, если с этой задачей в достаточной мере не справляется оптимальная обработка, то никакой другой алгоритм приема делу не поможет. Просто в таких случаях можно констатировать, что при данных параметрах приемной системы и для данного взаимного расположения источника и приемника эффективный прием невозможен. Следовательно, необходимо или изменить расположение приемной системы, или выбрать другие значения ее параметров (например, геометрии антенны, вида сигнала, и т. п.).

Некоторые возможности относительно улучшения эффективности приема именно таким путем иллюстрирует рис. 3, где показаны значения параметра $\mu_0^{\text{пор}}$ оптимальной обработки для простого тонального сигнала, сложного сигнала с коэффициентом сложности 100 и сложного сигнала с коэффициентом сложности 500. Отсюда можно сделать вывод о том, что увеличение сложности сигнала положительно влияет на потенциальную эффективность приема. Так, разность в значениях параметра $\mu_0^{\text{пор}}$ между простым и сложными сигналами достигает от 2 до 4 дБ. Следует отметить, что, как известно, в каналах с одноходовым распространением эффективность обнаружения сигнала на фоне собственных шумов от вида сигнала не зависит, а определяется лишь его общей энергией [9]. Поэтому в данном случае влияние параметров модуляции сигнала на эффективность приема можно объяснить различием в способности разделения лучевых траекторий по их задержкам, т. е. за счет обострения функции неопределенности

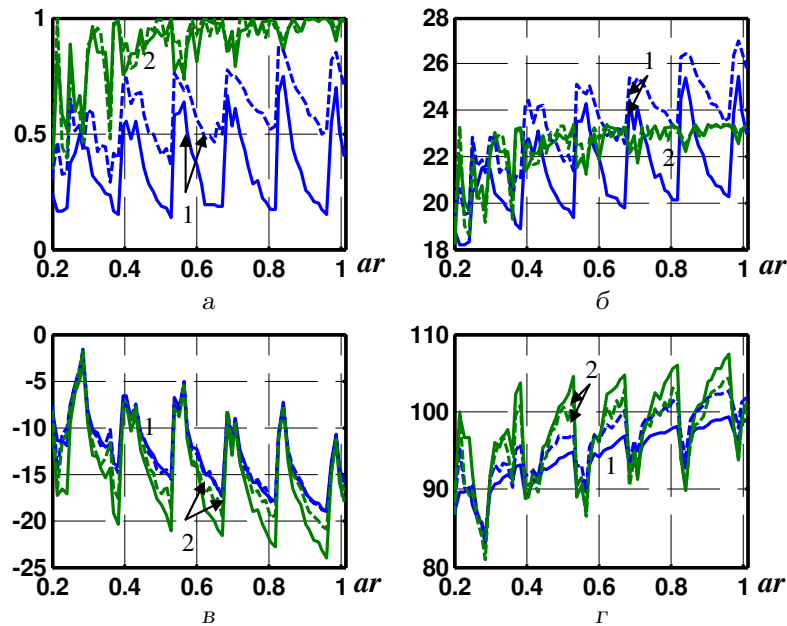


Рис. 4. Эффективность приема асимптотически оптимальной и одноканальной обработки:
 а – индекс “мерцаний” I_M ; б – пороговое отношение сигнал/помеха, $q_{\text{пор}}^2$, дБ;
 в – фактическое отношение сигнал/помеха, q^2 , дБ; г – пороговое отношение сигнал/помеха на источнике, дБ;
 сплошные – ЛЧМ-сигнал, штриховые – тональный сигнал;
 1 – оптимальная обработка для сильных сигналов, 2 – одноканальная система
 с перенастройкой под прием наиболее интенсивной лучевой компоненты

сигнала (44). В то же время, возможности этого пути повышения эффективности приема довольно ограничены. Так, увеличение коэффициента сложности сигнала со 100 до 500 дает выигрыш по $\mu_0^{\text{пор}}$ менее, чем на 1 дБ.

В завершение рассмотрения этой модели акустического канала приведем результаты сравнительного анализа эффективности приема в системах с оптимальной и квазиоптимальной обработкой. Распространенным вариантом квазиоптимального приема является использование лишь одного канала линейной обработки, параметры которого перенастраиваются в соответствии с прогнозом параметров ожидаемого сигнала. В среде с многолучевым распространением к ним относятся направление прихода и задержка во времени лучевых составляющих сигнала. Чаще всего приемник настраивается под параметры наиболее энергетически значимых лучей. Альтернативой указанному варианту приема является многоканальная система, охватывающая диапазон возможных параметров лучевых составляющих. Конечное же решение принимается по тому из каналов, где наблюдается максимальный эффект (так называемая схема отбора по максимуму – СОМ). Система при-

нятия решения по технологии СОМ не нуждается в акустическом прогнозе среды передачи, но уступает по эффективности одноканальной приемной системе, которая использует данные прогноза. Поэтому в дальнейшем остановимся именно на одноканальном варианте квазиоптимального приема.

Расчет эффективности одноканальной системы можно осуществить по тем же формулам, что и ранее. При этом следует принять $\tilde{L}=1$ и внести соответствующие коррективы в вычисление матрицы (20), которая в данном случае становится матрицей-строкой. На рис. 4 представлены те же этапы вычислений, что и на рис. 2, но уже для двух методов обработки. Кривые 1 соответствуют оптимальной обработке для сильных сигналов, а кривые 2 – одноканальной системе с перенастройкой параметров под прием наиболее интенсивной лучевой компоненты поля сигнала. Расчет выполнялся для ЛЧМ-сигнала с коэффициентом сложности 100 и простого тонального сигнала. На рис. 4, а представлены зависимости индекса “мерцаний” сигнала. Для оптимальной обработки они аналогичны соответствующим кривым на рис. 2, а. Что же касается одноканальной обработки, то для нее значения I_M для большинства дистанций близки

к единице. Таким образом, в этом случае имеем практически рэлеевские флюктуации сигнала по выходу приемника.

Пороговые отношения сигнал/помеха по выходу обработки представлены на рис. 4, б. Эти зависимости определяются индексом “мерцаний” и числом степеней свободы распределения сигнала (количеством каналов приема). В случае одноканальной обработки значения $q_{\text{пор}}^2$ практически совпадают с теми, которые соответствуют рэлеевскому каналу [9]. При заданных вероятностях β_0 и α_0 этот уровень составляет

$$q_{\text{пор}}^2 = 2 \left(\frac{\ln \alpha_0}{\ln D_0} - 1 \right) = 2 \left(\frac{\ln 10^{-5}}{\ln 0.9} - 1 \right) = 216.5 \approx 23.36 \text{ дБ.}$$

Интересно отметить, что в случае квазиоптимального приема величины $q_{\text{пор}}^2$ для некоторых дистанций оказываются даже меньше, чем при оптимальной обработке. Объяснение этого довольно очевидно: там, где индекс “мерцаний” сигнала на выходе оптимальной обработки большой, определяющую роль играет количество степеней свободы, а для оптимальной обработки их значительно больше 1. Поэтому распределение сигнала по выходу в этом случае оказывается менее благоприятным, чем при одноканальной обработке. Это еще раз подтверждает ограниченность применимости критерия $q_{\text{пор}}^2$ для анализа эффективности приема в среде со сложными условиями распространения сигнала.

Если же кроме значений $q_{\text{пор}}^2$ вычислить еще и фактическое отношение сигнал/помеха по выходу обработки q^2 (см. рис. 4, в), а затем по формуле (46) найти пороговое отношение сигнал/помеха возле источника (см. рис. 4, г), то все становится на свои места – приемная система с оптимальной обработкой значительно превосходит одноканальный тракт, причем выигрыш для ЛЧМ-сигнала достигает 10 дБ. При использовании же тонального сигнала различие в эффективности оптимальной и квазиоптимальной обработки довольно незначительно.

В заключение заметим, что для некоторых дистанций одноканальная обработка оказывается немного лучшей, чем оптимальная, даже по критерию $\mu_0^{\text{пор}}$. Это объясняется следующим образом. Как уже неоднократно отмечалось, мы рассматриваем не строго оптимальную, а лишь асимптотически оптимальную для сильных сигналов обработку. Поэтому для недостаточно интенсивных сигналов возможны некоторые потери, по сравнению с альтернативными вариантами приема (что и на-

блюдается на рис. 4, г). Еще одной причиной подобных явлений могут быть погрешности примененной методики анализа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ эффективности приема сигналов в средах со сложными условиями его распространения наталкивается на значительные математические трудности, которые в ряде ситуаций могут быть преодолены на основе предложенного в работе метода. При этом используются асимптотические распределения неотрицательных случайных величин в области экстремальных значений аргумента. Исходными для выполнения расчетов данными являются параметры Накагами, которые для широкого класса алгоритмов обработки могут быть представлены через отношение сигнал/помеха и индекс “мерцаний” сигнала по выходу обработки. Для этих параметров получены выражения, дающие ориентиры в отношении содержания априорной и экспериментальной информации о характеристиках акустических полей сигналов, необходимой для решения задач анализа эффективности приема. На стандартных моделях каналов показано, что метод обеспечивает достаточно высокую для прикладных задач точность вычислений. Она тем выше, чем больше отношение $M_F\Pi/\Omega_F$. Возможности метода проиллюстрированы на примере анализа эффективности приема в многолучевом акустическом канале с приповерхностным распространением звука. В частности, показана несостоятельность традиционной методики оценки эффективности, базирующаяся на пороговом отношении сигнал/помеха по выходу обработки. В этой связи предложено оценивать качество приема по критерию порогового отношения сигнал/помеха, приведенному к точке излучения.

1. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Том 1.– М.: Сов. радио, 1972.– 744 с.
2. Ильичев В. И., Калужный А. Я., Красный Л. Г., Лапий В. Ю. Статистическая теория обнаружения гидроакустических сигналов.– М.: Наука, 1992.– 415 с.
3. Чернов Л. А. Волны в случайно-неоднородных средах.– М.: Наука, 1975.– 165 с.
4. Nakagami M. The M-distribution // Statistical methods in radio wave propagation.– New York: Pergamon Press, 1960.– P. 3–22.
5. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Часть 1.– М.: Наука, 1976.– 496 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников.– М.: Наука, 1970.– 720 с.
7. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Том 1.– М.: Сов. радио, 1974.– 552 с.

8. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ.– М.: Мир, 1989.– 655 с.
9. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех.– М.: Сов. радио, 1960.– 447 с.
10. Акустика океана / Под ред. Л. М. Бреховских.– М.: Наука, 1974.– 695 с.
11. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.– М.: Наука, 1973.– 503 с.
12. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности.– М.: Наука, 1972.– 424 с.
13. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы.– М.: Сов. радио, 1971.– 567 с.