

УДК 534.231

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ И ИМПУЛЬСНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ. ВОЛНОВОД С АБСОЛЮТНО ОТРАЖАЮЩИМИ ГРАНИЦАМИ

О. Р. ЛАСТОВЕНКО, В. А. ЛИСЮТИН, А. А. ЯРОШЕНКО

*Севастопольский национальный технический университет**Получено 01.06.2007*

Слоисто-неоднородные гидроакустические волноводы рассматриваются как частотные фильтры, описываемые передаточной и импульсной характеристиками. Для волноводов, поле в которых можно представить как сумму нормальных волн, предложена методика моделирования импульсной характеристики на основе обратного дискретного преобразования Фурье. Импульсная характеристика рассматривается как инструмент для исследования дисперсионных искажений сигналов во временной области. Моделируются импульсные характеристики волноводов с абсолютно отражающими границами.

Шарувато-неоднорідні гідроакустичні хвилеводи розглядаються як частотні фільтри, які описуються передаточною та імпульсною характеристиками. Для хвилеводів, поле в яких можна представити як суму нормальних хвиль, запропоновано методику моделювання імпульсної характеристики на базі оберненого дискретного перетворення Фур'є. Імпульсна характеристика розглядається як інструмент для дослідження дисперсійних спотворень сигналів у часовій області. Моделюються імпульсні характеристики хвилеводів з абсолютно відбиваючими межами.

Layered-inhomogeneous hydroacoustic waveguides are considered in the paper as the frequency filters described by a transfer function and pulse response. The technique for modeling the pulse response based on the discrete inverse Fourier transform is offered for the waveguides which field may be represented as a sum of normal modes. The pulse response is considered as a tool for studying the dispersion distortions of the signals in the time domain. Pulse responses of the waveguides with perfectly reflecting boundaries are modeled.

## ВВЕДЕНИЕ

Благодаря синтезу физики, математики и информатики, в настоящее время сформировалось новое направление – вычислительная акустика. Ее инструментом являются компьютеры и современные пакеты программирования численных методов. Одна из интересных проблем, которая может быть исследована путем вычислительного моделирования – накопление дисперсионных искажений при распространении сигналов в гидроакустических волноводах.

Прежде, чем перейти к обсуждению предмета данного исследования, следует обратить внимание на три важных отличия математического моделирования от численного решения уравнений, описывающих поставленную задачу.

- Численное решение изначально и строго ограничено допущениями физической и математической модели. Моделирование же, предполагающее последовательную имитацию физических явлений разнообразными средствами математики, более гибко: оно позволяет корректировать промежуточные результаты, учитывать новые воздействия и, в конечном итоге,

ге, уточняют исходную модель. Численное моделирование иногда может показать результат, объясняющий эффект, наблюдаемый в реальном эксперименте, но “не существующий” при решении в приближениях аналитической математики, что дает основания говорить о математическом эксперименте.

- Моделирование дает возможность применять методы не только аналитической и численной, но и дискретной математики, а также все доступные библиотеки вычислительных алгоритмов и визуализации результатов (Simulink, Toolbox в пакете MATLAB).
- Обычная форма представления результата при численном решении – колонки цифр или графики. Моделирование и математический эксперимент непременно должен допускать возможность симуляции на экране компьютера сигнала физического прибора (например, гидрофона).

Для входного сигнала гидроакустический волновод представляет собой линейный пространственно-временной и частотный фильтр

с распределенными по трассе параметрами [1, 2], влияние которого задается с помощью передаточной функции. Последняя задается оператором, преобразующим входное воздействие в выходную реакцию [2–5].

В акустике правильнее говорить о спектральной передаточной функции  $H$ , зависящей от частоты  $\omega$  и обобщенных координат излучателя  $\vec{r}_1$  и приемника  $\vec{r}_2$ . При излучении сигнала со спектром  $S_1(\omega)$ , спектр принятого сигнала имеет вид  $S_2(\omega) = S_1(\omega)H(\Delta\vec{r}_{12}, \omega)$  [2–5]. Тогда вещественную акустическую спектральную передаточную функцию можно определить как:

$$H(\Delta\vec{r}_{12}, \omega) = \frac{S_2(\omega)}{S_1(\omega)}. \quad (1)$$

При формализованном представлении сигналов комплексными числами, вещественной спектральной передаточной функции должна соответствовать ее математическая модель – комплексная частотная характеристика (КЧХ) [5].

Моделирование КЧХ гидроакустических волноводов применяется для решения ряда задач акустики океана. Так, по известной КЧХ восстанавливают импульсную характеристику (ИХ) волновода. Осуществляя свертку последней с сигналом, можно наблюдать его реализации и накопление дисперсионных искажений, особенно заметных для волноводов малой глубины [6, 7]. Сравнение модельных импульсных и амплитудно-частотных характеристик с экспериментальными позволяет уточнить физические параметры среды [8–13].

Известные измерения частотных характеристик гидроакустических каналов проводились с применением взрывных либо короткоимпульсных источников [1, 9, 14–16]. Подводный взрыв можно приближенно рассматривать как акустический дельта-импульс, а сигнал, приходящий в гидрофон – как отклик гидроакустического канала. Фурье-преобразование сигнала гидрофона соответствует амплитудно-частотной характеристике (АЧХ) канала. Однако многократные приходы сигнала-отклика затрудняют ее восстановление и не позволяют анализировать фазо-частотную характеристику [14].

Теоретически задача о распространении сигнала через канал с известным законом дисперсии решается с помощью интеграла Фурье [1, 8, 9, 15, 17–20]. Для широкополосного сигнала находят приближенное решение, применяя метод стационарной фазы, считая известной групповую скорость  $u(\omega)$  распространения волны с частотой  $\omega$ . Такое решение естественно назвать “кинематическим”, поскольку оно предполагает мгновенное вступление

частоты  $\omega$  через интервал времени, определяемый формулой  $t(\omega) = r/u(\omega)$ . Затруднения в применении метода стационарной фазы возникают при рассмотрении горизонтально-слоистых волноводов, для которых зависимости групповой скорости от частоты не выражаются в аналитическом виде и могут иметь несколько экстремумов.

Восстановление верной реализации сигнала с помощью преобразований Фурье становится в принципе невозможным при быстрых изменениях его спектрального состава, возникающих при некоторых видах модуляции [5].

Инструментом, дающим возможность анализировать прохождение сигнала с любым видом модуляции через линейный канал связи, не выходя за пределы временной области, является импульсная характеристика  $h(t)$ . Если она известна, то дальнейшие этапы решения задачи сводятся к полностью формализованным операциям [5, 21].

Основная цель работы заключается в следующем:

- обосновать возможность моделирования импульсных характеристик слоисто-неоднородных волноводов, для которых применимо представление акустического поля в виде суммы нормальных волн, средствами вычислительной математики на основе дискретного преобразования Фурье;
- оценить корректность метода путем сравнения результатов моделирования с результатом точного решения, полученного для частного случая закона дисперсии;
- провести ряд математических экспериментов по моделированию и исследованию импульсных характеристик гидроакустических волноводов, переходных процессов при включении и выключении тонального источника, процесса возникновения и накопления фазовых искажений при распространении узкополосного сигнала, а также откликов акустического канала на модулированные сигналы.

## 1. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

### 1.1. Представление комплексной частотной характеристики волновода

Звуковое поле тонального точечного источника в осесимметричном волноводе с плоскопараллельными границами может быть записано в виде су-

перпозиции нормальных волн [8]:

$$H(r, z, \omega)e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} \sum_{l=1}^{\infty} H_l(r, z, i\vec{k}_l). \quad (2)$$

Здесь  $H_l(r, z, i\vec{k}_l)$ ,  $\vec{k}_l$  – поле и волновой вектор отдельной моды с номером  $l$  соответственно;  $r$  – проекция вектора  $\Delta\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  на горизонталь;  $z$  – положительная вертикальная координата, отсчитываемая от поверхности (глубина).

Чтобы получить результирующее поле  $s_2(t)$  точечного источника сигнала  $s_1(t)$  со стационарным спектром  $S_1(\omega)$ , надо выражение (2) умножить на функцию спектра и проинтегрировать по частоте  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  [8]:

$$s_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) \sum_{l=1}^{\infty} H_l(r, z, i\vec{k}_l) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3)$$

Из формулы (3) видно, что для спектральной плотности сигнала в точке приема справедливо

$$S_2(\omega) = S_1(\omega) \sum_{l=1}^{\infty} H_l(r, z, i\vec{k}_l).$$

Сравнивая это соотношение с определением (1), получаем комплексную частотную характеристику волновода:

$$H(r, z, \omega) = \sum_{l=1}^{\infty} H_l(r, z, i\vec{k}_l), \quad (4)$$

где  $H_l(r, z, i\vec{k}_l)$  – КЧХ, соответствующая отдельной нормальной волне.

Исключив непрерывный спектр затухающих мод, КЧХ волновода представим в виде

$$\begin{aligned} H(r, z, \omega) &= \sum_{l=1}^{\infty} H_l(r, z, i\vec{k}_l) \sim \\ &\sim \sum_{l=1}^{\infty} A_l \Psi_l(z, b_l(\omega)) H_0^{(1)}(\xi_l(\omega)r), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $A_l$  – постоянная;  $\Psi_l(z, b_l(\omega))$  – собственные функции волновода;  $\xi_l(\omega)$  и  $b_l(\omega)$  – горизонтальное и вертикальное волновые числа (компоненты волнового вектора) соответственно;  $H_0^{(1)}$  – функция Ханкеля первого рода. Символ пропорциональности использован здесь вследствие того, что отброшены все известные постоянные, не зависящие от частоты [8].

В соответствии с формулой (5), фильтр, моделирующий слоистый гидроакустический волновод, должен состоять из бесконечного числа параллельно включенных “модовых” фильтров с последующим сумматором. “Модовый” фильтр должен иметь КЧХ, соответствующую амплитудной и фазовой частотным характеристикам отдельных нормальных волн:

$$H_l(r, z, i\vec{k}_l) = A_l \Psi_l(z, b_l(\omega)) H_0^{(1)}(\xi_l(\omega)r). \quad (6)$$

Непрерывная комплексная частотная характеристика “модового” фильтра является Фурье-образом его непрерывной импульсной характеристики.

## 1.2. Влияние потерь при распространении акустических волн на импульсную характеристику

В мелком море существенны два детерминированных процесса, приводящие к уменьшению интенсивности звука – утечка акустической энергии в дно (поглощение) и затухание за счет диссипативных процессов в морской воде [1, 7, 12, 22, 23]. Они представляют собой потери с законом изменения в зависимости от расстояния, отличным от закона, характерного для геометрического расхождения фронта волны.

С учетом поглощения и затухания амплитуда звуковой волны приобретает экспоненциально спадающий с расстоянием характер  $e^{-\beta r}$ , где величину  $\beta$  можно назвать показателем потерь. Показатель потерь состоит из двух слагаемых:

$$\beta = \beta_l + \beta_\omega(\omega), \quad (7)$$

где  $\beta_l$  – модальный показатель поглощения;  $\beta_\omega(\omega)$  – частотно-зависимый показатель затухания, возникающего в основном за счет релаксационных процессов в морской воде [22, 23]. В слоистых гидроакустических волноводах на частотах до 500 Гц справедливо  $\beta_l \gg \beta_\omega(\omega)$  и вторым слагаемым в равенстве (7) обычно пренебрегают. Важнейшая особенность показателя затухания – его пропорционально-частотная зависимость (возрастание с частотой). Это позволяет физически обоснованно ограничить бесконечную сумму (5) числом слагаемых, согласованным с эффективной шириной спектра сигнала.

Уточненное с учетом потерь выражение (6) запишем так:

$$\begin{aligned} H_l(r, z, i\vec{k}_l) &= A_l \Psi_l(z, b_l(\omega)) \times \\ &\times H_0^{(1)}(\xi_l(\omega)r) e^{-(\beta_l + \beta_\omega)r}. \end{aligned} \quad (8)$$

### 1.3. О моделировании распространения сигналов через гидроакустический волновод

В этом коротком параграфе наметим пошаговую схему решения задачи восстановления отклика канала, путем моделирования “естественного” процесса распространения модулированного сигнала. Для этого необходимо:

- 1) дискретизировать КЧХ;
- 2) получить дискретную импульсную характеристику, проведя обратное дискретное преобразование Фурье;
- 3) дискретизировать математическую модель сигнала;
- 4) осуществить свертку (конволюцию) отсчетов импульсной характеристики и сигнала.

### 1.4. Дискретизация Фурье-образов. Общие соображения

Импульсная характеристика, как и физически наблюдаемый сигнал, должна быть вещественной. Однако ее Фурье-образ (8) определен только для положительных частот выше критической. Что же касается Фурье-образа вещественной функции, то он должен быть определен для всех частот – положительных и отрицательных. Используя свойство эрмитовой симметрии образа для вещественного оригинала, КЧХ для отрицательных частот доопределим следующим отображением:  $|H(f)| = |H(-f)|$ ,  $\varphi(f) = -\varphi(-f)$ , что эквивалентно соответствию [21]

$$h(t) \leftrightarrow \operatorname{Re}(H(f)) + i \operatorname{Im}(H(f)), \quad (9)$$

$$h(-t) \leftrightarrow \operatorname{Re}(H(-f)) + i \operatorname{Im}(H(-f)).$$

Здесь и ниже  $f$  – частота, а символом  $\leftrightarrow$  обозначено прямо-обратное соответствие Фурье-оригинала и изображения.

С точки зрения компьютерного моделирования поступим следующим образом. В результате обратного преобразования Фурье отсчетов положительных частот КЧХ с помощью команды `ifft` пакета MATLAB получим такой комплексный аналитический сигнал  $h[i, t]$ , соответствующий дискретной ИХ  $h[t]$ , что  $\operatorname{Re}(h[i, t]) = h[t]$ . Здесь квадратные скобки символизируют решетчатую функцию дискретного времени. Заметим, что Фурье-образ  $H(f)$  аналитического сигнала  $h(i, t)$  тождественно равен нулю для частот  $f < 0$  и  $2H(f)$  для  $f \geq 0$  [5, 21, 24].

Рассмотрим вещественный сигнал импульсной характеристики  $h(t)$ , но с ограниченной длительностью  $T/2$ : вне интервала  $0 < t < T/2$  справедливо

$h(t) \equiv 0$ . Пусть существует его Фурье-образ  $H(f)$ , записанный в виде (8). Вычисление  $H(f)$  проводится отдельно для действительной и мнимой частей, поэтому теорема о дискретизации должна быть применена отдельно к  $\operatorname{Re}\{H(f)\}$  и  $\operatorname{Im}\{H(f)\}$ .

Из системы (9) с очевидностью следуют два соотношения:

$$\operatorname{Re}\{H(f)\} \leftrightarrow \frac{\{h(t) + h(-t)\}}{2},$$

$$\operatorname{Im}\{H(f)\} \leftrightarrow \frac{\{h(t) - h(-t)\}}{2}.$$

Они показывают, что оригинал Фурье для Фурье-образов  $\operatorname{Re}\{H(f)\}$  и  $\operatorname{Im}\{H(f)\}$  занимает интервал времени  $-T/2 < t < T/2$ . Тогда, согласно теореме Котельникова–Шеннона, шаг дискретизации частоты  $\Delta f$  функции  $H(f)$  должен удовлетворять неравенству  $\Delta f \leq 2/T$ .

Спектр Фурье-образа импульсной характеристики бесконечен. С помощью фильтра низких частот ограничим анализируемую часть спектра некоторой максимальной частотой  $f_m$ . Дискретизируем Фурье-образ ИХ в  $N$  точках частотной оси с равномерным шагом  $\Delta f$ . Тогда максимальная частота спектра и частота дискретизации равны соответственно

$$f_m = N\Delta f \quad \text{и} \quad f_d = 2N\Delta f.$$

Отсчеты оригинала могут быть восстановлены в  $N$  точках временной оси с интервалом  $\tau = T/(2N)$ . Тогда максимальное время наблюдения импульсной характеристики составит

$$T = 2N\tau. \quad (10)$$

### 1.5. Дискретизация Фурье-образа импульсной характеристики

Комплексная частотная характеристика (6) или (8) “модового” фильтра, являясь Фурье-образом импульсной характеристики, состоит из двух сомножителей – медленно и быстро изменяющегося с частотой. Безошибочная дискретизация действительной и мнимой частей сильно осциллирующей функции Ханкеля определяет верность формирования фазочастотной характеристики фильтра. Оценим необходимый шаг дискретизации частоты  $\Delta f$ . Известно, что период осцилляции функции Ханкеля составляет  $2\pi$ . Согласно теоремам о дискретизации, отсчеты аргумента должны следовать не реже, чем через  $\pi/\alpha$ ,

где  $\alpha \geq 1$ . Тогда  $\Delta(\xi_l(\omega)r) = \pi/\alpha$ . Раскрыв приращение, заменим циклическую частоту на линейную:

$$2\pi \frac{d\xi_l}{d\omega} \Delta f r = \frac{\pi}{\alpha}.$$

Учитывая, что  $d\xi_l/d\omega = 1/u_l$ , где  $u_l$  – групповая скорость нормальной волны, получим оценочную формулу для шага дискретизации частоты:

$$\Delta f = \frac{1}{2\alpha} \frac{u_l}{r}. \quad (11)$$

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ

### 2.1. Моделирование импульсных характеристик отдельных мод для волновода с абсолютно отражающими границами

Ограничиваясь только распространяющимися модами и пренебрегая затуханием, комплексную частотную характеристику запишем на основании (6) в виде

$$H(r, z, \omega) = \sum_{l=1}^{\infty} \sin(b_l z_0) \sin(b_l z) H_0^{(1)}(\xi_l r), \quad (12)$$

где  $z$  и  $z_0$  – координаты приемника и источника;  $b_l = \pi(l-1/2)/h$  и  $\xi_l = \sqrt{(2\pi f/c)^2 - b_l^2}$  – вертикальное и горизонтальное волновые числа отдельной моды для идеального волновода соответственно [8],  $l=1, 2, 3 \dots$

Для дальнейших расчетов выберем следующие условные параметры модельного волновода: глубину  $h=50$  м, скорость звука  $c=1480$  м/с.

Оценим шаг дискретизации частоты, подставив в формулу (11) величину групповой скорости  $u_l = c\sqrt{1-(f_l/f)^2}$ , где  $f_l = c(l-0.5)/(2h)$  – критическая частота нормальной волны с номером  $l$  [8]:

$$\Delta f = \frac{1}{2\alpha} \frac{c}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{f_l}{f}\right)^2}.$$

Задавая расстоянием  $r=1480$  м,  $\alpha=1$ , числом отсчетов  $N=2^{16}$ , максимальным номером моды  $l=10$  и округляя критическую частоту до целого, получаем оценку  $\Delta f \leq 0.1$  Гц.

Увеличение расстояния приведет не только к росту аргумента функции Ханкеля, но и к более позднему вступлению сигнала импульсной характеристики, вплоть до ситуации, когда “кинематический” момент вступления  $t_0=r/c$  окажется больше, чем максимальное время наблюдения (10). Таким образом, наша оценка прогнозирует неудовлетворительный результат моделирования при увеличении расстояния.

Для исключения временного интервала до момента вступления воспользуемся свойством смещения оригинала во времени [5] на величину  $t_0=r/c$ . Тогда Фурье-образ ИХ нормальной волны будет записан так:

$$H_l(r, z, i\vec{k}_l) = \sin(b_l z_0) \sin(b_l z) H_0^{(1)}(\xi_l r) e^{-i\omega t_0}. \quad (13)$$

Смещение оригинала во времени уменьшит аргумент функции Ханкеля, быстроту его изменения и исключит “нулевые” отсчеты импульсной характеристики, соответствующие времени “до вступления”. Отметим, что изменения будут только в фазо-частотной характеристике, не отразившись на амплитудно-частотной.

Для оценки необходимого шага дискретизации частоты  $\Delta f^*$  образа при смещенном во времени оригинале заменим функцию Ханкеля первым членом ее асимптотического разложения [8] и запишем (13) иначе:

$$H_l(r, z, i\vec{k}_l) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\xi_l r}} \sin(b_l z_0) \sin(b_l z) \times e^{i(\xi_l r - \omega t_0 - \pi/4)}. \quad (14)$$

Приращение аргумента при дискретизации не должно превышать половину периода осцилляции:  $\Delta(\xi_l(\omega)r - \omega t_0) = \pi/\alpha$ . Отсюда

$$\Delta f^* = \frac{1}{2\alpha r} \left( \frac{1}{u_l} - \frac{1}{c} \right)^{-1}. \quad (15)$$

При частотах, близких к критической (когда  $u_l \rightarrow 0$ ), формула (15) совпадает с соотношением (11) и приведенные выше оценки для шага дискретизации остаются справедливыми. При удалении частоты от критической, когда горизонтальное волновое число  $\xi_l$  почти пропорционально  $\omega$  ( $d\xi_l/d\omega = 1/u_l \rightarrow 1/c$ ), аргумент Фурье-образа (14) почти не изменяется, и шаг дискретизации Фурье-образа  $\Delta f^*$  стремится к бесконечности. Следовательно, поскольку вступление ИХ формируется за счет высокочастотной части спектра, а приход самых низких частот происходит значительно позднее, за пределами временного окна анализа, выгоднее значительно увеличить шаг дискретизации частоты и расширить анализируемую часть спектра вверх.

Окончательно процедура моделирования импульсной характеристики нормальной волны идеального волновода сводится к формированию сле-

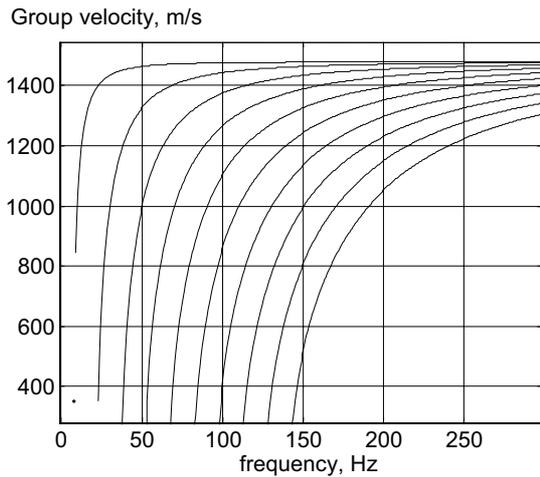


Рис. 1. Частотные зависимости групповой скорости

дующего ряда отсчетов:

$$h_l[n] = \frac{1}{N} \sin(b_l z) \sin(b_l z_0) \times \sum_{k=0}^{N-1} H_l[k] e^{i2\pi kn/N}. \quad (16)$$

Здесь  $h_l[n]$  –  $N$ -точечная последовательность данных, соответствующих временным отсчетам ИХ;  $H_l[k] = H_0^{(1)}[\xi_l[k]r]$  –  $N$ -точечная последовательность спектральных отсчетов.

Импульсная характеристика волновода представляется как сумма соответствующих характеристик нормальных волн:

$$h[n] = \sum_{l=1}^{\infty} h_l[n]. \quad (17)$$

На рис. 1 показаны частотные зависимости групповой скорости распространения нормальных волн с первой по десятую (в направлении слева направо), а на рис. 2 – импульсные характеристики первой и десятой нормальных волн для расстояний между излучателем и приемником 1000 и 4000 м соответственно. Эти данные получены в результате выполнения процедуры (16) в среде MATLAB.

Импульсные характеристики имеют классический вид волнового процесса с непрерывно изменяющейся частотой. Вступление начинается с прихода самых высоких частот, для которых групповая скорость – наибольшая и стремится к скорости звука в воде. Постепенно приходят все более

низкие частоты, с меньшими групповыми скоростями. Это соответствует продвижению по кривой групповой скорости на рис. 1 справа налево и сверху вниз. Если время стремится к бесконечности, частота приближается к критической, что соответствует нулевой групповой скорости. Быстрота изменения частоты с течением времени определяется производной от групповой скорости.

### 2.2. Проверка точности моделирования. Импульсная характеристика волновода с абсолютно отражающими границами

Для закона дисперсии идеального волновода возможно получить аналитическое решение для импульсной характеристики отдельной моды [1]. Это позволяет оценить точность процедуры моделирования путем сравнения двух результатов.

Запишем импульсное поле давления нормальной волны в виде

$$P_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi) e^{i(\xi r - \omega t)} d\xi,$$

где  $S(\xi)$  – Фурье-образ импульсного сигнала. Положим  $S(\xi) = (2\pi)^{-1}$  (при этом в момент  $t=0$  импульс представляет дельта-функцию Дирака) и возьмем вещественную часть интеграла. Тогда

$$h_l(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\xi r - \omega t) d\xi. \quad (18)$$

Так как  $\omega = c\sqrt{\xi^2 + b_l^2}$  и подынтегральное выражение четно, выражение (18) можно представить следующим образом:

$$h_l(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\xi r) \cos(ct\sqrt{\xi^2 + b_l^2}) d\xi. \quad (19)$$

Интеграл (19) может быть найден в квадратурах:

$$h(t) = \begin{cases} -\frac{b_l}{2\sqrt{1-(t_0/t)^2}} J_1\left(\frac{cb_l\sqrt{t^2-t_0^2}}{t}\right) & \text{при } t > t_0, \\ 0 & \text{при } t < t_0. \end{cases} \quad (20)$$

Здесь  $J_1$  – функция Бесселя первого рода.

Импульсная характеристика волновода является суммой решений вида (20) с учетом коэффициентов возбуждения нормальных волн и глубины приемника:

$$h(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sin(b_l z_0) \sin(b_l z) h_l(t). \quad (21)$$

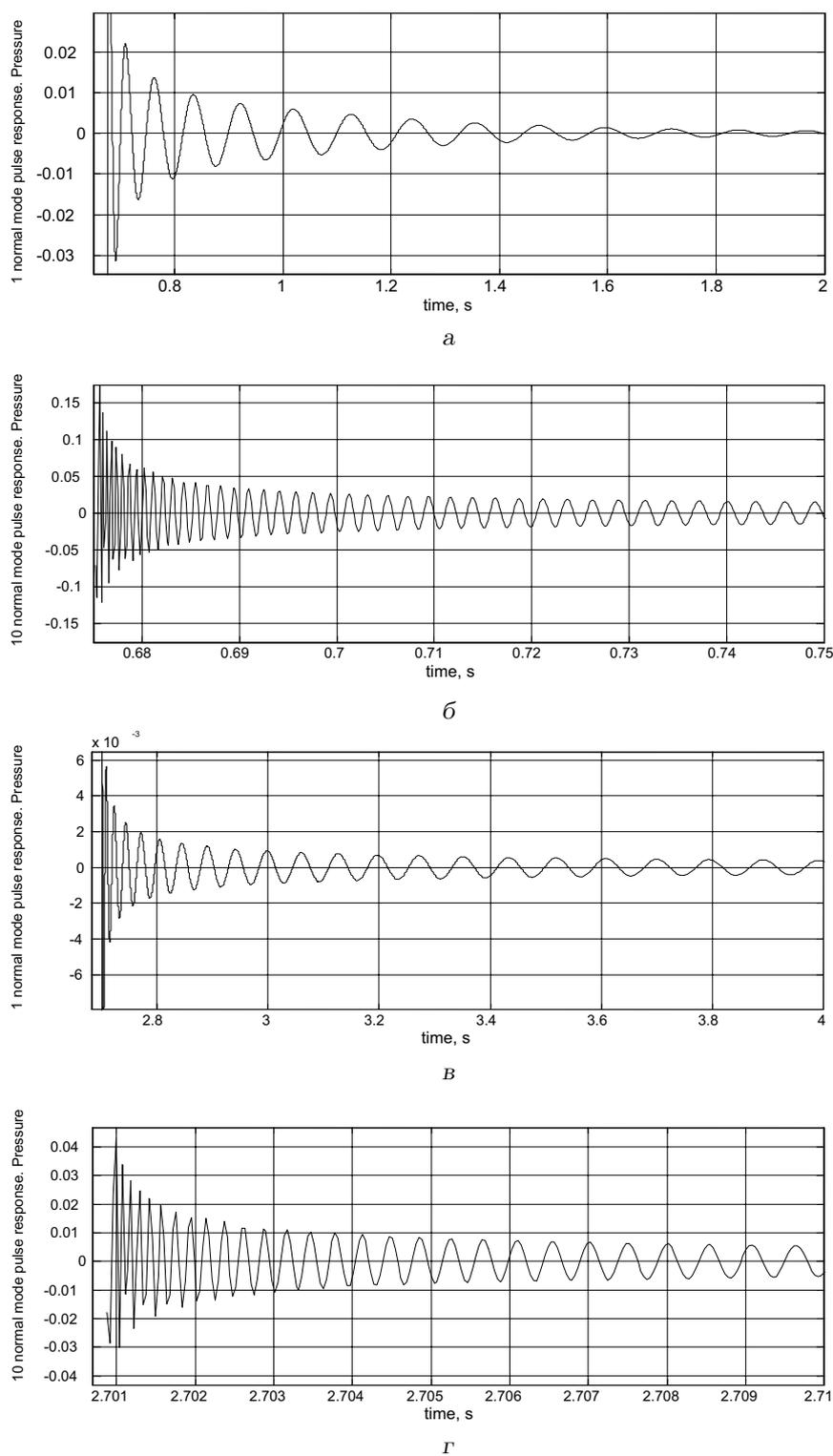


Рис. 2. Импульсные характеристики отдельных нормальных волн:  
 а – первая мода,  $r=1000$  м; б – десятая мода,  $r=1000$  м;  
 в – первая мода,  $r=4000$  м; г – десятая мода,  $r=4000$  м;

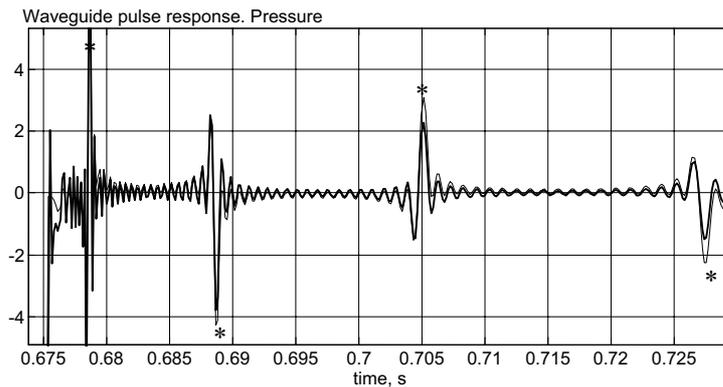


Рис. 3. Импульсная характеристика волновода (просуммировано 20 мод).  
 Источник и приемник – на дне:  
 жирная – результат моделирования,  
 тонкая – расчет по точной формуле

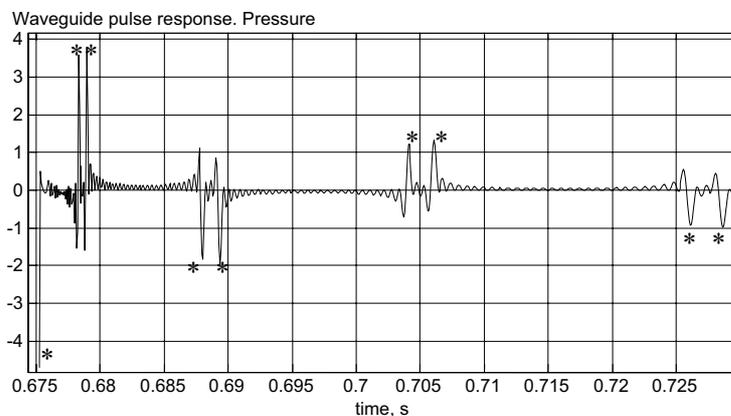


Рис. 4. Импульсная характеристика волновода,  
 результат моделирования (просуммировано 32 моды).  
 Источник – на глубине  $z_0 = 0.9h$ , приемник – на дне

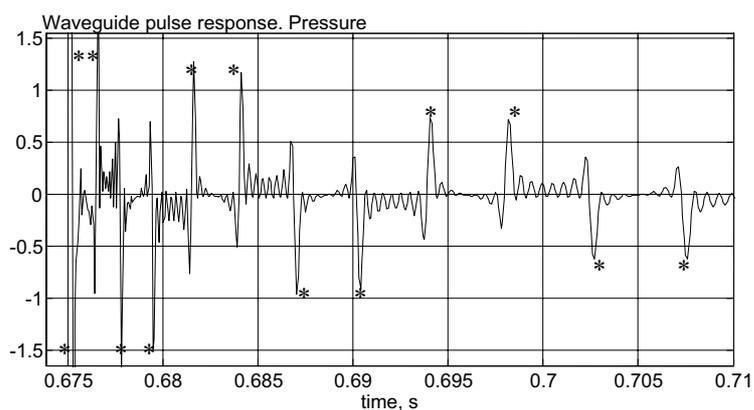


Рис. 5. Импульсная характеристика волновода с акустически мягкими границами,  
 результат моделирования (просуммировано 32 моды).  
 Источник – на глубине  $z_0 = 0.5h$ , приемник – на глубине  $z = 0.25h$

На рис. 3 показан отклик волновода на импульсное воздействие, рассчитанный согласно процедурам (16) и (17). Для сравнения, здесь же показан результат, полученный по точной формуле (20). Просуммировано 20 мод. Источник и приемник расположены у дна, что дает равное возбуждение всех мод. Расстояние до излучателя  $r=1000$  м. На графике наблюдается квазипериодический волновой процесс – результат интерференции нормальных волн, приходящих в точку приема одновременно, но с разными частотами, для которых групповая скорость одинакова. Если обозначить через  $f_1$  мгновенную частоту первой моды, то для соответствующих частот остальных мод из формулы для групповой скорости можно получить простое соотношение:  $f_l = f_1(2l+1)$ . Тогда, кроме “основной” частоты  $f_1$ , волновой процесс в точке приема после момента вступления  $t_0$ , будет содержать гармоники  $3f_1$ ,  $5f_1$  и т. д. (все они соответствуют одинаковой групповой скорости).

Сравнение результатов моделирования импульсной характеристики волновода и расчета по точной формуле позволяет сделать вывод о их совпадении с точностью до фазы.

Реальная импульсная характеристика волновода без учета затухания звука – результат интерференции бесконечного количества мод. Моделированная ИХ волновода, полученная усечением до 32 мод, показана на рис. 4. Для рис. 4 источник расположен на глубине  $z_0=0.9h$ , приемник – у дна, расстояние до излучателя  $r=1000$  м.

Наблюдаемые на рис. 3 и 4 процессы качественно объяснимы в терминах мнимых излучателей и лучевых представлений [8]. В момент  $t_0$  (на рис. 3 и 4 это  $\approx 0.674$  с) приемника достигает импульс, распространяющийся без отражений. В последующие моменты времени приходят “сигналы” от все более удаленных “излучателей”, причем соседние импульсы имеют разный знак. Например, в момент  $t=r/c \cos(\chi_l)$  импульс приходит по лучу, угол скольжения которого равен  $\chi_l$ . Отсюда  $\cos(\chi_l)=t_0/t$ . На графиках моменты прихода импульсов отмечены звездочками. Сравнивая рис. 3 и 4, можно увидеть разделение источника и его мнимого изображения относительно дна. Амплитуда каждого импульса при отделении изображения от источника уменьшается примерно в два раза.

При увеличении числа суммируемых мод ИХ волновода становится все более похожей на последовательность  $\delta$ -импульсов, соответствуя картине мнимых излучателей и лучевой теории как пределу волновой. Это дополнительно подтверждает верность моделирования.

### 2.3. Импульсная характеристика волновода с импедансными границами

Если нижняя граница волновода является не акустически жесткой, а характеризуется импедансом дна  $Z$ , для моделирования импульсных характеристик можно воспользоваться выражением для вертикального волнового числа идеального волновода, допуская введение нецелых номеров мод [25, 26]. Выражение для вертикального волнового числа в этом случае запишем так:

$$b_l = \frac{\pi(l-m)}{h}. \quad (22)$$

Для акустически жесткого дна  $m=0.5$ , акустически мягкого –  $m=0$ , а промежуточные значения  $0 < m < 0.5$  соответствуют конечным импедансам.

Определим импеданс дна как  $Z=(P/v_z)|_{z=h}$  – отношение звукового давления к нормальной составляющей вектора колебательной скорости при глубине  $z=h$  [8]. Записав звуковое давление отдельной моды в виде  $P_l = \sin(b_l z)e^{i\xi_l r}$ , а скорость –

$$v_z = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{i\omega\rho} \cos(b_l z)e^{i\xi_l r},$$

и подставив выражение (22) для вертикального волнового числа, получим уравнение, связывающее импеданс дна  $Z$  и число  $m$ :

$$Z = \frac{\pi(l+m)}{i\rho\omega h} \operatorname{tg}(\pi(l+m)). \quad (23)$$

Поскольку  $m$  определяет фазу коэффициента отражения и зависит от частоты  $\omega$ , трансцендентное соотношение (23) является одной из форм записи дисперсионного уравнения и, решая его при известном импедансе дна, можно рассчитать номера мод. Располагая же результатами экспериментальных измерений звукового давления в зависимости от глубины, с помощью выражения (23) можно оценить импеданс дна.

На рис. 5 показана импульсная характеристика волновода, рассчитанная для  $m=0$ . Глубина расположения источника составляла  $z_0=0.5h$ , а приемника –  $z=0.25h$ . Расстояние до излучателя было  $r=1000$  м. Из графика видно, что первоначально приходит импульс без отражения ( $\sim 0.674$  с), затем инверсные за счет однократного отражения от нижней ( $\sim 0.676$  с) и верхней ( $\sim 0.677$  с) акустически мягких границ. Впоследствии вступают импульсы, испытавшие неоднократные отражения от границ (моменты прихода помечены звездочками).

## ВЫВОДЫ

Предлагаемая методика численно-аналитического моделирования спектральной передаточной функции и импульсной характеристики применима для слоисто-неоднородных гидроакустических волноводов, для которых закон дисперсии невозможно получить в явном виде. Особый интерес представляет ее применение для восстановления импульсных характеристик гидроакустических волноводов при непостоянном профиле скорости звука.

Для достижения максимальной достоверности восстановления импульсной характеристики требуется как можно более точное установление закона дисперсии. Подходящим является табличный способ задания частотной зависимости горизонтального или вертикального волнового числа. Не пригодны приближения (в окрестности некоторой частоты) закона дисперсии.

Сравнение результата моделирования импульсной характеристики с расчетом по точной формуле показало их хорошее согласование. При увеличении числа интерферирующих мод результат моделирования все более соответствует лучевым представлениям.

Наблюдение импульсных характеристик волноводов представляет определенный методический интерес, так как прямо указывает на связь между волновыми и лучевыми представлениями акустических полей. Импульсная характеристика является лишь инструментом для исследования дисперсионных искажений при распространении сигналов с различными видами модуляции в волноводах во временной области. При этом возможно визуальное наблюдение реализаций искаженного сигнала, чего не позволяют сделать приближения теории дисперсии.

Учет диссипативного затухания звука в морской воде принципиально важен при моделировании дисперсионных искажений сигналов путем свертки с импульсной характеристикой, поскольку “некинематичность” связана именно с ограничением спектра мод “сверху”, тем самым согласуя его с частотным спектром сигнала.

Конечность частоты дискретизации накладывает определенные ограничения на максимальное расстояние между источником и приемником. Однако они не представляются существенными, поскольку в природе не бывает горизонтально однородных волноводов длиной  $\sim 100h$ , а метод восстановления импульсных характеристик в принципе адиабатичен и не учитывает взаимодействия мод на трассе.

1. Толстой И., Клей К. С. Акустика океана. Теория и эксперимент в подводной акустике.– М.: Мир, 1969.– 301 с.
2. Лаваль Р., Лабаск Р. Влияние неоднородностей и нестабильности среды на пространственную и временную обработку сигналов // Подводная акустика и обработка сигналов / Под ред. Л. Бьерне.– М.: Мир, 1985.– С. 32–43.
3. Лаваль Р. Расчет усредненных потерь при распространении звука и частотно-пространственных функций когерентности сигналов в мелководных районах // Акустика дна океана / Под ред. У. Купермана, Ф. Енсена.– М.: Мир, 1984.– С. 245–261.
4. Малкина И. Г., Шевцов В. И. Исследование пространственно-временной устойчивости спектральной передаточной функции акустического волновода в глубоком море // Акуст. ж.– 1990.– **36**, N 2.– С. 319–325.
5. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы.– М.: Высшая школа, 1988.– 448 с.
6. Бункин Ф. В Гиндлер И. В., Козельский А. Р., Кравцов Ю. А., Петников В. Г. Дисперсионные искажения сложных акустических сигналов в океанических волноводах малой глубины // Акуст. ж.– 1989.– **35**, N 5.– С. 791–796.
7. Вавилин А. В., Козельский А. Р., Петников В. Г., Резников В. М., Ривелис Е. А. Особенности дисперсионных искажений импульсных сигналов в акустических волноводах с поглощением // Акуст. ж.– 1987.– **33**, N 5.– С. 830–833.
8. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.– М.: Наука, 1973.– 343 с.
9. Пекерис К. Теория распространения звука взрыва в мелкой воде // Распространение звука в океане.– М.: ИИЛ, 1951.– С. 48–156.
10. Гиндлер И. В., Козельский А. Р. О возможности восстановления геоакустических параметров морского дна на основе экспериментальной информации о функции Грина гидроакустического волновода в широкой полосе частот // Акуст. ж.– 1992.– **38**, N 1.– С. 29–33.
11. Голубев В. Н., Ильичев В. И., Орлов Е. Ф. и др. Экспериментальное исследование интерференции широкополосного звука в подповерхностном океаническом волноводе // Акустические волны в океане.– М.: Наука, 1987.– С. 100–111.
12. Ди Наполи Ф. Р., Поттер Д., Херстейн П. Акустические волны, взаимодействующие с дном: модель и эксперимент // Акустика дна океана / Под ред. У. Купермана, Ф. Енсена.– М.: Мир, 1984.– С. 174–185.
13. Зуйкова Н. В., Свет В. Д. Согласованная обработка сигналов в океанических волноводах // Акуст. ж.– 1993.– **39**, N 3.– С. 389–403.
14. Вировлянский А. Л., Лебедев О. В. Модовая структура поля в переменном по трассе волноводе Пекериса // Акуст. ж.– 1998.– **44**, N 4.– С. 451–455.
15. Полянская В. А. О поле импульсного излучателя в подводном звуковом канале // Акуст. ж.– 1959.– **5**, N 1.– С. 91–100.

16. Шаронов Г. А., Кержаков Б. В., Кулич В. В., Лазарев В. А. Экспериментальные исследования передаточных характеристик неоднородного по трассе океанического волновода // Труды Нижегородской акустической научной сессии.– ННГУ, 2002.– С. 24–27.
17. Попов Р. Ю., Чупров С. Д. Пространственно-временная изменчивость передаточных функций многомодового океанического волновода // Акустические волны в океане.– М.: Наука, 1987.– С. 92–100.
18. Вешев Н. А., Винокурова А. И., Славянов С. Ю. Переходные процессы в случае тонального источника с импульсным включением в слоистом волноводе // Акуст. ж.– 1988.– **34**, N 6.– С. 1004–1009.
19. Исакович М. А. Общая акустика.– М.: Наука, 1973.– 495 с.
20. Грачев Г. А., Кузнецов Г. Н. Средняя скорость распространения модулированных колебаний вдоль плоского волновода // Акуст. ж.– 1986.– **32**, N 2.– С. 258–259.
21. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Том 1.– М.: Мир, 1983.– 312 с.
22. Клей К., Медвин Г. Акустическая океанография. Основы и применение.– М.: Мир, 1980.– 580 с.
23. Вадов Р. А. Поглощение и затухание низкочастотного звука в морской среде // Акуст. ж.– 2000.– **46**, N 5.– С. 624–631.
24. Дьяконов В. П., Абраменкова И. В., Круглов В. В. МАТЛАВ 5.3.1 с пакетами расширений / Под ред. проф. В. П. Дьяконова.– М.: Нолидж, 2001.– 880 с.
25. Зверев В. А., Салин Б. М., Стромков А. А. Определение модового состава акустического поля в мелком море при одноточечном приеме сигнала // Акуст. ж.– 2005.– **51**, N 2.– С. 221–227.
26. Зверев В. А., Салин Б. М., Стромков А. А., Хилько А. И. Селекция мод мелкого моря в натуральных измерениях с использованием модели Пекериса // XI школа-семинар акад. Л. М. Бреховских “Акустика океана”, XVII сессия РАО.– М.: ГЕОС, 2006.– С. 83–86.