

УДК 539.3

НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ УПРУГОМ ВОЛНОВОДЕ

А. А. БОНДАРЕНКО

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Получено 24.12.2007

На основе аналитического метода суперпозиции решена задача о распространении нормальных волн в прямоугольном упругом волноводе. Разработаны алгоритмы расчета дисперсионных кривых и полей смещений для каждого типа нормальных мод. Для волновода квадратного перереза проанализированы дисперсионные соотношения. Приведены результаты для действительных, мнимых и комплексных значений постоянной распространения. Для пяти типов мод квадратного волновода систематизированы данные о частотах загибания. Найдены предельные величины фазовых и групповых скоростей. Изучены зависимости кинематических характеристик основных распространяющихся волн от частоты и коэффициента Пуассона. Детально рассмотрены особенности поведения неоднородных волн, отвечающих чисто мнимым и комплексным корням дисперсионных уравнений.

На базі аналітичного методу суперпозиції розв'язано задачу про поширення нормальних хвиль у прямокутному пружному хвилеводі. Розроблені алгоритми розрахунків дисперсійних кривих і полів зміщень для кожного типу нормальних хвиль. Для хвилеводу квадратного перерізу проаналізовано дисперсійні співвідношення. Наведені результати для дійсних, уявних і комплексних значень сталої поширення. Для п'яти типів мод квадратного хвилеводу систематизовані дані про частоти відсікання. Визначені граничні величини фазових і групових швидкостей. Вивчені залежності кінематичних характеристик основних хвиль, які поширюються, від частоти й коефіцієнта Пуассона. Детально розглянуті особливості поведінки неоднорідних хвиль, які відповідають уявним і комплексним корням дисперсійних рівнянь.

The problem on normal wave propagation in a rectangular elastic waveguide is solved on the basis of an analytical method of superposition. Algorithms are developed for calculation of the dispersion curves and displacement fields for each type of normal waves. For a waveguide with square cross section, the dispersion relations are analyzed. The results for real, imaginary, and complex values of propagation constant are presented. The data on cutoff frequencies are systematized for five types of modes of the square waveguide. Limiting values of phase and group velocities are determined. Dependencies of displacement distribution for fundamental propagating waves versus frequency and Poisson's ratio are studied. Special features of non-propagating waves, that correspond to pure imaginary and complex roots of the dispersion equations, are investigated in detail.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование закономерностей распространения волн в упругих стержнях различной конфигурации послужило толчком к развитию перспективного направления в технике – методов неразрушающего контроля [1–3]. Однако сложности в построении строгих аналитических решений, позволяющих точно выполнить граничные условия на боковых сторонах стержня-волновода, препятствуют внедрению таких методик в практику. Первый шаг по преодолению этих трудностей заключается в детальном анализе дисперсионных характеристик распространяющихся и нераспространяющихся волн в стержнях простейшей геометрии.

В то время как свойства круглого и плоско-го упругих изотропных волноводов – цилиндра и слоя – изучены и систематизированы исчерпывающим образом (см., например, обзор [4]), особенности распространения волн в прямоугольном волноводе со свободной границей, несмотря на большее количество публикаций, исследованы недостаточно. Это связано со значительным, по сравне-

нию со слоем, усложнением процесса формирования нормальной волны из-за наличия дополнительной пары граничных поверхностей.

Трудности анализа трехмерной задачи стимулировали интенсивное развитие приближенных теорий: аналитического решения с приближенным удовлетворением граничных условий [5] и численных подходов, основанных на вариационных методах [6–10] или методе коллокаций [11]. В ряде случаев для фиксированных соотношений сторон прямоугольника, частоты и постоянной распространения комбинация волн Рэлея–Лэмба и SH-волн бесконечного слоя позволяет обратить в нуль все напряжения на границе волновода, что соответствует точным решениям в модах Ламе и Миндлина–Фокса [4, 12]. Отдельные результаты теоретических и экспериментальных исследований распространения возмущений в прямоугольном упругом волноводе можно найти в обзорных работах [13–18].

В настоящее время все большую популярность завоевывают численные подходы, основанные на методе конечных элементов. Использование современных мощных компьютеров позволяет рассчи-

тывать дисперсионные характеристики волновода произвольной геометрии путем разбиения его на более простые сегменты, в частности, прямоугольной формы [2, 3]. На рис. 1 приведены результаты расчета безразмерных групповых скоростей в зависимости от безразмерной частоты распространения для квадратного стального стержня, выполненного методом конечных элементов [3]. Заметим, что полученная таким образом информация является несистематизированной и практически непригодна для изучения особенностей дисперсии волн в волноводе. В связи с этим большое значение приобретает развитие аналитических методов с последующим качественным анализом расчетных данных. Среди них особое место занимает метод суперпозиции, высокая эффективность и надежность которого для изучения явлений волноводного распространения подтверждаются его успешным применением для решения широкого класса задач [19–23].

Стремление сформировать для прямоугольного волновода такую же ясную и четкую картину дисперсионных свойств, как для упругого слоя или круглого цилиндра, вызывает потребность ответа на ряд вопросов. Часть из них рассмотрена в данной работе.

Для низших дисперсионных мод различных типов симметрии движений, существующих в прямоугольном волноводе, установлены предельные значения фазовых и групповых скоростей при стремлении частоты к нулю и в коротковолновом диапазоне. Исследовано поведение кривых в области низких частот в зависимости от коэффициента Пуассона, а также кинематические характеристики основных мод при движении вдоль дисперсионных кривых. Для высших мод определены значения частот запертия и связанные с ними типы движений. Установлены общие тенденции поведения фазовых скоростей с увеличением частоты, их высокочастотные пределы и характер стремления к этим значениям. Указанная информация представлена для мод с малыми порядковыми номерами индексов, так как связанные с ними движения доминируют по сравнению с более высокими модами. Большое внимание уделено дополнительной декомпозиции волновых движений в квадратном волноводе, возникающей благодаря наличию диагональных плоскостей симметрии.

1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечный вдоль оси z упругий волновод прямоугольного поперечного сечения $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ со свободными от напря-

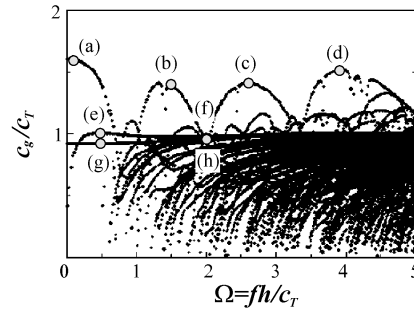


Рис. 1. Групповые скорости c_g/c_T квадратного стального стержня в зависимости от частоты $\Omega = \omega b/c_T$, рассчитанные методом конечных элементов. График заимствован из работы [3]

жений гранями

$$\begin{aligned} \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, & \quad x = \pm a, \\ \sigma_y = \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0, & \quad y = \pm b. \end{aligned} \tag{1}$$

Изотропный однородный материал волновода с плотностью ρ характеризуется модулем сдвига G , коэффициентом Пуассона ν , а также скоростями сдвиговых $c_2 = \sqrt{G/\rho}$ и продольных $c_1 = c_2 \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}$ волн.

Предполагаем, что в волноводе распространяется нормальная волна с изменением поля смещений поля во времени t и вдоль оси волновода z согласно зависимости $\exp i(\gamma z - \omega t)$. Для заданной частоты ω ставится задача определить допустимые значения постоянной распространения γ , отвечающие распространяющимся вдоль оси z (действительные γ) и нераспространяющимся (мнимые и комплексные γ) нормальным волнам, а также значения фазовых $c_p = \omega/\gamma$ и групповых $c_g = d\omega/d\gamma$ скоростей распространяющихся волн. Длина распространяющейся волны λ связана с действительной постоянной распространения γ соотношением $\gamma = 2\pi/\lambda$.

Вектор смещений $\vec{U}(x, y, z, t)$ в изотропном волноводе ищем в виде

$$\vec{U}(x, y, z) = \vec{u}(x, y) e^{i(\gamma z - \omega t)} \tag{2}$$

(множитель $\exp i(\gamma z - \omega t)$ далее всюду опускаем). При этом амплитуды компонент вектора смещений $\vec{u}(x, y) = \{u_x(x, y), u_y(x, y), u_z(x, y)\}$ удовлетво-

ряют уравнениям движения Ламе:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_x + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(\frac{\omega^2}{c_2^2} - \gamma^2 \right) u_x &= 0, \\ \nabla^2 u_y + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \left(\frac{\omega^2}{c_2^2} - \gamma^2 \right) u_y &= 0, \\ \nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} i\gamma \theta + \left(\frac{\omega^2}{c_2^2} - \gamma^2 \right) u_z &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \theta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + i\gamma u_z. \quad (4)$$

Общее решение этих уравнений строим по методу суперпозиции [19, 20], согласно которому, поле в волноводе представляется в виде суперпозиции полей двух упругих слоев – I ($-a \leq x \leq a$) и II ($-b \leq y \leq b$), – каждое из которых формируется из частных решений уравнений движения и имеет достаточный функциональный произвол для удовлетворения любых граничных условий на сторонах $x = \pm a$ и $y = \pm b$ соответственно. Полученные таким образом представления для смещений состоят из суммы двух ординарных рядов Фурье по полным на интервалах $-a \leq x \leq a$ и $-b \leq y \leq b$ системам тригонометрических функций с произвольными неизвестными коэффициентами и удовлетворяют требованию полноты на сторонах прямоугольника. Дальнейшая конкретизация и упрощение формы общего решения осуществляются с учетом возможной симметрии волновых движений.

В прямоугольном волноводе существуют четыре типа мод, отличающиеся симметрией вектора смещений относительно срединных плоскостей волновода. В литературе [6, 11] для них приняты следующие обозначения.

L-моды (продольные) – симметричные относительно осей x и y волны. Компоненты вектора смещений: u_x – нечетная по x , четная по y ; u_y – четная по x , нечетная по y ; u_z – четная по x и по y .

T-моды (крутильные) – антисимметричные волновые движения. Компоненты вектора смещений: u_x – четная по x , нечетная по y ; u_y – нечетная по x , четная по y ; u_z – нечетная по x и по y .

B_x-моды (изгибные относительно оси x) – колебания симметричны относительно оси y . Компоненты вектора смещений: u_x – четная по x и по y ; u_y – нечетная по x и по y ; u_z – нечетная по x , четная по y .

B_y-моды (изгибные относительно оси y) – колебания симметричны относительно оси x . Компоненты вектора смещений: u_x – нечетная по x и по y ; u_y – четная по x и по y ; u_z – четная по x , нечетная по y .

С учетом этих свойств выражения для четырех типов нормальных волн прямоугольного волновода приобретают вид, указанный ниже.

Для *L*-мод:

$$\begin{aligned} u_x &= D_0 q_{1,0} \frac{\text{sh } q_{1,0} x}{\text{sh } q_{1,0} a} - i\gamma F_0 \frac{\text{sh } q_{2,0} x}{\text{sh } q_{2,0} a} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i\gamma} [F_k (\gamma^2 + \beta_k^2) - q_{2,k} \beta_k E_k] \times \right. \\ &\times \left. \frac{\text{sh } q_{2,k} x}{\text{sh } q_{2,k} a} + D_k q_{1,k} \frac{\text{sh } q_{1,k} x}{\text{sh } q_{1,k} a} \right\} \cos \beta_k y - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \alpha_n \frac{\text{ch } p_{1,n} y}{\text{sh } p_{1,n} b} - \frac{1}{i\gamma} [B_n \alpha_n p_{2,n} - \right. \\ &\left. - C_n (p_{2,n}^2 - \gamma^2)] \frac{\text{ch } p_{2,n} y}{\text{sh } p_{2,n} b} \right\} \sin \alpha_n x, \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} u_y &= A_0 p_{1,0} \frac{\text{sh } p_{1,0} y}{\text{sh } p_{1,0} b} + i\gamma B_0 \frac{\text{sh } p_{2,0} y}{\text{sh } p_{2,0} b} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i\gamma} [C_n \alpha_n p_{2,n} - B_n (\gamma^2 + \alpha_n^2)] \times \right. \\ &\times \left. \frac{\text{sh } p_{2,n} y}{\text{sh } p_{2,n} b} + A_n p_{1,n} \frac{\text{sh } p_{1,n} y}{\text{sh } p_{1,n} b} \right\} \cos \alpha_n x - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ D_k \beta_k \frac{\text{ch } q_{1,k} x}{\text{sh } q_{1,k} a} - \frac{1}{i\gamma} [E_k (q_{2,k}^2 - \gamma^2) - \right. \\ &\left. - F_k \beta_k q_{2,k}] \frac{\text{ch } q_{2,k} x}{\text{sh } q_{2,k} a} \right\} \sin \beta_k y, \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} u_z &= i\gamma A_0 \frac{\text{ch } p_{1,0} y}{\text{sh } p_{1,0} b} - B_0 p_{2,0} \frac{\text{ch } p_{2,0} y}{\text{sh } p_{2,0} b} + \\ &+ i\gamma D_0 \frac{\text{ch } q_{1,0} x}{\text{sh } q_{1,0} a} + F_0 q_{2,0} \frac{\text{ch } q_{2,0} x}{\text{sh } q_{2,0} a} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ i\gamma A_n \frac{\text{ch } p_{1,n} y}{\text{sh } p_{1,n} b} + [C_n \alpha_n - B_n p_{2,n}] \times \right. \\ &\times \left. \frac{\text{ch } p_{2,n} y}{\text{sh } p_{2,n} b} \right\} \cos \alpha_n x + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ i\gamma D_k \frac{\text{ch } q_{1,k} x}{\text{sh } q_{1,k} a} + \right. \\ &\left. + [F_k q_{2,k} - E_k \beta_k] \frac{\text{ch } q_{2,k} x}{\text{sh } q_{2,k} a} \right\} \cos \beta_k y. \end{aligned} \quad (5c)$$

Здесь $\alpha_n = n\pi/a$; $\beta_k = k\pi/b$; $q_{i,0}^2 = \gamma^2 - \Omega_i^2$; $p_{i,0}^2 = \gamma^2 - \Omega_i^2$; $q_{i,k}^2 = \beta_k^2 + \gamma^2 - \Omega_i^2$; $p_{i,n}^2 = \alpha_n^2 + \gamma^2 - \Omega_i^2$ ($i=1, 2$, $n, k=1, 2, \dots$); $\Omega_1 = \omega/c_1$; $\Omega_2 = \omega/c_2$; A_j , B_j , C_j , D_j , E_j , F_j ($j=0, 1, 2, \dots$) – произвольные постоянные, подлежащие определению путем удовлетворения граничных условий (1).

Для T -мод:

$$u_x = - \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i\gamma} [q_{2,l} \delta_l E_l + F_l (\gamma^2 + \delta_l^2)] \times \right. \\ \left. \times \frac{\text{ch } q_{2,l} x}{\text{ch } q_{2,l} a} + D_l q_{1,l} \frac{\text{ch } q_{1,l} x}{\text{ch } q_{1,l} a} \right\} \sin \delta_l y - \\ - \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ A_s \xi_s \frac{\text{sh } p_{1,s} y}{\text{ch } p_{1,s} b} - \frac{1}{i\gamma} [B_s \xi_s p_{2,s} - \right. \\ \left. - C_s (p_{2,s}^2 - \gamma^2)] \frac{\text{sh } p_{2,s} y}{\text{ch } p_{2,s} b} \right\} \cos \xi_s x, \quad (6a)$$

$$u_y = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i\gamma} [C_s \xi_s p_{2,s} + B_s (\gamma^2 + \xi_s^2)] \times \right. \\ \left. \times \frac{\text{ch } p_{2,s} y}{\text{ch } p_{2,s} b} - A_s p_{1,s} \frac{\text{ch } p_{1,s} y}{\text{ch } p_{1,s} b} \right\} \sin \xi_s x - \\ - \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ D_l \delta_l \frac{\text{sh } q_{1,l} x}{\text{ch } q_{1,l} a} + \frac{1}{i\gamma} [E_l (q_{2,l}^2 - \gamma^2) + \right. \\ \left. + F_l \delta_l q_{2,l}] \frac{\text{sh } q_{2,l} x}{\text{ch } q_{2,l} a} \right\} \cos \delta_l y, \quad (6b)$$

$$u_z = - \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ i\gamma A_s \frac{\text{sh } p_{1,s} y}{\text{ch } p_{1,s} b} - \right. \\ \left. - [C_s \xi_s + B_s p_{2,s}] \frac{\text{sh } p_{2,s} y}{\text{ch } p_{2,s} b} \right\} \sin \xi_s x - \\ - \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ i\gamma D_l \frac{\text{sh } q_{1,l} x}{\text{ch } q_{1,l} a} + \right. \\ \left. + [F_l q_{2,l} + E_l \delta_l] \frac{\text{sh } q_{2,l} x}{\text{ch } q_{2,l} a} \right\} \sin \delta_l y, \quad (6c)$$

где, в дополнение к введенным ранее обозначениям, $\delta_l = (2l-1)\pi/2b$; $\xi_s = (2s-1)\pi/2a$ ($l, s = 1, 2, \dots$).

Для B_x -мод:

$$u_x = D_0 q_{1,0} \frac{\text{ch } q_{1,0} x}{\text{sh } q_{1,0} a} - i\gamma F_0 \frac{\text{ch } q_{2,0} x}{\text{ch } q_{2,0} a} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i\gamma} [F_k (\gamma^2 + \beta_k^2) - q_{2,k} \beta_k E_k] \times \right. \\ \left. \times \frac{\text{ch } q_{2,k} x}{\text{ch } q_{2,k} a} + D_k q_{1,k} \frac{\text{ch } q_{1,k} x}{\text{ch } q_{1,k} a} \right\} \cos \beta_k y - \\ - \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ A_s \xi_s \frac{\text{ch } p_{1,s} y}{\text{sh } p_{1,s} b} - \frac{1}{i\gamma} [B_s \xi_s p_{2,s} + \right. \\ \left. + C_s (p_{2,s}^2 - \gamma^2)] \frac{\text{ch } p_{2,s} y}{\text{sh } p_{2,s} b} \right\} \cos \xi_s x, \quad (7a)$$

$$u_y = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i\gamma} [C_s \xi_s p_{2,s} + B_s (\gamma^2 + \xi_s^2)] \times \right. \\ \left. \times \frac{\text{sh } p_{2,s} y}{\text{sh } p_{2,s} b} - A_s p_{1,s} \frac{\text{sh } p_{1,s} y}{\text{sh } p_{1,s} b} \right\} \sin \xi_s x - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ D_k \beta_k \frac{\text{sh } q_{1,k} x}{\text{ch } q_{1,k} a} - \frac{1}{i\gamma} [E_k (q_{2,k}^2 - \gamma^2) - \right. \\ \left. - F_k \beta_k q_{2,k}] \frac{\text{sh } q_{2,k} x}{\text{ch } q_{2,k} a} \right\} \sin \beta_k y, \quad (7b)$$

$$u_z = i\gamma D_0 \frac{\text{sh } q_{1,0} x}{\text{ch } q_{1,0} a} + F_0 q_{2,0} \frac{\text{sh } q_{2,0} x}{\text{ch } q_{2,0} a} - \\ - \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ i\gamma A_s \frac{\text{ch } p_{1,s} y}{\text{sh } p_{1,s} b} - [C_s \xi_s + B_s p_{2,s}] \times \right. \\ \left. \times \frac{\text{ch } p_{2,s} y}{\text{sh } p_{2,s} b} \right\} \sin \xi_s x + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ i\gamma D_k \frac{\text{sh } q_{1,k} x}{\text{ch } q_{1,k} a} + \right. \\ \left. + [F_k q_{2,k} - E_k \beta_k] \frac{\text{sh } q_{2,k} x}{\text{ch } q_{2,k} a} \right\} \cos \beta_k y. \quad (7c)$$

Для B_y -мод:

$$u_x = - \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i\gamma} [F_l (\gamma^2 + \delta_l^2) + q_{2,l} \delta_l E_l] \times \right. \\ \left. \times \frac{\text{sh } q_{2,l} x}{\text{sh } q_{2,l} a} + D_l q_{1,l} \frac{\text{sh } q_{1,l} x}{\text{sh } q_{1,l} a} \right\} \sin \delta_l y - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \alpha_n \frac{\text{sh } p_{1,n} y}{\text{ch } p_{1,n} b} - \frac{1}{i\gamma} [B_n \alpha_n p_{2,n} - \right. \\ \left. - C_n (p_{2,n}^2 - \gamma^2)] \frac{\text{sh } p_{2,n} y}{\text{ch } p_{2,n} b} \right\} \sin \alpha_n x, \quad (8a)$$

$$u_y = A_0 p_{1,0} \frac{\text{ch } p_{1,0} y}{\text{ch } p_{1,0} b} + i\gamma B_0 \frac{\text{ch } p_{2,0} y}{\text{ch } p_{2,0} b} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i\gamma} [C_n \alpha_n p_{2,n} - B_n (\gamma^2 + \alpha_n^2)] \times \right. \\ \left. \times \frac{\text{ch } p_{2,n} y}{\text{ch } p_{2,n} b} + A_n p_{1,n} \frac{\text{ch } p_{1,n} y}{\text{ch } p_{1,n} b} \right\} \cos \alpha_n x - \\ - \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ D_l \delta_l \frac{\text{ch } q_{1,l} x}{\text{sh } q_{1,l} a} + \frac{1}{i\gamma} [E_l (q_{2,l}^2 - \gamma^2) + \right. \\ \left. + F_l \delta_l q_{2,l}] \frac{\text{ch } q_{2,l} x}{\text{sh } q_{2,l} a} \right\} \cos \delta_l y, \quad (8b)$$

$$\begin{aligned}
 u_z = & i\gamma A_0 \frac{\text{sh } p_{1,0}y}{\text{ch } p_{1,0}b} - B_0 p_{2,0} \frac{\text{sh } p_{2,0}y}{\text{ch } p_{2,0}b} + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ i\gamma A_n \frac{\text{sh } p_{1,n}y}{\text{ch } p_{1,n}b} + [C_n \alpha_n - B_n p_{2,n}] \times \right. \\
 & \times \left. \frac{\text{sh } p_{2,n}y}{\text{ch } p_{2,n}b} \right\} \cos \alpha_n x - \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ i\gamma D_l \frac{\text{ch } q_{1,l}x}{\text{sh } q_{1,l}a} + \right. \\
 & \left. + [F_l q_{2,l} + E_l \delta_l] \frac{\text{ch } q_{2,l}x}{\text{sh } q_{2,l}a} \right\} \sin \delta_l y.
 \end{aligned} \tag{8c}$$

Выбранная форма компонент вектора смещений позволяет не только удовлетворить уравнениям движения (3), но и точно выполнить нулевые граничные условия (1), причем, благодаря свойствам симметрии движений, только на части границы одного из квадрантов (например, при $x = a$, $y = b$). Однако данные представления теряют силу, когда какие-либо из знаменателей в выражениях (5)–(8) обращаются в нуль. Такие случаи, тесно связанные с известными модами Ламе и Миндлина–Фокса [12], были детально изучены в работе [23].

Фактическое выполнение условий (1) по касательным напряжениям ведет к упрощению связи между искомыми величинами. Так, в случае L -мод получаем

$$\begin{aligned}
 D_k = & \frac{iF_k}{2\gamma q_{1,k}} (2q_{2,k}^2 + \Omega_2^2), \quad E_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \\
 A_n = & \frac{B_n}{2i\gamma p_{1,n}} (2p_{2,n}^2 + \Omega_2^2), \quad C_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots
 \end{aligned} \tag{9}$$

Для остальных типов волн справедливы аналогичные выражения.

Удовлетворение граничных условий по нормальным напряжениям ведет к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных X_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) и Y_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), связанных с коэффициентами в рядах (5) соотношениями

$$X_n = (-1)^{n+1} \frac{B_n}{ib\gamma b_n}, \quad Y_k = (-1)^{k+1} \frac{F_k}{ia\gamma f_k}. \tag{10}$$

Здесь использованы обозначения

$$b_n = \begin{cases} 1; & n = 0, \\ \frac{1}{\alpha_n^2}; & n > 0, \end{cases} \quad f_k = \begin{cases} 1; & k = 0, \\ \frac{1}{\beta_k^2}; & k > 0. \end{cases} \tag{11}$$

Выражения для неизвестных коэффициентов бесконечных систем в случаях остальных трех типов волн получаются из соотношений (10) путем

замены β_k на δ_l и α_n на ξ_s в соответствии с симметрией рассматриваемых движений. Вид бесконечных систем для всех четырех типов нормальных волн приведен в работах [21, 23].

Частным случаем прямоугольной формы волновода является квадрат. Наличие диагональных плоскостей симметрии ведет к появлению дополнительных типов колебаний, что позволяет в явном виде выделить симметричные или антисимметричные смещения относительно диагональных плоскостей, а также упростить бесконечные системы, исключив одну из последовательностей неизвестных коэффициентов (X_n или Y_k).

При $a/b = 1$ продольные моды делятся на “дышащие” или L -моды ($u_x(x, y) = u_y(y, x)$) и первые “винтовые” или S_1 -моды ($u_x(x, y) = -u_y(y, x)$). В случае “дышащих” L -мод учет свойств симметрии ведет к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n \sum_{k=0}^{\infty} Y_k f_k \left[\frac{2\alpha_n^2 \alpha_k^2 - \Omega_0^2}{\alpha_k^2 + p_{1,n}^2} - \frac{2\alpha_n^2 \alpha_k^2}{\alpha_k^2 + p_{2,n}^2} \right] - \\
 - Y_n b \Delta_n(p_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots
 \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $\Omega_0^2 = \nu \Omega_1^2 (2\gamma^2 - \Omega_2^2) / (1 - 2\nu)$ и использованы обозначения

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1/2; & i = 0, \\ 1; & i > 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_n(p_n) = & b_n \left\{ p_{2,n} (\gamma^2 + \alpha_n^2) \text{cth } p_{2,n} b - \right. \\
 & \left. - \frac{(\alpha_n^2 + \gamma^2 + p_{2,n}^2)^2}{4p_{1,n}} \text{cth } p_{1,n} b \right\}.
 \end{aligned}$$

Бесконечная система для S_1 -мод имеет вид

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n \sum_{k=0}^{\infty} Y_k f_k \left[\frac{2\alpha_n^2 \alpha_k^2 - \Omega_0^2}{\alpha_k^2 + p_{1,n}^2} - \frac{2\alpha_n^2 \alpha_k^2}{\alpha_k^2 + p_{2,n}^2} \right] + \\
 + Y_n b \Delta_n(p_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots
 \end{aligned} \tag{13}$$

Крутильные моды квадратного волновода делятся на T -моды, антисимметричные относительно диагонали квадрата, и вторые “винтовые” моды (S_2 -моды). Неизвестные коэффициенты для T -мод определяются из бесконечной системы

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^{\infty} Y_l \left[\frac{2\xi_s^2 \xi_l^2 - \Omega_0^2}{\xi_l^2 (\xi_l^2 + p_{1,s}^2)} - \frac{2\xi_s^2}{\xi_l^2 + p_{2,s}^2} \right] + \\
 + Y_s b \Delta'_s(p_s) = 0, \quad s = 1, 2, \dots,
 \end{aligned} \tag{14}$$

а для S_2 -мод – из системы

$$\sum_{l=1}^{\infty} Y_l \left[\frac{2\xi_s^2 \xi_l^2 - \Omega_0^2}{\xi_l^2 (\xi_l^2 + p_{1,s}^2)} - \frac{2\xi_s^2}{\xi_l^2 + p_{2,s}^2} \right] - \quad (15)$$

$$-Y_s b \Delta'_s(p_s) = 0, \quad s = 1, 2, \dots$$

Здесь

$$\Delta'_s(p_s) = b_s \left\{ p_{2,s} (\gamma^2 + \xi_s^2) \operatorname{th} p_{2,s} b - \frac{(\xi_s^2 + \gamma^2 + p_{2,s}^2)^2}{4p_{1,s}} \operatorname{th} p_{1,s} b \right\}.$$

В оставшихся двух случаях изгибных волновых движений упрощения бесконечных систем не происходит, однако исчезают различия между B_x и B_y волнами. Тогда можно говорить об общем типе изгибных или B -мод, определяемом решением следующей системы уравнений:

$$\varepsilon_n \sum_{l=1}^{\infty} Y_l \left[\frac{2\alpha_n^2 \delta_l^2 - \Omega_0^2}{\delta_l^2 (\delta_l^2 + p_{1,n}^2)} - \frac{2\alpha_n^2}{\delta_l^2 + p_{2,n}^2} \right] + \quad (16)$$

$$+ X_n b \Delta'_n(p_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n b_n \left[\frac{2\delta_l^2 \alpha_n^2 - \Omega_0^2}{\alpha_n^2 + q_{1,l}^2} - \frac{2\delta_l^2 \alpha_n^2}{\alpha_n^2 + q_{2,l}^2} \right] +$$

$$+ Y_l b \Delta_l(q_l) = 0, \quad l = 1, 2, \dots$$

Условие существования нетривиального решения приводит к равенству нулю характеристического детерминанта, что дает дисперсионное уравнение относительно постоянной распространения γ при заданных значениях частоты ω и коэффициента Пуассона ν для волновода с фиксированным соотношением сторон a/b . В отличие от упругого слоя, для которого дисперсионное уравнение записывается в явном виде, в случае прямоугольного волновода оно представляется в форме бесконечного определителя. Это сильно затрудняет получение и трактовку численных результатов. Для корректной редукции определителя системы с целью получения надежных количественных данных (особенно в области высоких частот) существенным образом используется знание асимптотического поведения неизвестных с большими значениями индексов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k = A.$$

Методика и организация вычислительного процесса для решения подобного класса задач подробно описаны в работе [20].

2. ДИСПЕРСИЯ ВОЛН В КВАДРАТНОМ ВОЛНОВОДЕ

При обсуждении полученных результатов ограничимся случаем квадратного волновода. Численный расчет действительных, мнимых и комплексных значений безразмерных величин $\Gamma = 2\gamma b/\pi$ для каждой фиксированной безразмерной частоты $\Omega = 2\omega b/(\pi c_2)$ и коэффициента Пуассона $\nu = 0.25$ проводился путем определения нулей детерминантов конечных систем уравнений, соответствующих системам (12)–(16). При их редукции для широкого диапазона значений Γ удерживалось $K = N = 20$ неизвестных. Дальнейшее увеличение порядка конечных систем не влияло на значения искомых величин, определяемых с точностью до четырех десятичных знаков. Высокая точность полученных результатов объясняется учетом асимптотических свойств неизвестных при редукции бесконечной системы [20].

Дисперсионные кривые, устанавливающие взаимно однозначное соответствие между Ω и Γ для пяти типов волн квадратного волновода, представлены на графиках для действительных положительных значений частоты Ω . Спектры в остальных трех квадрантах Γ - Ω пространства получаются отражением относительно плоскостей $\operatorname{Im} \Gamma = 0$ и $\operatorname{Re} \Gamma = 0$. Кривая каждой нормальной моды состоит из действительных, мнимых и/или комплексных ветвей и простирается непрерывно от нулевой до бесконечной частоты. Комплексные и действительные ветви соединяются в точках минимумов действительных и максимумов комплексных ветвей; их пересечения ортогональны. Аналогичное утверждение справедливо для пар комплексных и мнимых ветвей. Мнимые и комплексные ветви в точках их пересечения ортогональны к плоскости $\Omega = 0$ и оси $\operatorname{Im} \Gamma$ соответственно [24].

Для обозначения и нумерации кривых приняты следующие соглашения: ветвь обозначается символом согласно типу волновых движений с верхним индексом в круглых скобках, указывающим порядок моды. Черта над символом означает, что данной ветви отвечает зеркальное отражение участка относительно плоскости $\operatorname{Re} \Gamma = 0$.

При построении комплексных участков кривых в качестве начальных точек использовались решения соответствующих статических задач, уравнения для которых могут быть получены из систем (12)–(16) при стремлении $\Omega \rightarrow 0$ для конечных значений Γ . Метод определения комплексных корней бесконечных систем уравнений подробно изложен в работе [25].

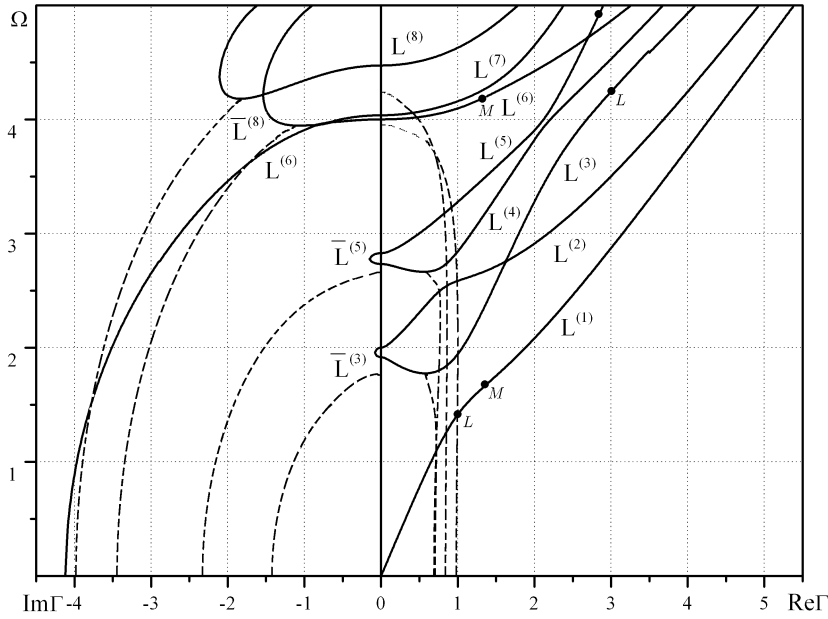


Рис. 2. Дисперсионный спектр L -мод квадратного волновода ($\nu=0.25$)

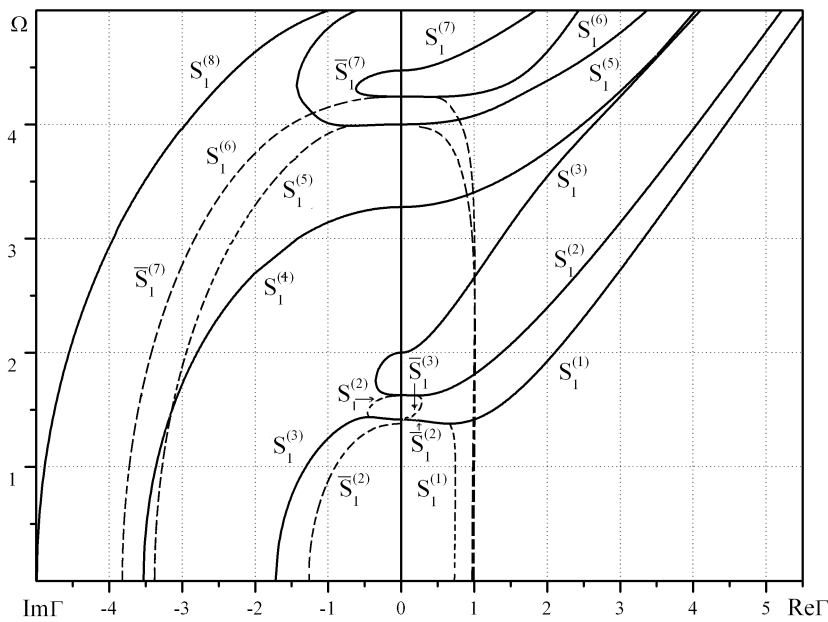


Рис. 3. Дисперсионный спектр S_1 -мод квадратного волновода ($\nu=0.25$)

2.1. Продольные моды

Как упоминалось ранее, в квадратном волноводе, благодаря наличию дополнительных плоскостей симметрии, продольные волны разделяются на “дышащие” (L) и первые “винтовые” (S_1) мо-

ды. Их дисперсионные спектры представлены на рис. 2 и 3 соответственно.

Первый тип движений характеризуется симметрией по отношению ко всем четырем плоскостям симметрии. При этом боковые перемещения u_x и u_y синфазны и имеют равные амплитуды. Второ-

му типу відповідають деформації, при которых волновод сжимается поочередно в направлении осей x и y . В этом случае равные по амплитуде боковые смещения сдвинуты по фазе на π радиан.

Низшая “дышащая” $L^{(1)}$ -мода начинается с нулевой частоты и при $\Gamma < 1$ является практически бездисперсионной. Поэтому она удовлетворительно описывается элементарной стержневой моделью. Значения фазовой и групповой скоростей совпадают и равны скорости “стержневой” моды $c_0 = E/\rho = 1.5811 c_2$. С увеличением частоты фазовая скорость уменьшается и монотонно приближается сверху к скорости волны Рэлея в упругом полупространстве $c_R = 0.9194 c_2$. Так, при $\Omega = 4.654$ ($\Gamma = 5$) имеем $c_p = 0.9308 c_2$ и $c_g = 0.9 c_2$; при $\Omega = 45.975$ ($\Gamma = 50$) $c_p = 0.9195 c_2$, $c_g = c_2$. Распределение смещений также изменяется с увеличением частоты: от известной картины на частоте моды Ламе ($\Omega = \sqrt{2}$, $\Gamma = 1$) до смещений, характерных для волны Рэлея на поверхности упругого полупространства [20, 26] в высокочастотной области [11].

На рис. 4 приведены фазовые скорости $L^{(1)}$ -моды в зависимости от частоты Ω для различных значений коэффициента Пуассона. Как и в случае круглого волновода [27, 28], кривые имеют общую точку при $\Gamma = 1$, $\Omega = \sqrt{2}$, соответствующую точному решению Ламе. Эта точка универсальна в том смысле, что ее положение не зависит от коэффициента Пуассона и, следовательно, $L^{(1)}$ -кривая для волновода из любого материала проходит через нее. В общем случае существует бесконечное число таких точек с координатами $\Omega = \sqrt{2}\Gamma$, где $\Gamma = (2p - 1)$, $p = 1, 2, \dots$. Решение Ламе является также точкой пересечения $L^{(1)}$ - и $S_1^{(1)}$ -дисперсионных кривых. В этом можно убедиться путем сложения двух таких движений равной амплитуды: в силу симметрии $S_1^{(1)}$ -мода в два раза усиливает напряжения и перемещения $L^{(1)}$ -моды на плоскостях, параллельных Oxz или Oyz . В свою очередь, движения на плоскостях Oyz и Oxz соответственно взаимно уничтожаются. Подобные волны отвечают эквиволлюминальным модам Ламе.

Наличие точных решений волновых уравнений чрезвычайно важно для оценки точности результатов, получаемых на основе развитого нами аналитического решения. Дискретные наборы точек, отвечающие таким решениям, представлены на дисперсионных спектрах дышащих и крутильных мод колебаний (для остальных типов движений точные решения существуют при $\Omega > 5$). При этом индексами “ L ” обозначены моды Ламе, а “ M ” – моды Миндлина – Фокса [12]. Хорошее согласование

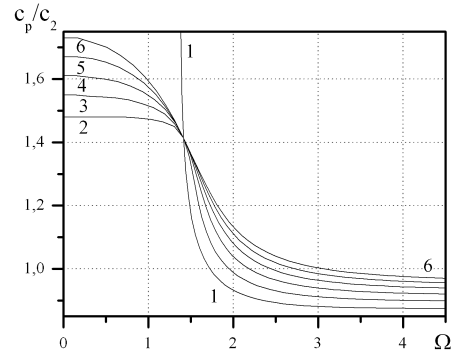


Рис. 4. Зависимость фазовой скорости основной продольной $L^{(1)}$ -моды квадратного волновода от коэффициента Пуассона:

$$1 - \nu = 0; \quad 2 - \nu = 0.1; \quad 3 - \nu = 0.2; \\ 4 - \nu = 0.3; \quad 5 - \nu = 0.4; \quad 6 - \nu = 0.495$$

данных, полученных на основе разных подходов, подтверждает эффективность предлагаемого подхода.

Высшие “дышащие” и все S_1 -моды имеют ненулевые частоты запираения, на которых движения не зависят от осевой координаты z . Фазовые скорости волн на частотах запираения принимают бесконечные значения, а групповые в большинстве случаев обращаются в нуль.

Продольные волны в волноводе на частотах запираения делятся на два независимых типа. Первый из них получим непосредственной подстановкой $\Gamma = 0$ в выражения для смещений (5), записанные с помощью коэффициентов X_n и Y_k . В этом случае частоты запираения являются собственными для прямоугольника, находящегося в обобщенном плоском напряженном состоянии, и зависят от ν . Движения этого типа связаны с планарными модами $u_x \neq 0$, $u_y \neq 0$, $u_z = 0$. Они подробно изучены в работах [20, 29, 30].

Второй тип частот запираения получим, считая $\text{sh } p_{2,n}a = 0$ и $\text{sh } q_{2,k}b = 0$, откуда при $\Gamma = 0$ следует

$$\Omega = 2\sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{a^2}}, \quad m, n = 0, 1, \dots$$

В выражениях (5) положим $A_n = 0$, $D_k = 0$. Тогда, устанавливая связь между оставшимися неизвестными $C_n = -iB_n\alpha_n/\beta_k$, $E_k = -iF_k\beta_k/\alpha_n$, имеем $u_x = 0$, $u_y = 0$. Из условия существования нетривиального решения амплитудные значения смещений вдоль оси волновода принимают вид

$$u_z = A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

где A – произвольная постоянная. Таким образом, второй тип движений связан с толщино-

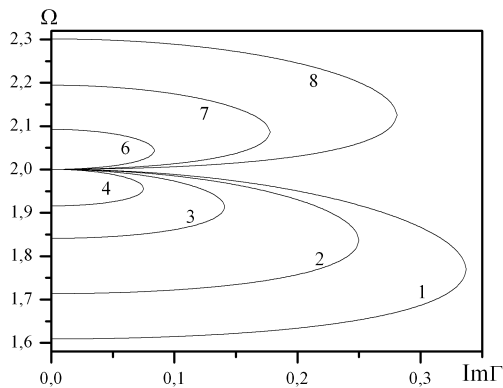


Рис. 5. Изменение петли, образованной $L^{(2)}$ - и $L^{(3)}$ -модами квадратного волновода, в зависимости от коэффициента Пуассона:
 1 - $\nu=0.125$; 2 - $\nu=0.175$; 3 - $\nu=0.225$; 4 - $\nu=0.25$;
 6 - $\nu=0.3$; 7 - $\nu=0.325$; 8 - $\nu=0.35$

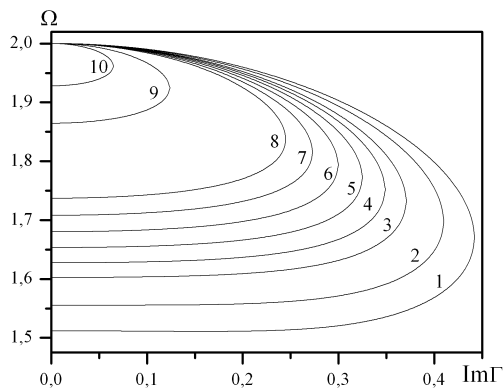


Рис. 6. Изменение петли, образованной $S_1^{(2)}$ - и $S_1^{(3)}$ -модами квадратного волновода, в зависимости от коэффициента Пуассона:
 1 - $\nu=0.125$; 2 - $\nu=0.175$; 3 - $\nu=0.225$; 4 - $\nu=0.25$;
 5 - $\nu=0.275$; 6 - $\nu=0.3$; 7 - $\nu=0.325$;
 8 - $\nu=0.35$; 9 - $\nu=0.45$; 10 - $\nu=0.495$

сдвиговыми модами, частоты которых не зависят от коэффициента Пуассона.

Относительное положение частот запирания первого и второго типов зависит от коэффициента Пуассона. Для $\nu=0.25$ частота запирания первой $L^{(2)}$ -моды принадлежит к типу планарных мод, а $L^{(3)}$ -мода связана с толщинно-сдвиговыми движениями. Подобная ситуация имеет место для $L^{(4)}$ - и $L^{(5)}$ -мод. В области чисто мнимых значений постоянной распространения они образуют петли, положение которых меняется с изменением величины ν . Как видно из рис. 5, петля для $L^{(2)}$ - и $L^{(3)}$ -волн начинается с частоты планарных мод. С увеличением ν от 0.125 до 0.275 петля уменьшается в размерах, а при $\nu=0.275$ полностью исчезает.

В этом случае частоты запирания мод совпадают и действительные ветви соединяются друг с другом на частотной оси. В точке пересечения ветвей групповая скорость имеет конечное ненулевое значение, причем для $L^{(2)}$ -ветви она отрицательна, а для $L^{(3)}$ – положительна. Дальнейшее увеличение ν ведет к повторному появлению петли, которая теперь начинается с частоты запирания толщинно-сдвиговой моды. Структура второй петли, связывающей $L^{(4)}$ - и $L^{(5)}$ -моды, изменяется аналогично, только ее исчезновение происходит при $\nu=0.316$. Подобные трансформации петель в области мнимых значений Γ наблюдаются также для волноводов в виде упругого слоя (совпадение частот при $\nu=1/3$) и круглого цилиндра ($\nu=0.2833$) [20, 24].

Для S_1 -мод существенной перестройки спектра при изменении ν не наблюдается. На рис. 6 показано, что с увеличением ν от 0.125 до 0.495 связывающая $S_1^{(2)}$ - и $S_1^{(3)}$ -моды петля уменьшается за счет сближения частоты запирания планарной моды с частотой толщинно-сдвиговой моды $\Omega=2$, однако полного ее исчезновения не происходит.

Для продольных мод квадратного волновода с ненулевой частотой запирания характерно наличие большого, по сравнению с упругим слоем и круглым цилиндром, количества участков с отрицательной кривизной ветвей в окрестности частоты запирания (они отвечают явлению “обратной” волны [20]). Здесь значения фазовых и групповых скоростей имеют противоположные знаки, а зависимости c_g от Ω опускаются ниже нулевого значения, образуя петли. Поведение величины c_g на участках обратных волн для низших дышащих и винтовых мод квадратного волновода исследовано в работе [22].

В коротковолновом диапазоне фазовая скорость нижней винтовой моды $S_1^{(1)}$ выходит не на скорость волны Рэлея c_R , как для волны Лэмба в слое, а на $c_E=0.9014 c_2$ – скорость угловой моды прямоугольного клина [21]. В свою очередь, с увеличением Γ фазовые скорости высших продольных мод выходят не на c_2 , а на c_R , независимо от соотношения сторон волновода. По всей видимости, в высокочастотном пределе все нормальные моды волновода становятся бездисперсионными. При увеличении частоты групповые скорости ведут себя более сложно, чем фазовые. Важный вопрос об их предельных значениях может быть решен с помощью методики, предложенной в работе [22], что выходит за рамки данного исследования.

В дополнение к ветвям с действительными значениями постоянной распространения на каждой

Табл. 1. Зависимость комплексных корней ($\Omega=0$) от коэффициента Пуассона ν для квадратного волновода

ν	$S_1^{(1)}$	$L^{(2)}$	$L^{(4)}$
0	$0.7160 + 1.3410i$	—	$0.7900 + 2.3950i$
0.10	$0.7217 + 1.3096i$	$0.7120 + 1.3733i$	$0.7483 + 2.3703i$
0.20	$0.7292 + 1.2803i$	$0.7066 + 1.4063i$	$0.7087 + 2.3436i$
0.25	$0.7334 + 1.2666i$	$0.7036 + 1.4233i$	$0.6894 + 2.3293i$
0.30	$0.7380 + 1.2532i$	$0.7005 + 1.4408i$	$0.6701 + 2.3144i$
0.35	$0.7427 + 1.2406i$	$0.6973 + 1.4586i$	$0.6512 + 2.2990i$
0.40	$0.7476 + 1.2282i$	$0.6939 + 1.4775i$	$0.6318 + 2.2819i$
0.45	$0.7527 + 1.2161i$	$0.6907 + 1.4972i$	$0.6118 + 2.2644i$

фиксированной частоте существует бесконечное число комплексных корней частотного уравнения и бесконечное (а не конечное, как в случае упругого слоя) число чисто мнимых корней. Поведение мнимых петель с изменением величины ν подробно исследовалось выше. При этом для прямоугольного волновода не наблюдалось ситуаций “раскрытия” петель, как это имеет место в случае волн Лэмба в слое [20]. Дисперсионные ветви в области мнимых значений Γ по структуре напоминают высшие антисимметричные моды кругового цилиндра [27]. Еще большее сходство с цилиндром наблюдается для комплексных участков дисперсионных кривых. Точки пересечения последних с плоскостью $\Omega=0$ (комплексные корни соответствующих статических задач) в случае круглого и квадратного волноводов зависят от коэффициента Пуассона, в то время, как для слоя подобная зависимость отсутствует. Значения первых трех комплексных корней, отвечающих $S_1^{(1)}$ -, $L^{(2)}$ - и $L^{(4)}$ -модам квадратного волновода на нулевой частоте, для различных значений коэффициента Пуассона приведены в табл. 1. Аналогичные данные для круглого цилиндра можно найти в работе [27]. Роль комплексных и мнимых корней дисперсионного определителя в задачах о распространении волн в бесконечных упругих волноводах ограничивается обеспечением полноты получаемого решения, однако оказывается существенной в задачах для конечных и полубесконечных тел.

2.2. Крутильные моды

По аналогии с продольными волнами, крутильные моды квадратного волновода делятся на два независимых типа: собственно крутильные T -моды с деформациями, в которых поперечное сечение испытывает серию вращательных колебаний относительно центральной оси, и вторые “винто-

вые” (S_2) моды, отвечающие поочередному сжатию волновода в направлении каждой из диагоналей. Их дисперсионные спектры представлены на рис. 7 и 8 соответственно.

При исследовании крутильных мод наибольший интерес вызывает вопрос о дисперсии низшей $T^{(1)}$ -моды. Начиная с работы Сен-Венана [31], для решения динамической задачи о кручении строились упрощенные одномерные теории [32,33], которые предсказывали, что низшая крутильная мода будет распространяться без дисперсии с постоянной скоростью. Это оказалось справедливым для круглого цилиндра, в котором скорость крутильных волн равна c_2 и совпадает с точным решением. Однако экспериментальные данные для волноводов прямоугольной формы [34, 35] показали наличие дисперсии у крутильных волн, особенно на высоких частотах. В работе [36] показано, что источниками дисперсии являются взаимодействие крутильных движений с осевыми деформациями и искажения в плоскости поперечного сечения. Попытки усовершенствовать приближенные теории с учетом указанных эффектов [33,36] к полному пониманию характера распространения крутильных волн не привели.

Вычисления, проведенные в рамках развитого подхода, показывают, что низшая крутильная $T^{(1)}$ -мода является дисперсионной, начиная с области низких частот. Фазовая и групповая скорости для волновода с коэффициентом Пуассона $\nu=0.25$ при $\Gamma=0$ равны ($c_p=c_g=c_2$), как и предсказывают одномерные теории. Зависимость фазовой скорости $T^{(1)}$ -моды от частоты Ω в интервале $0 < \Gamma < 5$ для различных значений коэффициента Пуассона приведена на рис. 9. При незначительном возрастании величины Γ скорость резко падает. С дальнейшим увеличением Γ величина c_p продолжает монотонно убывать и в коротковолновом пределе выходит на скорость изгибной угловой

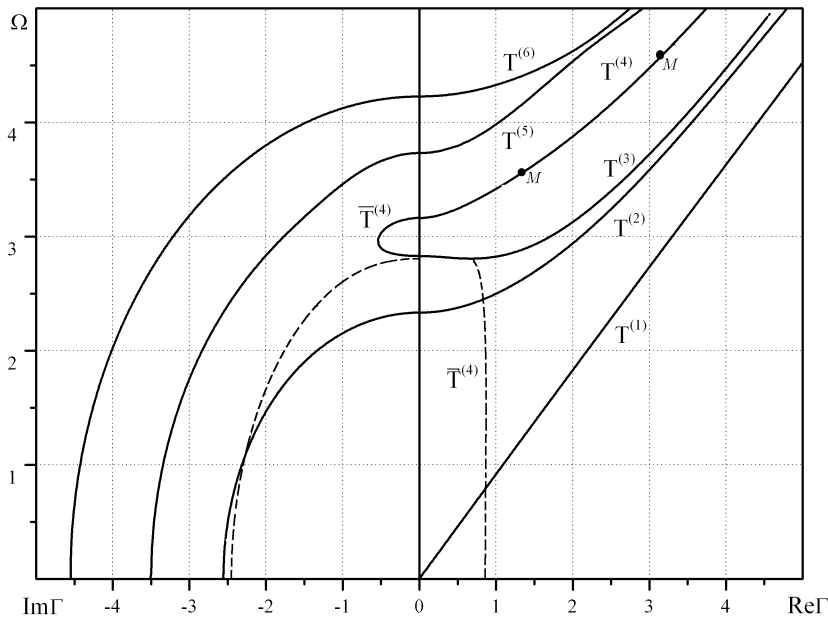


Рис. 7. Дисперсионный спектр T -мод квадратного волновода ($\nu=0.25$)

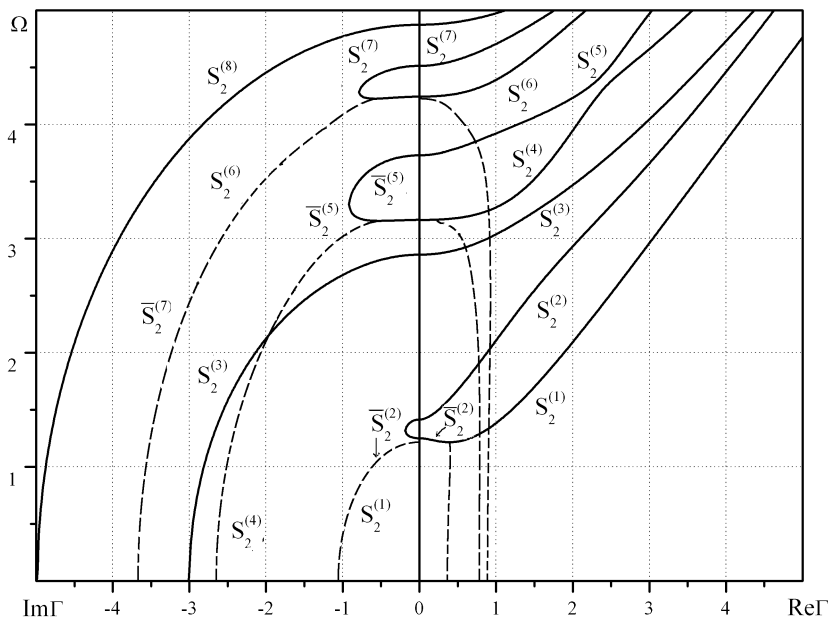
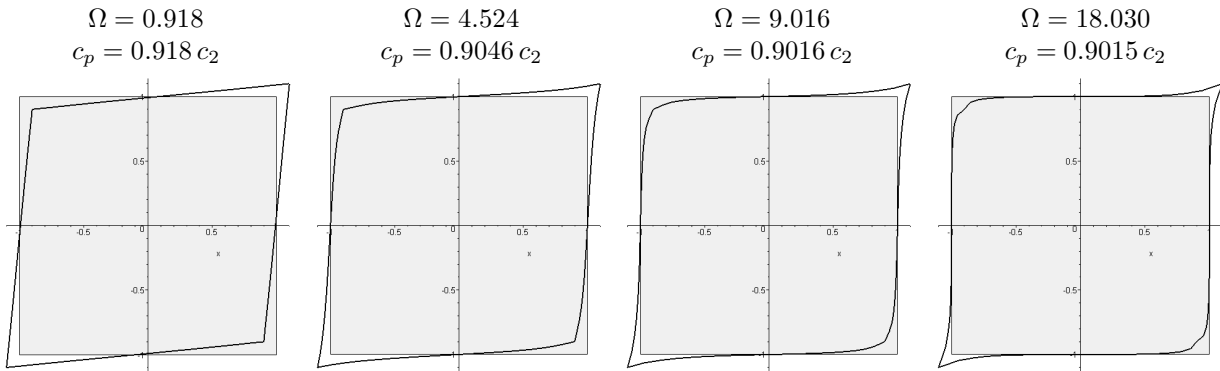


Рис. 8. Дисперсионный спектр S_2 -мод квадратного волновода ($\nu=0.25$)

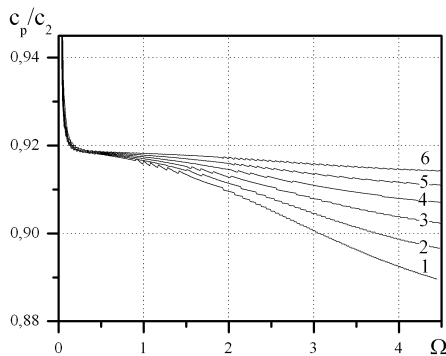
моды прямоугольного клина $c_E = 0.9014 c_2$. Этот вывод подкрепляется анализом кинематики моды. В табл. 2 показано изменение формы границы квадратного волновода при движении вдоль дисперсионной $T^{(1)}$ -ветви в моменты наибольших отклонений от положений равновесия. Видно, что с уве-

личением частоты интенсивные колебания сосредоточены вблизи ребер волновода.

Высшие крутильные и все винтовые S_2 -моды имеют ненулевые частоты запирания, на которых движения являются толщино-сдвиговыми ($u_x = 0, u_y = 0, u_z \neq 0$) или происходят в плоскости

Табл. 2. Форма границы квадратного волновода ($\nu=0.25$) на различных частотах $T^{(1)}$ -моды

 Табл. 3. Высокочастотные фазовые скорости T - и S_2 -мод квадратного волновода ($\nu=0.25$)

Γ	$T^{(1)}$	$T^{(2)}$	$T^{(3)}$	$T^{(4)}$	$T^{(5)}$	$S_2^{(1)}$	$S_2^{(2)}$	$S_2^{(3)}$	$S_2^{(4)}$	$S_2^{(5)}$
5	0.9046	1.0327	1.0661	1.1964	1.2488	0.9530	1.0665	1.0969	1.2084	1.2917
10	0.9016	0.9475	1.0103	1.0132	1.0512	0.9314	0.9692	1.0129	1.0386	1.0692
20	0.9015	0.9255	0.9421	0.9673	1.0001	0.9231	0.9340	0.9524	0.9789	1.0028
40	0.9014	0.9207	0.9247	0.9310	0.9397	0.9204	0.9235	0.9286	0.9357	0.9448


 Рис. 9. Зависимость фазовой скорости основной крутильной моды $T^{(1)}$ квадратного волновода

от коэффициента Пуассона:

- 1 - $\nu=0$; 2 - $\nu=0.1$; 3 - $\nu=0.2$;
 4 - $\nu=0.3$; 5 - $\nu=0.4$; 6 - $\nu=0.495$

поперечного сечения ($u_x \neq 0, u_y \neq 0, u_z = 0$). Частоты первого типа

$$\Omega = \sqrt{\frac{(2n-1)^2}{a^2} + \frac{(2m-1)^2}{b^2}}, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

не зависят от коэффициента Пуассона и получаются таким же образом, как и в рассмотренном выше случае продольных мод. Несколько первых

значений отвечают частотам загираания следующих мод: $S_2^{(1)}$ ($\Omega = \sqrt{2}$), $S_2^{(4)}$ и $T^{(4)}$ ($\Omega = \sqrt{10}$), $S_2^{(6)}$ ($\Omega = 3\sqrt{2}$). Частоты загираания остальных мод, в которых отсутствует осевая компонента перемещений, зависят от ν и являются собственными для прямоугольника, находящегося в состоянии плоской деформации.

Относительное положение частот загираания на оси $\Gamma = 0$ определяется величиной ν . При этом винтовые S_2 -моды ведут себя аналогично S_1 -модам. В структуре спектра для T -мод отметим следующую интересную особенность. Из рис. 7 видно, что единственная петля в мнимой плоскости соединяет частоты загираания, отвечающие различным типам движений. Остальные моды, за исключением основной, простираются до нулевого значения частоты вдоль мнимых участков дисперсионных кривых. Изменение коэффициента Пуассона в диапазоне $0 \leq \nu < 0.5$ приводит лишь к сдвигу кривых вдоль частотной оси. При этом положение и размеры петли в мнимой плоскости не изменяются. Это связано с тем, что частота загираания $\Omega = 2\sqrt{2} \approx 2.8284$, являющаяся исходной для петли, отвечает точному решению Ламе для прямоугольника в состоянии плоской деформации [37], а ее значение не зависит от ν .

При возрастании частоты фазовые скорости

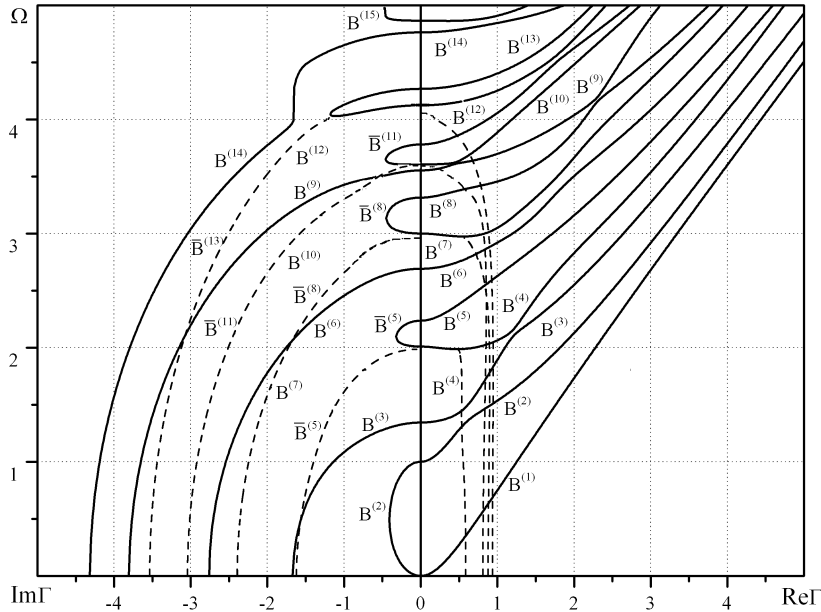


Рис. 10. Дисперсионный спектр B -мод квадратного волновода ($\nu=0.25$)

высших мод стремятся к скорости поверхностной волны Рэлея. Это подтверждается данными табл. 3, в которой приведены расчетные величины c_p/c_2 для квадратного волновода с $\nu=0.25$ при различных Γ . Для действительных значений постоянной распространения $T^{(4)}$ - и $S_2^{(2)}$ -ветви имеют участки с противоположными значениями фазовой и групповой скоростей, которые начинаются в точках соединения с комплексными ветвями дисперсионных кривых. Требование однозначного выделения ветвей позволяет построить четкие картины спектров. Как и в случае продольных волн, при $\Omega=0$ комплексные корни дисперсионных соотношений (14)–(15) демонстрируют зависимость от коэффициента Пуассона.

2.3. Изгибные моды

На рис. 10 представлен дисперсионный спектр изгибных B -мод квадратного волновода. Характеристическое соотношение, отвечающее системе (16), имеет такой же вид, как и в случае прямоугольника. Это ведет к увеличению числа дисперсионных кривых в рассматриваемом диапазоне частот. Движения в B -модах характеризуются изгибом относительно одной из срединных осей поперечного сечения и растяжением–сжатием относительно второй оси.

Основная изгибная $B^{(1)}$ -мода имеет нулевую частоту запираия и обладает дисперсией, которая в

низкочастотном диапазоне корректно описывается элементарной теорией изгиба [26]. Согласно этой теории дисперсионная кривая имеет форму параболы с вершиной в начале координат, поэтому фазовая скорость при $\Gamma=0$ обращается в нуль. С увеличением Γ она монотонно возрастает и для очень коротких длин волн стремится сверху к скорости угловой моды прямоугольного клина c_E . Значения фазовых скоростей и форма границы волновода при движениях в $B^{(1)}$ -моде для различных Γ приведены в табл. 4 и 5 соответственно. На рис. 11 представлены зависимости c_p/c_2 от Ω для различных значений коэффициента Пуассона.

Движения на частотах запираия высших изгибных мод делятся на два типа – толщинно-сдвиговые со смещениями вида

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = A \sin \frac{(2n+1)y}{2b} \cos \frac{mx}{a}$$

и планарные, у которых осевая компонента смещений обращается в нуль. Аналогично случаям продольных и крутильных волн, частоты толщинно-сдвигового типа не зависят от коэффициента Пуассона ν и определяются из условий $\text{sh } q_{2,n}a = 0$, $\text{ch } p_{2,m}b = 0$ при $\Gamma = 0$:

$$\Omega = 2\sqrt{\frac{(2n+1)^2}{4b^2} + \frac{m^2}{a^2}}, \quad n, m = 0, 1, \dots$$

Планарные частоты запираия зависят от величины ν и для рассматриваемого квадратного волно-

Табл. 4. Форма границы квадратного волновода ($\nu=0.25$) на различных частотах $B^{(1)}$ -моды

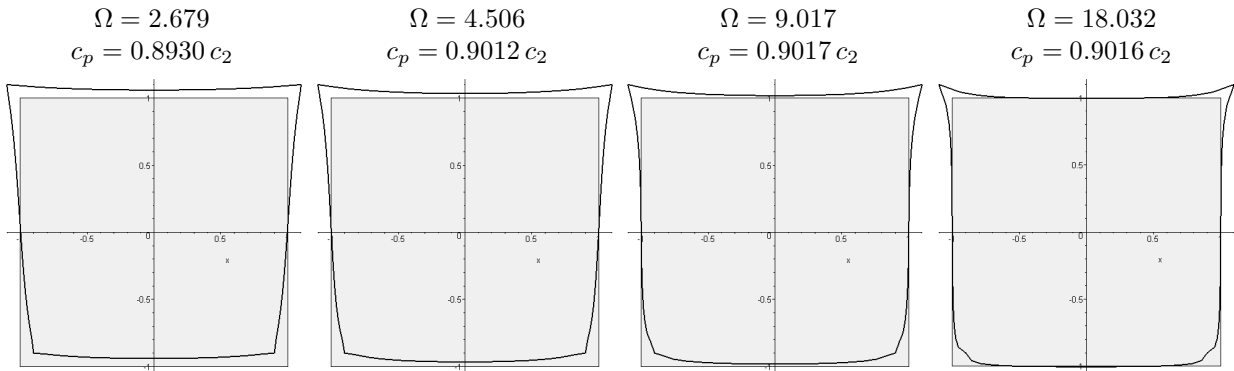


Табл. 5. Высокочастотные фазовые скорости B -мод квадратного волновода ($\nu=0.25$)

Γ	$B^{(1)}$	$B^{(2)}$	$B^{(3)}$	$B^{(4)}$	$B^{(5)}$	$B^{(1)}$	$B^{(7)}$	$B^{(8)}$	$B^{(9)}$	$B^{(10)}$
5	0.9012	0.9370	0.9856	1.0470	1.0645	1.1209	1.1594	1.1737	1.2752	1.2831
10	0.9017	0.9242	0.9374	0.9586	0.9879	1.0078	1.0243	1.0279	1.0347	1.0639
20	0.9016	0.9206	0.9241	0.9298	0.9375	0.9473	0.9592	0.9732	0.9890	1.0016
40	0.9014	0.9196	0.9206	0.9220	0.9240	0.9266	0.9297	0.9334	0.9376	0.9423

вода имеют значения $\Omega = 1.3436, 2, 2.6909, 3.3143, 3.5529, 3.7799 \dots$

Приведенные в табл. 5 данные позволяют сделать вывод о том, что в высокочастотной области фазовые скорости высших изгибных мод в пределе стремятся к скорости поверхностной волны Рэлея $c_R = 0.9194 c_2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе метода суперпозиции решена задача о распространении нормальных волн в прямоугольном упругом волноводе. Компоненты вектора смещений приведены для четырех типов мод волновода, существующих независимо друг от друга. Вид дисперсионных соотношений и интерпретация численных результатов существенно упрощаются в случае волновода квадратного поперечного сечения, когда нормальные моды удается явным образом разделить на симметричные и антисимметричные относительно диагонали. Знание и учет асимптотических свойств неизвестных позволяют уменьшить порядок дисперсионного уравнения, получаемого при редукции бесконечного определителя. Благодаря этому значительно повышается точность вычислений, особенно в области высоких частот, что подтверждается хорошим

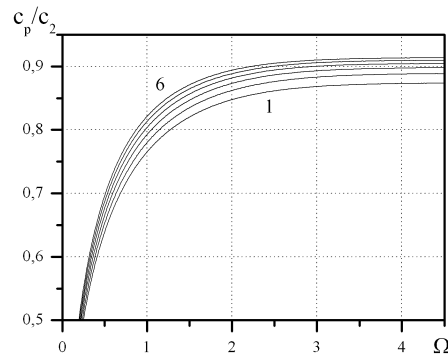


Рис. 11. Зависимость фазовой скорости основной изгибной моды $B^{(1)}$ квадратного волновода

от коэффициента Пуассона:

- 1 - $\nu=0$; 2 - $\nu=0.1$; 3 - $\nu=0.2$;
4 - $\nu=0.3$; 5 - $\nu=0.4$; 6 - $\nu=0.495$

согласованием с точными решениями в модах Ламе и Миндлина – Фокса. На основе представленного решения для каждого типа мод построены дисперсионные кривые, устанавливающие связь действительных, мнимых и комплексных значений постоянной распространения с частотой. Насколько известно автору, такие результаты для прямоугольного упругого волновода получены впервые.

Анализ дисперсионных свойств квадратного

волновода показал наличие трех основных мод, существующих при любых частотах – продольной “дышащей”, крутильной и изгибной. Они обладают дисперсией, которая в низкочастотном диапазоне удовлетворительно описывается с помощью элементарных теорий. Поведение фазовых скоростей основных мод определяется коэффициентом Пуассона. В коротковолновом диапазоне скорость первой “дышащей” моды стремится к скорости поверхностной волны Рэлея, а крутильная и изгибная моды выходят на скорость угловой моды клина с прямым углом при вершине. Такой вывод подтверждается анализом кинематики антисимметричных волн, который показывает, что на высоких частотах интенсивные движения сосредоточены вблизи ребер волновода. Для двух винтовых мод волновод оказывается запертым в низкочастотной области.

Высшие нормальные моды всех типов волн квадратного волновода имеют ненулевые частоты запертия, которые можно разделить на две группы в соответствии с типом движений на них. Первая группа связана с планарными модами. Их частоты запертия являются собственными для прямоугольника, находящегося в состоянии плоской деформации, и зависят от коэффициента Пуассона. Движения второй группы являются толщинносдвиговыми. Для них значения частот запертия вычисляются достаточно просто и не зависят от величины ν . Важно отметить, что изменение физических параметров материала влияет на взаимное расположения частот запертия на частотной оси, однако не влечет за собой существенных изменений в структуре спектров.

Дисперсионные кривые в области действительных значений постоянной распространения могут сближаться друг с другом, однако никогда не пересекаются, если движения принадлежат одному типу симметрии. Этот вывод оказывается не справедливым для мнимых участков кривых. В целом, мнимые и комплексные ветви для пяти типов волн квадратного волновода ведут себя аналогично ветвям для антисимметричных волн круглого цилиндра. В обоих указанных случаях для каждой фиксированной частоты существует бесконечное число мнимых значений постоянной распространения, а начальные точки комплексных ветвей на нулевой частоте зависят от коэффициента Пуассона.

Установлено, что в высокочастотной области фазовые скорости высших мод выходят не на c_2 , а на скорость поверхностной волны Рэлея c_R . Кроме того, дисперсия нормальных волн в квадратном волноводе характеризуется наличием значительно

большого (по сравнению со слоем и цилиндром) количества участков с противоположными знаками фазовых и групповых скоростей, отвечающих явлению “обратной” волны. Это объясняется влиянием дополнительной пары граничных поверхностей на процесс формирования и распространения нормальных волн в волноводе. Тем не менее, для полного понимания дисперсионных свойств прямоугольного волновода необходимо более детальное исследование поведения дисперсионных кривых в коротковолновом диапазоне с анализом групповых скоростей высших мод, дополненное данными экспериментов.

1. Taweel H., Dong S. B., Kazic M. Wave reflection from the free end of a cylinder with an arbitrary cross-section // *Int. J. Solids Struct.*– 2000.– **37**.– P. 1701–1726.
2. Hayashi T., Song W. J., Rose J. L. Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example // *Ultrasonics.*– 2003.– **41**.– P. 175–183.
3. Hayashi T., Tamayama C., Murase M. Wave structure analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross-section // *Ultrasonics.*– 2006.– **44**.– P. 17–24.
4. Микер Т., Мейтцлер А. Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинах // *Физическая акустика / Под. ред. У. Мэзона. Часть 1А.*– М.: Мир.– 1966.– С. 140–203.
5. Morse R. W. The velocity of compressional waves in rods of rectangular cross section // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1950.– **22**.– P. 219–223.
6. Kynch G. J. The fundamental modes of vibration of uniform beams for medium wave lengths // *Brit. J. Appl. Phys.*– 1957.– **8**, N 2.– P. 64–73.
7. Nigro N. J. Steady-state wave propagations in infinite bars of noncircular cross section // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1966.– **40**.– P. 1501–1508.
8. Уэйд Д., Торвик П. Распространение упругих волн в неоднородных стержнях сложного сечения // *Прикл. мех.*– 1973.– **10**, N 4.– С. 226–231.
9. Koshiha M., Tanifuji T., Suzuki M. Acoustic wave propagation in rods of rectangular cross section // *Trans. Inst. Electr. Commun. Engng Jap.*, B.– 1974.– **57**.– P. 734–741.
10. Miamoto T., Yasuura K. Numerical analysis on isotropic elastic waveguides by mode-matching method // *IEEE Trans. Son. Ultrason.*– 1977.– **SU-24**.– P. 359–375.
11. Fraser W. B. Stress wave propagation in rectangular bars // *Int. J. Solids Struct.*– 1969.– **5**.– P. 379–397.
12. Mindlin R. D., Fox E. A. Vibration and waves in elastic bars of rectangular cross-section // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*– 1960.– **27**.– P. 152–158.
13. Kynch G. J., Green W. A. Vibrations of beams – I. Longitudinal modes // *Quart. J. Mech. Appl. Math.*– 1957.– **10**.– P. 63–73.
14. Green W. A. Vibrations of beams – II. Torsional modes // *Quart. J. Mech. Appl. Math.*– 1957.– **10**.– P. 74–78.
15. Green W. A. Vibrations of beams – III. Screw modes // *Quart. J. Mech. Appl. Math.*– 1959.– **12**.– P. 22–28.

16. McNiven H. D. Literature review: approximate theories governing axisymmetric wave propagation in elastic rods // Shock Vibr. Digest.– 1975.– 7, N 3.– P. 90–96.
17. Pao Y. H. Elastic waves in solids // Trans. ASME, J. Appl. Mech.– 1983.– 50.– P. 1152–1164.
18. Al-Mousawi M. M. On experimental studies of longitudinal and flexural wave propagation: An annotated bibliography // Appl. Mech. Revs.– 1986.– 39.– P. 853–865.
19. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров.– К.: Наук. думка, 1978.– 264 с.
20. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
21. Мелешко В. В. Распространение высокочастотных продольных волн в прямоугольном волноводе // Докл. АН УССР.– 1982.– N 2.– С. 36–40.
22. Гринченко В. Т., Костржицкая Е. В., Мелешко В. В. Групповые и фазовые скорости нормальных волн в прямоугольном волноводе // Докл. АН УССР.– 1989.– N 7.– С. 45–48.
23. Костржицкая Е. В., Мелешко В. В. Распространение гармонических волн в упругом прямоугольном волноводе // Прикл. мех.– 1990.– 26, N 8.– С. 69–74.
24. Medick M. A. Extensional waves in elastic bars of rectangular cross section // J. Acoust. Soc. Amer.– 1968.– 43.– P. 152–161.
25. Бондаренко А. А. Об одном методе определения комплексных корней дисперсионных уравнений // Доп. НАН України.– 2007.– N 12.– С. 41–44.
26. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах.– М.: ИИЛ, 1955.– 192 с.
27. Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // J. Acoust. Soc. Amer.– 1972.– 51.– P. 265–283.
28. Thurston R. N. Elastic waves in rods and clad rods // J. Acoust. Soc. Amer.– 1978.– 64.– P. 1–37.
29. Medick M. A., Pao Y. H. Extensional vibrations of thin rectangular plates // J. Acoust. Soc. Amer.– 1965.– 37.– P. 59–65.
30. Holland R. Contour piezoelectric plates // IEEE Trans. Son. Ultrason.– 1968.– SU-15.– P. 97–105.
31. Saint-Venant B. Mémoire sur les vibrations tournantes des verges élastiques // C. R. Acad. Sci. Paris.– 1849.– 28.– P. 69–72.
32. Green W. A. Dispersion relations for elastic waves in bars // Progress in Solid Mechanics, vol. 1.– North-Holland, 1960.– P. 225–261.
33. Barr A. D. S. Torsional waves in uniform rods of non-circular section // J. Mech. Engng Sci.– 1962.– 4.– P. 127–135.
34. Shear S. K., Focke A. B. The dispersion of supersonic waves in cylindrical rods of polycrystalline silver, nickel and magnesium // Phys. Rev.– 1940.– 57.– P. 532–537.
35. Spinner S., Valore R. C. Comparison of theoretical and empirical relations between the shear modulus and torsional resonance frequencies for bars of rectangular cross section // J. Resch Nat. Bureau Stand.– 1958.– 60.– P. 459–464.
36. Bleustein J. L., Stanley R. M. A dynamical theory of torsion // Int. J. Solids Struct.– 1970.– 6.– P. 569–586.
37. Бондаренко А. О. Моды Ламе для пружного прямокутника // Вісн. Київ. ун-ту.– 2007.– Вип. 17.– С. 41–45.