

УДК 534.213:534.232.74

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРАХ. ЧАСТЬ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В ФЕРРОМАГНИТНЫХ И НЕФЕРРОМАГНИТНЫХ СТЕРЖНЯХ В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ЧАСТОТ

О. Н. ПЕТРИЩЕВ

Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев

Получено 24.10.2006

В этой статье на основе решений, полученных в первой части исследования [1], построена математическая модель ультразвукового преобразователя электромагнитного типа. Изучены особенности процесса возбуждения нормальных волн в ферромагнитных и неферромагнитных стержнях в широком диапазоне частот.

У цій статті на базі розв'язків, одержаних у першій частині дослідження [1], побудовано математичну модель ультразвукового перетворювача електромагнітного типу. Вивчені особливості процесу збудження нормальних хвиль у ферромагнітних і неферромагнітних стержнях у широкому діапазоні частот.

A mathematical model of an electromagnetic ultrasonic transducer has been developed in this paper on the basis of the solutions obtained in the first part of the study [1]. The features of normal wave excitation process in the ferromagnetic and non-ferromagnetic rods have been studied in a wide frequency range.

1. МЕТОДИКА РАСЧЕТА СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ СПОСОБЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В МЕТАЛЛАХ

Чтобы не отвлекаться на частотно-зависимые особенности процесса возбуждения упругих волн,

обусловленные формой и размерами источника переменного магнитного поля в составе ультразвукового преобразователя электромагнитного типа, рассмотрим модельную ситуацию, расчетная схема которой показана на рис. 1.

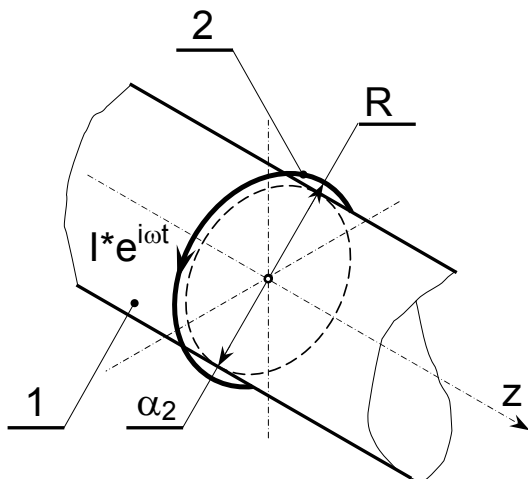


Рис. 1. Расчетная схема преобразователя электромагнитного типа

Переменное магнитное поле в металлическом стержне (позиция 1) создается витком бесконечно тонкого проводника (позиция 2), по которому протекает переменный электрический ток $i(t) = I^* e^{i\omega t}$. Кроме того, в области существования переменного магнитного поля с помощью некоторых внешних устройств (на схеме не показаны) создано постоянное магнитное поле, вектор напряженности которого полностью определяется аксиальным компонентом H_z^0 . Эту величину считаем постоянной в пределах области, в которой существуют заметные уровни компонент вектора напряженности переменного магнитного поля $\vec{H}^*(\rho, z)e^{i\omega t}$. Напряженность постоянного поля подмагничивания и амплитуда переменного тока выбраны таким образом, что для всего металлического стержня выполняется сильное неравенство $|H_z^0| \gg |\vec{H}^*(\rho, z)|$.

Если стержень выполнен из ферромагнитного металла, то совокупность переменного и постоянного магнитных полей создает деформации сжа-

тия – растяжения, обусловленные поверхностными нагрузками

$$\sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_2, z) = m_2 H_z^0 H_z^*(\alpha_2, z),$$

$$\sigma_{\rho z}^*(\alpha_2, z) = \frac{m_1 - m_2}{2} H_z^0 H_\rho^*(\alpha_2, z)$$

и распределенными в объеме силами с объемными плотностями

$$f_\rho^*(\rho, z) = \sigma_{\rho\rho}^*(\rho, z) + \sigma_{\rho z, z}^*(\rho, z) + \frac{1}{2} [\sigma_{\rho\rho}^*(\rho, z) - \sigma_{\vartheta\vartheta}^*(\rho, z)],$$

$$f_z^*(\rho, z) = \sigma_{\rho z, z}^*(\rho, z) + \sigma_{z z, z}^*(\rho, z) + \frac{1}{\rho} \sigma_{\rho z}^*(\rho, z).$$

Здесь m_1 и m_2 – магнитоэлектрические константы;

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}^*(\rho, z) = m_2 H_z^0 H_z^*(\rho, z);$$

$$\sigma_{z z}^*(\rho, z) = m_1 H_z^0 H_z^*(\rho, z).$$

Помимо этого, в металле возникает вихревой ток, вектор поверхностной плотности которого определяется окружной компонентой J_ϑ^* . В аксиальном поле подмагничивания этот ток формирует радиально ориентированную силу Лоренца с объемной плотностью $L_\rho^* = \mu_3^\varepsilon H_z^0 J_\rho^*$. Здесь μ_3^ε – магнитная проницаемость, измеряемая в направлении поля подмагничивания в режиме постоянства деформаций в объеме ферромагнетика. Указанная система силовых факторов дополняется составляющими тензора Максвелла

$$M_{\rho z}^*(\alpha_2, z) = \mu_3^\varepsilon H_z^0 H_\rho^*(\alpha_2, z),$$

$$M_{\rho\rho}^*(\alpha_2, z) = -\frac{1}{2} \mu_3^\varepsilon H_z^0 H_z^*(\alpha_2, z),$$

которые определяют поперечное действие электромагнитного поля на боковую поверхность металлического стержня.

Очевидно, что количественная оценка перечисленных силовых факторов становится возможной лишь после вычисления компонент $H_\rho^*(\rho, z)$ и $H_z^*(\rho, z)$ вектора напряженности переменного магнитного поля в объеме токопроводящего цилиндра.

Искомые величины $H_\beta^*(\rho, z)$, $\beta = \rho, z$ определяются в результате решения следующей квазистационарной граничной задачи электродинамики: требуется найти окружную компоненту $A_\vartheta^*(\rho, z)$ векторного потенциала электромагнитного поля, который вне пределов ферромагнитного цилиндра

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-A_{\vartheta, z z}^*(\rho, z) - A_{\vartheta, \rho\rho}^*(\rho, z) - \frac{1}{\rho} A_{\vartheta, \rho}^*(\rho, z) + \frac{1}{\rho^2} A_\vartheta^*(\rho, z) - R_\vartheta(\rho, z) = 0 \quad (1)$$

$$\forall (\rho > \alpha_2, |z| < \infty)$$

и обращается в нуль при бесконечном удалении от боковой поверхности цилиндра:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} A_\rho^*(\rho, z) = 0, \quad (2)$$

а на поверхности цилиндра $\rho = \alpha_2$ удовлетворяет условиям

$$A_{\vartheta, z}^*(\alpha_2, z) + \mu_2^\varepsilon H_\rho^*(\alpha_2, z) = 0 \quad (3)$$

$$\forall z \in (-\infty, \infty),$$

$$\frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{\rho} A_\vartheta^*(\rho, z) + A_{\vartheta, \rho}^*(\rho, z) \right] \Big|_{\rho=\alpha_2} - H_z^*(\alpha_2, z) = 0 \quad (4)$$

$$\forall z \in (-\infty, \infty).$$

Компоненты вектора напряженности переменного магнитного поля внутри цилиндра $H_\beta^*(\rho, z)$, $\beta = \rho, z$ удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$H_{\rho, z}^*(\rho, z) - H_{z, \rho}^*(\rho, z) = r_2 E_\vartheta^*(\rho, z),$$

$$-E_\vartheta^*(\rho, z) = -i\omega \mu_2^\varepsilon H_\rho^*(\rho, z), \quad (5)$$

$$\frac{1}{\rho} E_\vartheta^*(\rho, z) + E_{\vartheta, \rho}^*(\rho, z) = -i\omega \mu_3^\varepsilon H_z^*(\rho, z).$$

В соотношениях (1)–(5) приняты следующие обозначения: $R_\vartheta(\rho, z) = \mu_0 J_0^* \quad \forall (\rho, z) \in S_0$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная проницаемость вакуума; J_0^* – плотность переменного тока в проводнике. Заметим, что $I^* = \lim_{S_0 \rightarrow 0} (J_0^* S_0)$, где S_0 – площадь поперечного сечения проводника; r_2 – компонента тензора электрической проводимости материала цилиндра, перпендикулярная направлению постоянного поля подмагничивания; $E_\vartheta^*(\rho, z)$ – окружная компонента вектора напряженности переменного электрического поля, сопряженного с переменным магнитным полем; μ_2^ε и μ_3^ε – магнитные проницаемости в поперечном и продольном относительно направления поля подмагничивания направлениях, определяемые при постоянных деформациях ферромагнетика.

Эффективное решение граничной задачи электродинамики (1)–(5) реализуется с помощью метода интегральных преобразований [2]. Однако формальное его применение приводило к непреодолимым трудностям на этапе перехода от интегральных образов к оригиналам искомым функций. Причина этого заключалась в отсутствии четкого определения параметра интегрального преобразования. Это обстоятельство заставило С. Н. Шубаева в работе [3] записать конечные результаты с формальными решениями в виде интегралов Фурье и Фурье–Бесселя. Автор очень содержательной статьи [4] вышел из положения с помощью численного интегрирования обратных интегральных преобразований. Отмеченные трудности позволили Ю. М. Шкарлету в работе [5] сделать следующее заявление: “Точные решения для нитевидных моделей содержат неберущиеся несобственные интегралы от довольно громоздких комбинаций элементарных и специальных функций и для непосредственного анализа практически непригодны; используются они для построения графиков с помощью расчетов на ЭВМ, а также для создания широко применяющихся упрощенных приближенных решений. . . Простота нитевидных моделей в конце концов дорого обходится – теряется слишком много инженерного и машинного времени при выполнении расчетов, затруднены анализ и дальнейшее использование решений”.

Для того, чтобы “неберущиеся интегралы” исчезли, в [5] были предложены так называемые “гармонические модели”. Так, источник возмущений моделировался с помощью гармонических функций типа $\cos(\omega t \pm \nu x)$, когда речь идет о стержнях или полосах, длина которых отсчитывается вдоль оси Ox , или комбинации функций $J_1(\nu \rho) \cos \omega t$, когда речь идет о возбуждении ультразвуковых цилиндрических волн в металлических пластинах (под $J_1(\nu \rho)$ подразумеваем функцию Бесселя первого порядка, а под ρ – текущее значение радиальной координаты). В обеих записях ω – круговая частота смены знака (полярности) возмущения (внешних сил) во времени; ν – “пространственная частота” смены знака возмущения. Заметим, что прямое преобразование Фурье, которым начинается решение задачи электродинамики для стержня или полосы, дает обобщенную δ -функцию Дирака $\delta(\lambda \pm \nu)$ с единичным весом, аргумент которой фактически определяет параметр интегрального преобразования – он равен “пространственной частоте” смены знака внешних сил.

Неадекватность “гармонических” моделей реальным конструкциям ультразвуковых преобразователей электромагнитного типа очевидна. Без-

условно, это понимал и сам автор “гармонических” моделей. В качестве аргумента в их защиту он пишет следующее [5, стр. 12]: “. . . если источник поля описывается синусоидально изменяющейся по координате функцией, то решение не содержит несобственных интегралов по переменной, отображающей текущую пространственную частоту. Но чтобы поле содержало одну пространственную гармонику, его источник должен быть бесконечно протяженным вдоль поверхности объекта. Не является ли этот факт существенным препятствием к использованию гармонических моделей?”

Во-первых, бесконечная модель с успехом и широко используется (цилиндр в однородном продольном и поперечном полях), во-вторых, в данном случае “бесконечно большие” (гармонические модели) и “бесконечно малые” сечения проводов нитевидных моделей) величины – относительно одинаково далеки от практических величин. Вероятно, в некоторых исключительных случаях могут проявиться особенно ярко как достоинства, так и недостатки каждого из типов моделей. С точки зрения физико-математической обе модели принципиально равноценны, так как потенциальные возможности применения их для расчета реальных преобразователей (с произвольным сечением катушек) одинаковы. Явное преимущество гармонических моделей заключается, прежде всего, в упрощении решений для них. Кроме того, гармонические модели лучше должны соответствовать плоским преобразователям и преобразователям в виде периодических структур, используемым в электромагнитно-акустическом методе.”

В этой цитате следует особо выделить тезис о физико-математической равноценности обеих моделей. Это утверждение, мягко говоря, не соответствует реальному положению вещей. Так называемые “нитевидные модели” доставляют решения, имеющие смысл функций Грина для соответствующих областей. Сам Ю. М. Шкарлет пишет об этом четырьмя абзацами ранее: “Достоинством нитевидных моделей является их фундаментальность в том смысле, что из отдельных нитей можно построить преобразователь с любыми размерами поперечного сечения обмоток катушек”. К этому следовало бы добавить еще одну фразу: “Путем вычисления свертки (интеграла Дюамеля) от полученных решений”.

Таким образом, вывод о физико-математической равноценности “гармонических” и “нитевидных” моделей следует признать ошибочным. Самое же главное заключается в том, что проблема корректного определения параметра интегрального преобразования с применением

“гармонических” моделей не разрешается, а трансформируется в проблему корректного определения “пространственной” частоты ν . Если бы в работе [5] была предложена какая-то процедура, строго и формально определяющая параметр ν , то использование формулировок типа “основы общей теории...”, “закономерности возбуждения...” в названиях статей [6–9] в полной мере отражало бы их качественное содержание. В действительности же идеология “гармонических моделей” является суррогатным вариантом фундаментального метода интегральных преобразований, применение которого позволяет получать физически содержательные решения задач математической физики в частных производных.

Как это ни парадоксально, но никаких проблем, сопряженных с использованием метода интегральных преобразований для решения граничной задачи (1)–(5), не возникает. Действительно, формулы [1, (36), (38), (40)] для расчета амплитудных множителей продольных волн содержат в себе интегральные образы объемных и поверхностных плотностей внешних нагрузок. Рассмотрим, например, соотношение [1, (40)]. Применительно к решаемой задаче его можно переписать в следующем виде:

$$U_0^{(\pm)} = -\frac{im_1 H_z^0}{E\gamma_1 \alpha_2^2} \int_0^{\alpha_2} \rho \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} H_{z,z}^*(\rho, z) e^{\mp i\gamma_1 z} dz \right\} d\rho. \quad (6)$$

Введем обозначение

$$H_z^*(\rho, \pm\gamma_1) = \int_{-\infty}^{\infty} H_z^*(\rho, z) e^{\pm i\gamma_1 z} dz. \quad (7)$$

Если переменное магнитное поле создается реальным (ограниченным по мощности и размерам) источником, то компоненты вектора напряженности $H_{\beta}^*(\rho, z)$ ($\beta = \rho, z$) удовлетворяют условиям физической реализуемости:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \{H_{\beta}^*(\rho, z); H_{\beta,z}^*(\rho, z)\} = 0, \quad (8)$$

т.е. и магнитная, и электрическая составляющие электромагнитного поля обращаются в нуль при бесконечном удалении от источника. Предельное условие (8) позволяет утверждать, что $H_{\beta,z}^*(\rho, \pm\gamma_1) = \mp i\gamma_1 H_{\beta}^*(\rho, \pm\gamma_1)$, $\beta = \rho, z$. Тогда

выражение (6) можно записать как

$$U_0^{(\pm)} = \pm \frac{m_1 H_z^0}{E\alpha_2^2} \int_0^{\alpha_2} \rho H_z^*(\rho, \mp\gamma_1) d\rho. \quad (9)$$

Анализируя вид соотношения (9), делаем вывод о том, что для определения амплитудных множителей ультразвуковых волн, возбуждаемых электромагнитным способом, нужно определить лишь интегральные образы компонент вектора напряженности переменного магнитного поля и (если в этом есть необходимость) интегральные образы компонент вектора поверхностной плотности вихревого тока. При этом в роли параметра интегрального преобразования выступает волновое число распространяющейся упругой волны.

Исходя из этого, решение граничной задачи (1)–(5) будем искать в терминах Фурье-образов:

$$F(\rho, \pm\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\rho, z) e^{\pm i\gamma z} dz, \quad (10)$$

где $F(\rho, \pm\gamma)$ – Фурье-образ определяемой физической величины; γ – волновое число распространяющейся ультразвуковой волны.

Применив к соотношениям (1)–(5) интегральное преобразование (10), после выполнения достаточно стандартных вычислительных процедур получаем следующее:

$$H_{\rho}^*(\rho, \pm\gamma) = \mp i I^* \frac{\gamma}{\zeta} D(\gamma, \zeta) I_1(\rho\zeta), \quad (11)$$

$$H_z^*(\rho, \pm\gamma) = -I^* D(\gamma, \zeta) I_0(\rho\zeta),$$

$$J_{\vartheta}^*(\rho, \pm\gamma) = I^* \zeta D(\gamma, \zeta) I_1(\rho\zeta). \quad (12)$$

Здесь $\zeta = \sqrt{\mu_3^{\varepsilon}(\gamma^2 + i\omega\mu_2^{\varepsilon}r_2)/\mu_2^{\varepsilon}}$; зависящая от частоты функция $D(\gamma, \xi)$ определяется как

$$D(\gamma, \zeta) = \frac{\mu_0}{\mu_2^{\varepsilon}} \zeta R K_1(\gamma R) \times \left[\gamma \alpha_2 K_0(\gamma \alpha_2) I_1(\zeta \alpha_2) + \frac{\mu_0}{\mu_2^{\varepsilon}} \zeta \alpha_2 K_1(\gamma \alpha_2) I_0(\zeta \alpha_2) \right]^{-1};$$

$R \geq \alpha_2$ – радиус витка; $K_{\nu}(x)$, $I_{\nu}(x)$ – функции Макдональда и модифицированные функции Бесселя соответственно.

При выполнении дальнейших вычислений будем считать, что магнитострикционные константы m_1 и m_2 соотносятся между собой как $m_2 = -m_1/2$.

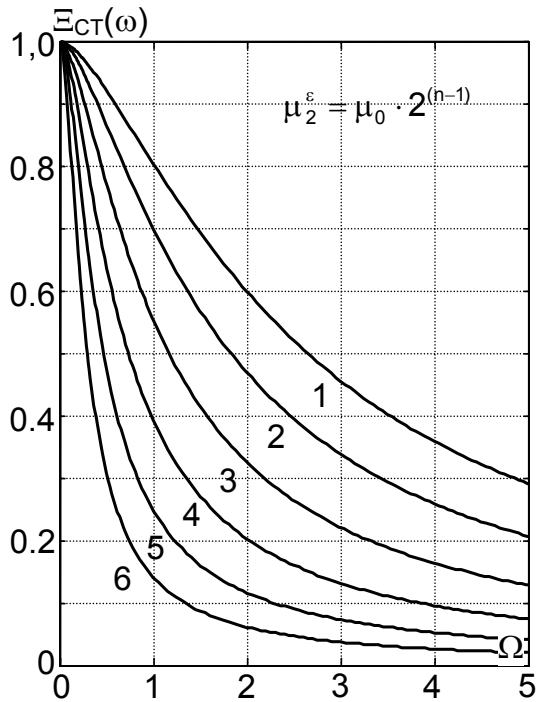


Рис. 2. Влияние магнитной проницаемости материала стержня на амплитудный множитель стержневой волны

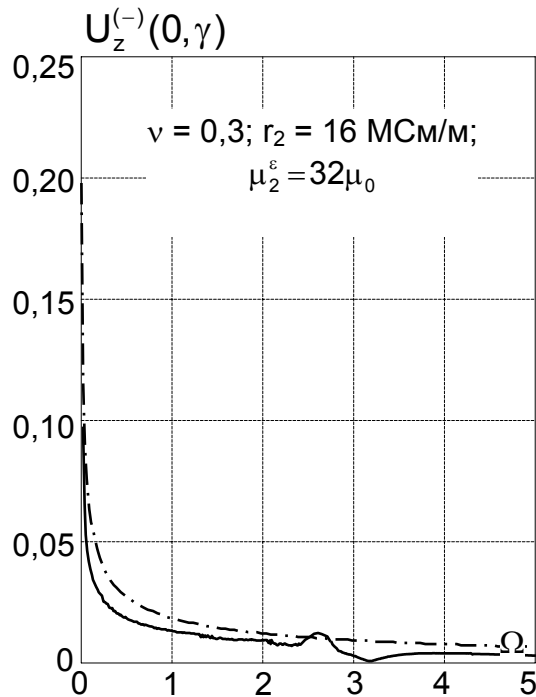


Рис. 3. Смещения на оси токопроводящего ферромагнитного цилиндра, рассчитанные по стержневой модели (штрих-пунктирная) и по точной теории (сплошная)

В этом случае компоненты $H_\beta^*(\rho, z)$, определенные соотношением (11), дают следующие значения объемных плотностей сил:

$$f_\rho^*(\rho, \pm\gamma) = I^* \frac{m_1}{2} H_z^0 \zeta D(\gamma, \zeta) I_1(\rho\zeta), \tag{13}$$

$$f_z^*(\rho, \pm\gamma) = \pm i I^* \frac{m_1}{4} H_z^0 \gamma D(\gamma, \zeta) I_0(\rho\zeta).$$

Определенная соотношением (12) окружная компонента вектора плотности вихревого тока дает значение радиальной компоненты силы Лоренца:

$$L_\rho^*(\rho, \pm\gamma) = I^* \mu_3^\epsilon H_z^0 \zeta D(\gamma, \zeta) I_1(\rho\zeta). \tag{14}$$

Из определений силовых факторов следует, что

$$\frac{L_\rho^*(\rho, \pm\gamma)}{f_\rho^*(\rho, \pm\gamma)} = \frac{2\mu_3^\epsilon}{m_1}.$$

В полях подмагничивания порядка половины коэрцитивной силы магнитострикционная константа $m_1 \sim 10^{-1}$, а, к примеру, магнитная проницаемость никеля составляет $\mu_3^\epsilon = 35\mu_0 = 44 \cdot 10^{-6}$ Гн/м. При этом $L_\rho^*(\rho, \pm\gamma)/f_\rho^*(\rho, \pm\gamma) = 8,8 \cdot 10^{-4}$. Аналогичным образом соотносятся между собой и поверхностные силы. Вывод очевиден – при электромагнитном способе возбуждения ультразвуковых волн в ферромагнитных стержнях силы Лоренца и пондеромоторное действие электромагнитного поля можно не принимать во внимание.

2. РАСЧЕТ АМПЛИТУДНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ЧАСТОТ

Подставляя Фурье-образ $H_z^*(\rho, z)$ аксиальной компоненты вектора напряженности переменного магнитного поля в соотношение (9), определяем амплитудный множитель плоской стержневой волны, возбуждаемой электромагнитным способом в ферромагнитном цилиндре:

$$U_0^{(\pm)} = \mp U_0^{ст} \Xi_{ст}(\omega). \tag{15}$$

Здесь $\Xi_{ст}(\omega)$ – частотная характеристика преобразователя электромагнитного типа в режиме возбуждения плоской продольной волны в ферромагнитном стержне кругового поперечного сечения;

$$U_0^{ст} = \frac{I^* m_1 H_z^0}{2G(1 + \nu)};$$

$$\Xi_{ст}(\omega) = \frac{I_1(\zeta\alpha_2)}{(\zeta\alpha_2)} D(\gamma, \zeta).$$

На рис. 2 показаны частотные зависимости функции $\Xi_{\text{ст}}(\omega)$ для разных значений магнитной проницаемости μ_2^ε материала стержня, рассчитанные при $R/\alpha_2 = 1.02$, $r_2 = 0$, $\mu_2^\varepsilon = 2^{(n-1)}\mu_0$, (n – номер кривой на графике). По оси абсцисс отложена безразмерная частота $\Omega = k_s \alpha_2$. Здесь и везде далее коэффициент Пуассона изотропного материала принят равным 0.3. Все кривые нормированы на предельное значение

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Xi_{\text{ст}}(\omega) = 0.5.$$

Отчетливо видно, что чем больше магнитная проницаемость, тем больше графики функции $\Xi_{\text{ст}}(\omega)$ прижимаются к оси ординат. Это означает, что происходит сужение полосы частот, в пределах которой эффективно возбуждаются ультразвуковые волны. Это вызвано увеличением длины области нагружения ферромагнитного стержня переменным магнитным полем. С ростом магнитной проницаемости происходит своего рода шунтирование магнитного поля. Силовые линии магнитного поля “втягиваются” из окружающего пространства в объем стержня.

На рис. 3 штрих-пунктирной кривой показан модуль функции $\Xi_{\text{ст}}(\omega)$, рассчитанный для стержня из никеля ($\mu_2^\varepsilon = 44 \cdot 10^{-6}$ Гн/м; $r_2 = 16.3 \cdot 10^6$ См/м; $R/\alpha_2 = 1.02$; $\alpha_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ м; $G = 75$ ГПа; $\nu = 0.3$; $\rho_0 = 8900$ кг/м³). По оси абсцисс отложена безразмерная частота $\Omega = k_s \alpha_2$. Максимальные значения модуля наблюдаются в области очень малых значений Ω . Незначительное отклонение безразмерной частоты от нуля сопровождается резким уменьшением $|\Xi_{\text{ст}}|$. В области частот $\Omega > 1$ резкие изменения уступают место плавному спаду рассматриваемой функции по мере возрастания частоты. Такое поведение частотной характеристики ультразвукового преобразователя объясняется тем, что наряду с делокализацией магнитного поля, обусловленной достаточно большим значением магнитной проницаемости μ_2^ε , проявляется так называемый скин-эффект [10], когда фактически по поверхности металлического стержня протекают окружные вихревые токи, практически полностью экранирующие первичное переменное магнитное поле витка. Тогда эффективное возбуждение продольных волн происходит в узкой приповерхностной области ферромагнитного цилиндра. Очевидно, что значения функции $\Xi_{\text{ст}}(\omega)$ полностью определяют уровни смещений материальных частиц на оси металлического стержня. По этой причине ось ординат на рис. 3 снабжена символом $U_z^{(-)}(0, \gamma)$, который для стержневой модели напряженно-деформированного состояния цилиндра

имеет смысл модуля функции $\Xi_{\text{ст}}(\omega)$.

После подстановки силовых факторов, определенных через Фурье-образы компонент вектора напряженности переменного магнитного поля и поверхностную плотность вихревого тока $J_\vartheta^*(\rho, \pm\gamma)$, в соотношение [1, (38)] конечный результат вычислений можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} {}^n u_\rho^{(\pm)}(\rho, z) &= -iU_0 \Xi(\omega, \gamma_n) \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \times \\ &\times \left[J_1(\alpha_n \rho) - \frac{2\gamma_n^2 J_1(\alpha_n \alpha_2)}{(\gamma_n^2 - \beta_n^2) J_1(\beta_n \alpha_2)} J_1(\beta_n \rho) \right] \times \\ &\times e^{\pm i\gamma_n z}, \\ {}^n u_z^{(\pm)}(\rho, z) &= \mp U_0 \Xi(\omega, \gamma_n) \times \\ &\times \left[J_0(\alpha_n \rho) + \frac{2\alpha_n \beta_n J_1(\alpha_n \alpha_2)}{(\gamma_n^2 - \beta_n^2) J_1(\beta_n \alpha_2)} J_0(\beta_n \rho) \right] \times \\ &\times e^{\pm i\gamma_n z}. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $U_0 = m_1 H_z^0 I^* / (4G)$ для ферромагнетика и $U_0 = \mu_0 H_z^0 I^* / (2G)$ для металла неферромагнитной группы. Зависящая от частоты и волнового числа функция $\Xi(\omega, \gamma_n)$ для двух типов металлов определяется формулой

$$\Xi(\omega, \gamma_n) = \frac{L_0}{(k_s \alpha_2)^2 D_0} [A_V(\gamma_n) + A_S(\gamma_n)], \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{\mu_0}{\mu_2^\varepsilon} \frac{\gamma_n R K_1(\gamma_n R) \zeta \alpha_2 I_0(\zeta \alpha_2)}{\gamma_n \alpha_2} \times \\ &\times \left[\gamma_n \alpha_2 K_0(\gamma_n \alpha_2) I_1(\zeta \alpha_2) + \right. \\ &\left. + \frac{\mu_0}{\mu_2^\varepsilon} \zeta \alpha_2 K_1(\gamma_n \alpha_2) I_0(\zeta \alpha_2) \right]^{-1}; \end{aligned}$$

$\zeta = \sqrt{\mu_3^\varepsilon (\gamma_n^2 + i\omega \mu_2^\varepsilon r_2) / \mu_2^\varepsilon}$. Для металлов неферромагнитной группы $\mu_2^\varepsilon = \mu_3^\varepsilon = \mu_0$ и $\zeta^2 \approx i\omega \mu_0 r_2$. Символом D_0 в соотношении (17) обозначено выражение, появляющееся в результате вычисления производной $\Delta'(\chi_n)$ в формуле [1, (38)], причем $\Delta'(\chi_n) = -k_s^2 D_0 / (\beta_n \alpha_2)$.

Символами $A_V(\gamma_n)$ и $A_S(\gamma_n)$ определены составляющие амплитудного множителя n -ой нормальной волны, формируемые объемными и поверхно-

стными нагрузками. Заметим, что

$$A_V(\gamma_n) = (\beta_n \alpha_2) \frac{J_0(\beta_n \alpha_2)}{J_0(\alpha_n \alpha_2)} \times \\ \times \left[4 \left(\frac{\gamma_n}{k_s} \right)^2 - \frac{2J_1(\beta_n \alpha_2)}{\beta_n \alpha_2 J_0(\beta_n \alpha_2)} \right] \times \\ \times \left[-(\alpha_n \alpha_2)^2 (M_{\rho\alpha} + M_{\rho\beta}) + \frac{(\gamma_n \alpha_2)^2}{2} (M_{z\alpha} + M_{z\beta}) \right],$$

где

$$M_{\rho\alpha} = -\frac{(\zeta \alpha_2)^2}{(\alpha_n \alpha_2)^2 + (\zeta \alpha_2)^2} \times \\ \times \left[J_2(\alpha_n \alpha_2) \frac{I_1(\zeta \alpha_2)}{\zeta \alpha_2 I_0(\zeta \alpha_2)} + \frac{J_1(\alpha_n \alpha_2)}{\alpha_n \alpha_2} \frac{I_2(\zeta \alpha_2)}{I_0(\zeta \alpha_2)} \right];$$

$$M_{\rho\beta} = \frac{2(\zeta \alpha_2)^2}{(\alpha_n \alpha_2)^2 + (\zeta \alpha_2)^2} \times \\ \times \frac{(\gamma_n \alpha_2)^2 (\beta_n \alpha_2) J_1(\alpha_n \alpha_2)}{[(\gamma_n \alpha_2)^2 - (\beta_n \alpha_2)^2] (\alpha_n \alpha_2) J_1(\beta_n \alpha_2)} \times \\ \times \left[J_2(\beta_n \alpha_2) \frac{I_1(\zeta \alpha_2)}{\zeta \alpha_2 I_0(\zeta \alpha_2)} + \frac{J_1(\beta_n \alpha_2)}{\beta_n \alpha_2} \frac{I_2(\zeta \alpha_2)}{I_0(\zeta \alpha_2)} \right];$$

$$M_{z\alpha} = \frac{1}{(\alpha_n \alpha_2)^2 + (\zeta \alpha_2)^2} \times \\ \times \left[(\alpha_n \alpha_2) J_1(\alpha_n \alpha_2) + (\zeta \alpha_2) J_0(\alpha_n \alpha_2) \frac{I_1(\zeta \alpha_2)}{I_0(\zeta \alpha_2)} \right];$$

$$M_{z\beta} = \frac{1}{(\beta_n \alpha_2)^2 + (\zeta \alpha_2)^2} \times \\ \times \frac{2(\alpha_n \alpha_2)(\beta_n \alpha_2) J_1(\alpha_n \alpha_2)}{[(\gamma_n \alpha_2)^2 - (\beta_n \alpha_2)^2] J_1(\beta_n \alpha_2)} \times \\ \times \left[(\beta_n \alpha_2) J_1(\beta_n \alpha_2) + (\zeta \alpha_2) J_0(\beta_n \alpha_2) \frac{I_1(\zeta \alpha_2)}{I_0(\zeta \alpha_2)} \right].$$

Для стержня из неферромагнитного металла $M_{z\alpha} = M_{z\beta} = 0$.

Для ферромагнитного стержня составляющая амплитудного множителя $A_S(\gamma_n)$ определяется следующей формулой:

$$A_S(\gamma_n) = -(\beta_n \alpha_2) [(\gamma_n \alpha_2)^2 - (\beta_n \alpha_2)^2] J_1(\beta_n \alpha_2) + \\ + 3(\gamma_n \alpha_2)^2 (\beta_n \alpha_2)^2 \left[J_0(\beta_n \alpha_2) - \frac{J_1(\beta_n \alpha_2)}{(\beta_n \alpha_2)} \right] \times \\ \times \frac{I_1(\zeta \alpha_2)}{(\zeta \alpha_2) I_0(\zeta \alpha_2)}.$$

Значение коэффициента, стоящего перед вторым слагаемым, обусловлено выбором соотношения между магнитоотрицательными константами: $m_2 = -m_1/2$. Для стержня из неферромагнитного металла

$$A_S(\gamma_n) = -\frac{1}{2} (\beta_n \alpha_2) [(\gamma_n \alpha_2)^2 - (\beta_n \alpha_2)^2] J_1(\beta_n \alpha_2) + \\ + 2(\gamma_n \alpha_2)^2 (\beta_n \alpha_2)^2 \left[J_0(\beta_n \alpha_2) - \frac{J_1(\beta_n \alpha_2)}{(\beta_n \alpha_2)} \right] \times \\ \times \frac{I_1(\zeta \alpha_2)}{(\zeta \alpha_2) I_0(\zeta \alpha_2)}.$$

На рис. 4 сплошными кривыми показаны аксиальные смещения ${}^1u_z^{(-)}(0, z)$ на оси ферромагнитного цилиндра в первой нормальной волне, определенные с точностью до множителя $U_0 e^{-i\gamma_1 z}$ по формуле (16) при $\rho=0$ для стержня из магнитоотрицательного феррита ($r_2=0$) при двух значениях магнитной проницаемости: $\mu_2^{\xi} = \mu_0$ и $\mu_2^{\xi} = 32\mu_0$. Штриховыми кривыми показаны результаты, полученные по стержневой модели (формула (15)), где величина U_0^{ct} была переопределена через $U_0 = m_1 H_z^0 I^* / (4G)$. Естественно, в области низких частот $\Omega < 1$ соответствующие кривые совпадают. Аналогичная картина наблюдается и в случае электропроводящих ферромагнетиков. Так, на рис. 3 сплошной кривой представлены аксиальные смещения в первой нормальной волне на оси стержня из никеля.

Определенные представления об особенностях возбуждения ультразвуковых волн в широком диапазоне частот дает анализ потоков мощности, уносимой из области нагружения ферромагнитного стержня переменным магнитным полем первыми четырьмя продольными волнами (рис. 5). Расчет потоков мощности выполнен по методике, изложенной в монографии [11], в предположении, что $R/\alpha_2 = 1.02$, $\mu_2^{\xi} = 32\mu_0$, $r_2 = 0$ (стержень из магнитоотрицательного феррита).

Целесообразность рассмотрения первых четырех мод обусловлена тем, что их частоты запиравания обладают различными аналитическими свойствами. Так, первая мода имеет нулевую частоту запиравания, где одновременно выполняются условия $J_1(\beta \alpha_2) = 0$ и $2\xi J_1(\alpha \alpha_2) - \alpha \alpha_2 J_0(\alpha \alpha_2) = 0$, ($\xi = (1-2\nu)/[2(1-\nu)]$). При этом $\alpha, \beta \rightarrow 0$. Частота запиравания второй моды – особая точка с координатами $\Omega^* = 3.561889$ и $\xi^* = 1.02875$, являющаяся точкой входа комплексной ветви частотного спектра нормальных волн [11] в плоскость $\mathbf{Im} \xi = 0$. На частоте запиравания третьей моды выполняется условие $2\xi J_1(\alpha \alpha_2) - \alpha \alpha_2 J_0(\alpha \alpha_2) = 0$, причем $\beta \neq 0$, $\alpha = 0$.

Для частоты запираия четвертой моды справедливо $J_1(\beta\alpha_2)=0$, $\alpha \neq 0$, $\beta=0$. Отметим, что для последующих мод перечисленные условия повторяются в том или ином порядке.

По оси ординат на рис. 5 отложены нормированные значения потоков мощности, которые уносятся из области нагружения продольными волнами, уходящими вправо от источника. Нормировка выполнена относительно максимальной величины потока для первой нормальной волны. Здесь же штриховыми линиями показаны групповые скорости первых четырех продольных волн, нормированные относительно скорости волны сдвига (им соответствует правая ось ординат). По оси абсцисс отложена безразмерная частота $\Omega = k_s\alpha_2$.

На частотах запираия, где материальные частицы бесконечного стержня совершают синфазные радиальные колебания, продольные волны, начиная со второй, способны переносить бесконечно большие уровни энергии. Действительно, для поддержания этого типа движения во всем стержне (в том числе и в областях, бесконечно удаленных от области нагружения) требуется неограниченная энергия. Отметим, что с формальной точки модельный источник гармонических колебаний, работающий по определению бесконечное время, обладает таким неограниченным запасом энергии, которую он и отдает стержню. По мере ухода от частоты запираия, длина волны, а следовательно и области, где напряженно-деформированное состояние имеет один знак, уменьшаются. Вследствие этого потоки мощности, уносимые второй и последующими продольными волнами, очень быстро спадают (см. рис. 5). Кроме того, на частотах Ω_2 , Ω_3 и Ω_4 , не совпадающих с частотами запираия, суммарные потоки обращаются в нуль. Это обусловлено особенностями кинематики материальных частиц гармонически деформируемого стержня, которые проявляются в том, что в пределах его поперечного сечения формируются противоположно направленные потоки энергии. Впервые на это обстоятельство было указано в монографии [11].

На рис. 6 показаны распределения потоков мощности (плотности потока) по сечению цилиндра на фиксированных частотах для первых продольных волн. Нормировка каждой кривой своя – по модулю максимального значения. По оси абсцисс отложена безразмерная радиальная координата ρ/α_2 . Цифры возле кривых соответствуют значениям безразмерных частот. При качественном анализе результатов, представленных на рис. 5, с помощью графиков, показанных на рис. 6, необходимо принимать во внимание, что при электромагнитном

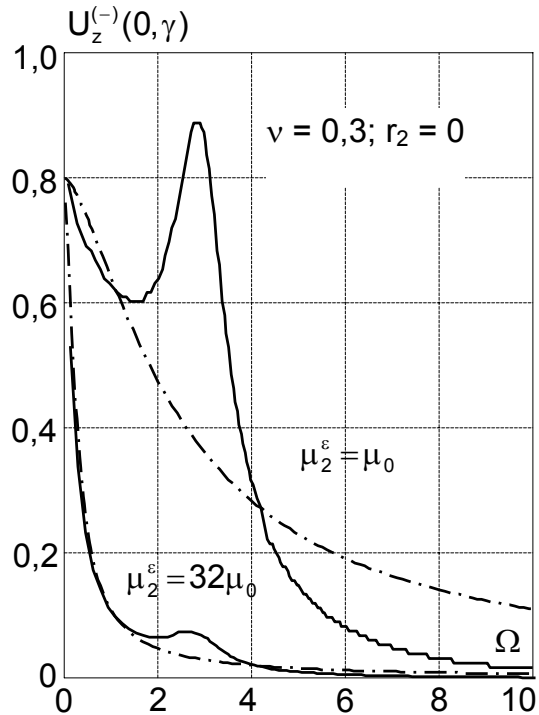


Рис. 4. Аксиальные смещения на оси цилиндра в первой моде, рассчитанные по стержневой модели

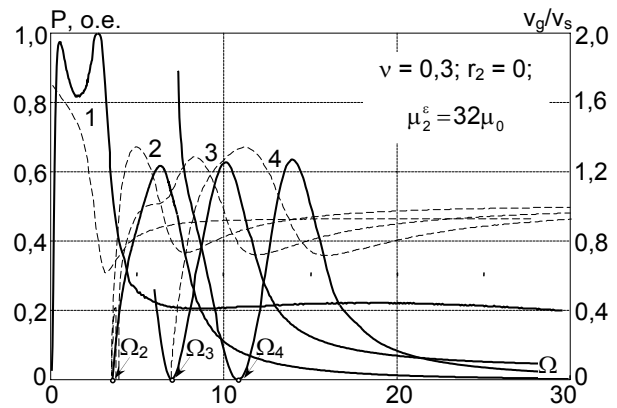


Рис. 5. Потоки мощности (сплошные) и групповые скорости (штриховые) первых четырех продольных волн в цилиндре

способе возбуждения ультразвуковых волн наиболее эффективное возбуждение упругих колебаний наблюдается в приповерхностных областях цилиндра, а наименее эффективное – на оси стержня. С ростом частоты неоднородность возбуждения ультразвуковых волн по сечению увеличивается и нормальные волны все сильнее локализуются вблизи боковой поверхности стержня. Отметим, что для первой продольной волны, ко-

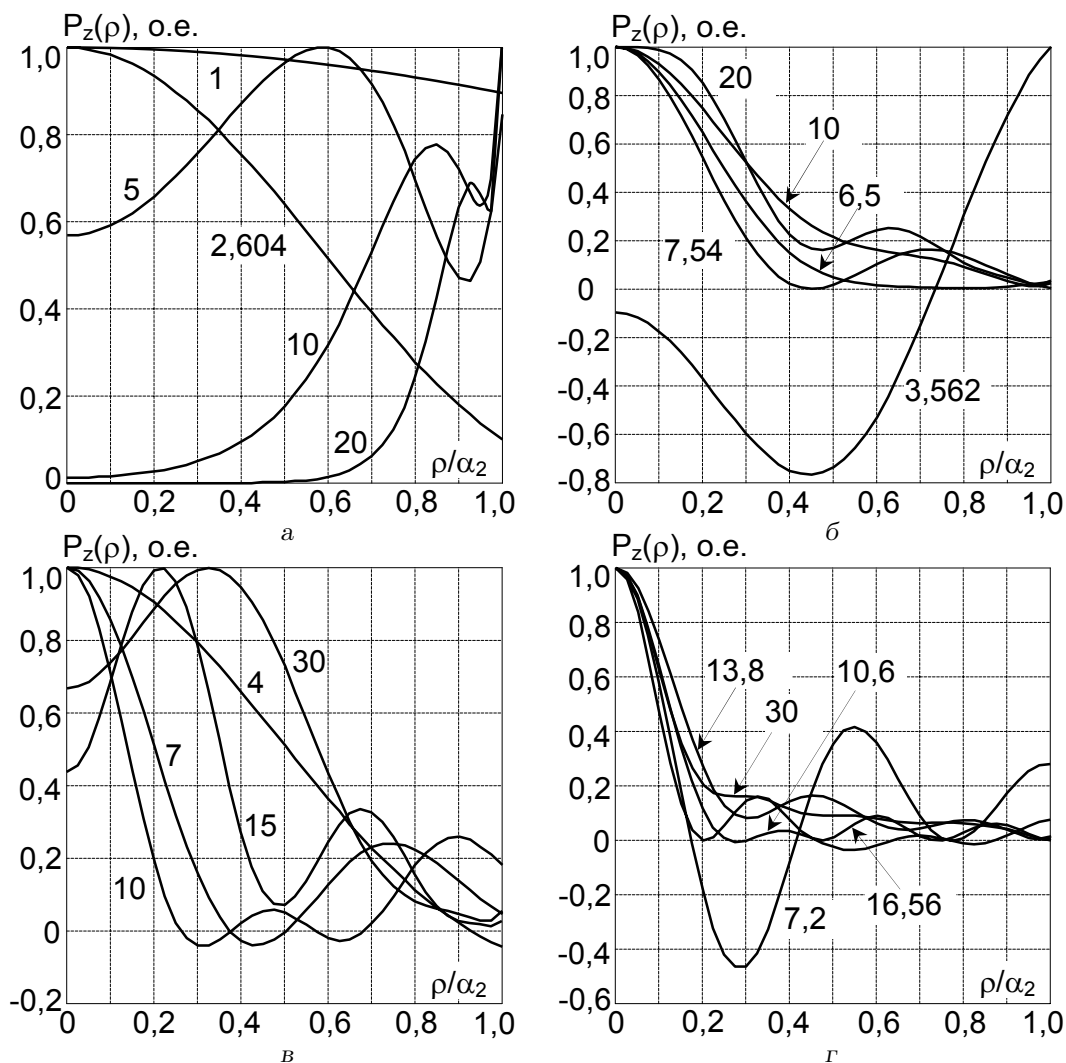


Рис. 6. Распределение потока мощности в первых четырех продольных волнах по сечению цилиндра на различных частотах:

а – первая волна; б – вторая волна; в – третья волна; г – четвертая волна

торая на высоких частотах трансформируется в поверхностную волну Рэлея, максимальные значения плотности потока мощности на высоких частотах наблюдаются как раз в приповерхностных областях. Этим и объясняется относительно высокий уровень энергии, переносимой этой волной на частотах $\Omega > 10$.

После прохождения точек $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ (см. рис. 5) соответствующие потоки мощности возрастают. Для мод, начиная со второй, после достижения некоторых максимальных значений наблюдается плавное уменьшение потоков уносимой мощности до нуля. Это вызвано преимущественно кинематическими особенностями – энергоемкость высших мод на высоких частотах становится наибольшей в центральной области, прилегающей к оси цилиндра

(см. рис. 6), где, как уже отмечалось, возбуждение упругих волн электромагнитным способом наименее эффективно.

Обращает на себя внимание то, что характер частотного изменения потоков мощности на рис. 5 практически не коррелирует с изменением групповых скоростей. Это принципиально отличает обсуждаемые результаты от результатов Петера Торвика [12], исследовавшего особенности возбуждения продольных волн нормальными силами, действующими на торце полубесконечного волновода. Все дело в существенном различии в способах подачи энергии внешнего источника в объем упругого волновода.

Еще более разительные отличия, по сравнению с [12], демонстрирует рис. 7, на котором представ-

лены потоки мощности для нормальных волн в медном цилиндре ($\rho_0 = 8960 \text{ кг/м}^3$; $G = 42.7 \text{ ГПа}$; $\nu = 0.3$; $r_2 = 64.5 \text{ МСм/м}$; $\mu_2^e = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$; $\alpha_2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $R/\alpha_2 = 1.02$).

Уместно напомнить, что в схеме возбуждения упругих волн по Торвику максимумы уносимой нормальными волнами энергии наблюдались в том диапазоне частот, где вектор смещения материальных частиц практически полностью определялся своей аксиальной компонентой. При этом групповая скорость нормальной волны превышала скорости всех других распространяющихся мод. При электромагнитном (вихретоковом) способе возбуждения ультразвуковых волн нулевые значения потоков мощности совпадают с частотами, на которых волновое число $\alpha = 0$, т. е. когда ветвь корней дисперсионного уравнения пересекает прямую $\zeta = k_\ell \alpha_2$. Здесь обращается в нуль радиальная компонента вектора смещения материальных частиц и их движение полностью определяется постоянной по сечению цилиндра аксиальной компонентой, т. е. возникает режим плоской продольной волны. Одновременно полностью закрывается канал подвода энергии электромагнитного поля в объем металлического стержня.

Последующее увеличение частоты смены знака напряженности переменного магнитного поля сопровождается вначале ростом, а затем плавным уменьшением уровней переносимой энергии. Это объясняется особенностями кинематики материальных частиц и скин-эффектом. Остается добавить, что именно благодаря скин-эффекту значительная доля подводимой к металлическому стержню энергии трансформируется в энергию поверхностных волн Рэлея. Это позволяет предположить, что вихретоковые ультразвуковые преобразователи следует рассматривать как перспективные устройства для возбуждения и приема поверхностных волн в стержнях из неферромагнитных металлов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные аналитические и количественные результаты формируют теоретическую основу для расчета и проектирования ультразвуковых преобразователей электромагнитного типа, применяемых в системах различного назначения. Построена общая схема для расчета амплитудных множителей нормальных волн, определяющих частотно-волновые характеристики рассматриваемого преобразователя.

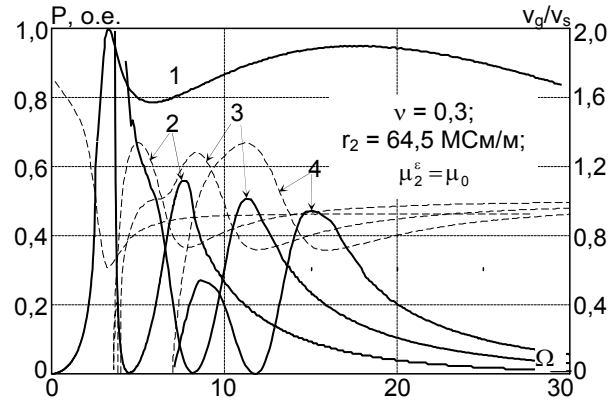


Рис. 7. Потоки мощности первых четырех продольных волн в медном цилиндре

1. Петрищев О. Н. Электромагнитное возбуждение ультразвуковых продольных волн в изотропных металлических цилиндрах. Часть 1. Расчет амплитудных множителей нормальных волн и определение частотной характеристики ультразвукового преобразователя // Акуст. вісн.– 2007.– 10, N 1.– С. 54–68.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики.– М.: Высшая школа, 1970.– 710 с.
3. Шубаев С. Н. Анализ акустического поля, возбуждаемого электромагнитным методом // Дефектоскопия.– 1974.– N 3.– С. 100–109.
4. Kavashima K. Theory and numerical calculation of the acoustic field produced in metal by an electromagnetic ultrasonic transducer // J. Acoust. Soc. Amer.– 1976.– 60, N 5.– P. 1089–1099.
5. Шкарлет Ю. М. О теоретических основах электромагнитных и электромагнитно-акустических методов неразрушающего контроля // Дефектоскопия.– 1974.– N 1.– С. 11–18.
6. Шкарлет Ю. М. Основы теории гармонических моделей накладных электромагнитных и электромагнитно-акустических преобразователей // Дефектоскопия.– 1974.– N 2.– С. 39–44.
7. Шкарлет Ю. М. Основы общей теории возбуждения акустических колебаний гармоническими полями сил // Дефектоскопия.– 1974.– N 3.– С. 84–92.
8. Шкарлет Ю. М. Возбуждение акустического поля плоским электромагнитным полем // Дефектоскопия.– 1974.– N 3.– С. 93–99.
9. Шкарлет Ю. М. Закономерности возбуждения акустических поверхностных волн электромагнитным полем // Дефектоскопия.– 1974.– N 4.– С. 12–23.
10. Тамм И. Е. Основы теории электричества.– М.: Наука, 1976.– 616 с.
11. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 283 с.
12. Torvik P. J., McClatchey J. J. Response of an elastic plate to a cyclic longitudinal force // J. Acoust. Soc. Amer.– 1968.– 44, N 1.– P. 59–64.