

УДК 533.6.013.42

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ, ЭКРАНИРОВАННОЙ СНАРУЖИ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКОЙ

И. О. МОРГУН, В. Г. САВИН

Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев

Получено 02.02.2007 ◊ Пересмотрено 17.10.2007

В рамках нестационарной задачи гидроэлектроупругости исследовано возбуждение тонкостенной сферической пьезокерамической оболочки, полностью охваченной через слой жидкости упругой оболочкой, с помощью плоской нестационарной волны давления. При этом использован подход, состоящий в удовлетворении граничных условий в области оригиналов и сведении задачи к решению интегральных уравнений. Для выбранной конфигурации экранированной оболочки изучен ее электрический отклик на падающие акустические импульсы разной формы. Выявлен ряд физических особенностей поведения системы.

У рамках нестационарної задачі гідроелектроупругості досліджено збудження тонкостінної сферичної п'єзокерамічної оболонки, повністю охопленої через шар рідини пружною оболочкою, за допомогою плоскої нестационарної хвилі тиску. При цьому використовувався підхід, який полягає у задоволенні граничних умов у області оригіналів та зведенні задачі до розв'язування інтегральних рівнянь. Для вибраної конфігурації екранованої оболонки досліджений її електричний відгук на акустичні імпульси різної форми. Виявлено ряд фізичних особливостей поведінки системи.

The thin-walled spherical piezoceramic shell enveloped with an elastic shell through a liquid layer and excited by plane non-stationary pressure wave has been studied within the framework of a non-stationary problem of hydroelectroelasticity. The used approach is based on satisfying the boundary conditions in space of originals and on reducing the problem to solving the integral equations. For chosen configuration of the baffled shell, its electric response to acoustic pulses of various shape has been studied. Numerous physical features of the system behavior have been revealed.

ВВЕДЕНИЕ

подавляющее большинство исследований, посвященных действию акустических нестационарных волн на пьезокерамические оболочки, выполнено для цилиндрической конфигурации оболочки. Перечень отечественных и зарубежных научных публикаций по этой тематике содержится в обзоре [1]. Среди последних работ следует также отметить статью [2], в которой рассмотрено действие плоской нестационарной акустической волны на тонкостенную сферическую пьезокерамическую оболочку.

Цель данной статьи – развитие линейную теорию нестационарной гидроэлектроупругости для систем коаксиальных тонкостенных упругих и пьезокерамических сферических оболочек при воздействии импульсных акустических нагрузок. Работа включает в себя математическую постановку задачи, ее формальное и численное решение, физический анализ результатов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим взаимодействие плоской акустической нестационарной волны с системой, состоящей из концентрически расположенных сферических оболочек: наружной упругой и внутренней электроупругой (рис. 1). Предполагается, что последняя имеет электродированные поверхности и поляризована в радиальном направлении. Оболочки являются тонкостенными, т. е. допускается моделирование их движения уравнениями, записанными с привлечением гипотез Кирхгофа – Лява. Распространение возмущений в жидких средах, заполняющих внешнее пространство, а также межоболочечный объем, описывается в рамках акустического приближения.

В момент времени $t=0$ на наружную оболочку набегают плоская нестационарная волна, потенциал скорости которой обозначим через $\varphi^{(0)}$. Взаимодействуя с системой, падающая волна порождает поле дифрагированных волн во внешней среде, а

также поле прошедших и многократно отраженных волн во внутреннем объеме. Указанные поля вызывают колебания электроупругой оболочки и определяют параметры электрического напряжения $U(t)$, возникающего на ее электродах.

При решении задачи система координат выбирается так, что фронт падающей волны перпендикулярен оси z ($z = r \cos \theta$, где r – радиальная координата).

При сделанных допущениях задача сводится к совместному интегрированию безразмерных уравнений движения пьезокерамической [2] и упругой [3] оболочек, а также уравнений движения акустических сред [4]. Обезразмеривание проводилось путем нормировки линейных величин к радиусу электроупругой оболочки R_1 , времени t – к R_1/c_1 (c_1 – скорость распространения звука во внешней среде), волновых потенциалов $\varphi^{(i)}$ – к $R_1 c_1$, акустических давлений p_i и гидродинамических нагрузок $q_{(k,c)}$ – к $\gamma_k c_1^2$ (γ_k – плотность керамики), радиальной компоненты вектора электрической напряженности пьезокерамики $E_r^{(0)}$ – к $1/d_{33}$.

Уравнения движения пьезокерамической оболочки имеют вид

$$\begin{aligned} D_1 u_k + D_2 w_k &= \frac{R_1^2 \gamma_k c_1^2}{C_{11}^E} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \\ D_3 u_k + D_4 w_k &= -2 \frac{e_{31} R_1 d_{33}}{C_{11}^E} E_r^{(0)} + \\ &+ \frac{R_1^2 \gamma_k c_1^2}{C_{11}^E} \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} - \frac{R_1^2 \gamma_k c_1^2}{C_{11}^E h_1} q_k, \end{aligned} \quad (1)$$

а уравнения движения упругой оболочки –

$$\begin{aligned} D_5 u_c + D_6 w_c &= \frac{R_2^2 \gamma_c c_1^2 (1 - \nu^2)}{E_U} \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2}, \\ D_7 u_c + D_8 w_c &= \frac{R_2^2 \gamma_c c_1^2 (1 - \nu^2)}{E_U} \frac{\partial^2 w_c}{\partial t^2} - \\ &- \frac{R_2^2 \gamma_c c_1^2 (1 - \nu^2)}{E_U h_2} q_c. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь D_m ($m = 1, 2, \dots, 8$) – следующие дифферен-

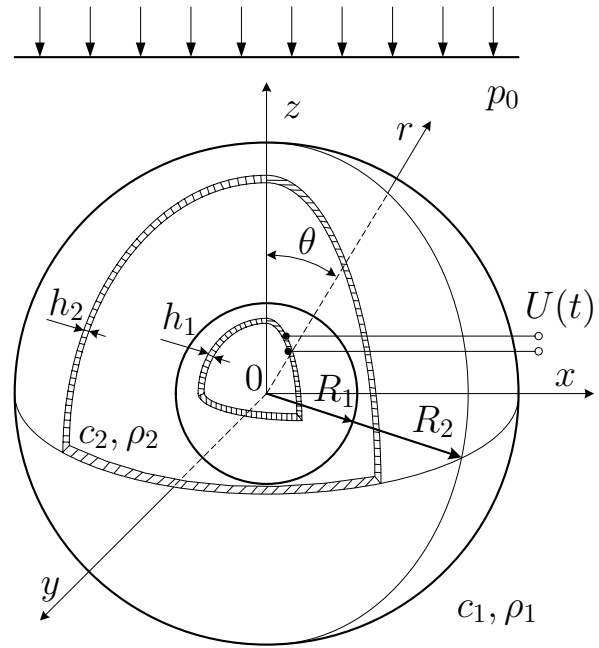


Рис. 1. Сферическая пьезокерамическая оболочка, полностью охваченная через слой жидкости упругой оболочкой

циальные операторы:

$$\begin{aligned} D_1 &= (1 + \varepsilon_1) \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - (\operatorname{ctg}^2 \theta + \xi) \right]; \\ D_2 &= -\varepsilon_1 \left[\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{ctg}^2 \theta + \xi) \right] + \\ &+ (1 + \xi) \frac{\partial}{\partial \theta}; \\ D_3 &= \varepsilon_1 \left[\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta + \xi) + \right. \\ &+ (2 + \operatorname{ctg}^2 \theta - \xi) \operatorname{ctg} \theta \left. \right] - (1 + \xi) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \right]; \\ D_4 &= -\varepsilon_1 \left[\frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta + \xi) + \right. \\ &+ (2 + \operatorname{ctg}^2 \theta - \xi) \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \left. \right] - 2(1 + \xi); \end{aligned}$$

$$D_5 = (1 + \varepsilon_2) \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - (\operatorname{ctg}^2 \theta + \nu) \right];$$

$$D_6 = -\varepsilon_2 \left[\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{ctg}^2 \theta + \nu) \right] + (1 + \nu) \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$D_7 = \varepsilon_2 \left[\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta + \nu) + (2 + \operatorname{ctg}^2 \theta - \nu) \operatorname{ctg} \theta \right] - (1 + \nu) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \right];$$

$$D_8 = -\varepsilon_2 \left[\frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta + \nu) + (2 + \operatorname{ctg}^2 \theta - \nu) \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right] - 2(1 + \nu);$$

$$\varepsilon_1 = \frac{h_1^2}{12R_1^2}; \quad \varepsilon_2 = \frac{h_2^2}{12R_2^2}; \quad \xi = \frac{C_{12}^E}{C_{11}^E}.$$

Уравнения движения внешней и внутренней акустических сред, записанные относительно волновых потенциалов

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} \right) = \frac{c_1^2}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$r \geq R_2;$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \theta} \right) = \frac{c_1^2}{c_2^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$R_1 \leq r < R_2,$$

связаны с акустическими давлениями равенствами

$$p_1 = -\frac{\rho_1}{\gamma_k} \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial t} \right), \quad (5)$$

$$p_2 = -\frac{\rho_2}{\gamma_k} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial t}.$$

Гидродинамические нагрузки, действующие на оболочки, задаются соотношениями

$$q_c = [p_2 - p_1]|_{r=R_2}, \quad q_k = -p_2|_{r=R_1}. \quad (6)$$

Давление в падающей плоской волне изменяется по закону

$$p^{(0)} = -\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial t} = Q(t)H(\tau - t). \quad (7)$$

Здесь C_{11}^E , C_{12}^E , e_{31} – модули упругости и пьезомодуль керамики соответственно; γ_c – плотность материала упругой оболочки; ε_{33}^s – диэлектрическая проницаемость керамики; c_i , ρ_i – скорости распространения звука в акустических средах и их плотности; r и θ – полярные координаты; ν – коэффициент Пуассона; E_U – модуль Юнга; $Q(t)$ – функция, описывающая давление за фронтом падающей волны; $H(\tau - t)$ – единичная функция Хевисайда; τ – длительность акустического импульса.

На границах контакта оболочек с жидкостями $r = R_1$ и $r = R_2$ принимаются условия безотрывного движения:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial r} \right] \Big|_{r=R_2} = \frac{\partial w_c}{\partial t}, \\ & \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \frac{\partial w_k}{\partial t}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = \frac{\partial w_c}{\partial t}.$$

В задачах приема, где искомой величиной является электрическая напряженность, необходимо в уравнениях движения пьезокерамической оболочки избавиться от $E_r^{(0)}$. С этой целью исходные уравнения дополняются электрическим граничным условием. Будем считать, что электроды пьезокерамической оболочки разомкнуты. Тогда протекающий через пьезокерамическое тело ток равен нулю:

$$I_{\text{см}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} D_r^{(0)} R d\theta = 0, \quad (9)$$

где $I_{\text{см}}$ – ток смещения в пьезокерамике; $D_r^{(0)}$ – электрическая индукция [5]

$$D_r^{(0)} = \varepsilon_{33}^s E_r^{(0)} + e_{31} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + 2 \frac{w}{r} + \frac{u}{r} \operatorname{ctg} \theta \right). \quad (10)$$

Начальные условия – однородные (до прихода падающей волны гидрэлектростружная система находится в состоянии покоя):

$$\varphi^{(1)}|_{t=0} = \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial t}|_{t=0} = \varphi^{(2)}|_{t=0} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial t}|_{t=0} = 0,$$

$$w_k|_{t=0} = \frac{\partial w_k}{\partial t}|_{t=0} = u_k|_{t=0} = \frac{\partial u_k}{\partial t}|_{t=0} = 0,$$

$$w_c|_{t=0} = \frac{\partial w_c}{\partial t}|_{t=0} = u_c|_{t=0} = \frac{\partial u_c}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

При решении задачи применяется интегральное преобразование Лалласа по времени. В пространстве изображений неизвестные ищутся в виде рядов по собственным формам колебаний:

$$\begin{aligned} u_{(k,c)}^L &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{(k,c)n}^L \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}, \\ w_{(k,c)}^L &= \sum_{n=0}^{\infty} w_{(k,c)n}^L P_n(\cos \theta), \\ q_{(k,c)}^L &= \sum_{n=0}^{\infty} q_{(k,c)n}^L P_n(\cos \theta), \\ \varphi^{(i)L} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(i)L} P_n(\cos \theta), \\ p^{(i)L} &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(i)L} P_n(\cos \theta), \\ i &= (1, 2). \end{aligned} \quad (11)$$

Исходные соотношения (1)–(6) в области изображений запишутся в виде

$$\begin{aligned} \left(\lambda_1 - \frac{\gamma_k R_1^2 c_1^2}{C_{11}^E} s^2 \right) u_{kn}^L + \lambda_2 w_{kn}^L &= 0, \\ \lambda_3 u_{kn}^L + \left(\lambda_4 - \frac{\gamma_k R_1^2 c_1^2}{C_{11}^E} s^2 \right) w_{kn}^L &= \\ &= 4\chi w_{k0}^L - \frac{\gamma_k R_1^2 c_1^2}{h_1 C_{11}^E} q_{kn}^L, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left(\lambda_5 - \frac{\gamma_c R_2^2 c_1^2 (1 - \nu^2)}{E_U} s^2 \right) u_{cn}^L + \lambda_6 w_{cn}^L = 0,$$

$$\begin{aligned} \lambda_7 u_{cn}^L + \left(\lambda_8 - \frac{\gamma_c R_2^2 c_1^2 (1 - \nu^2)}{E_U} s^2 \right) w_{cn}^L &= \\ &= -\frac{\gamma_c R_2^2 c_1^2 (1 - \nu^2)}{h_2 E_U} q_{cn}^L, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_n^{(1)L}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi_n^{(1)L}}{\partial r} - \\ - \left(\frac{n(n+1)}{r^2} + \alpha_1^2 s^2 \right) \varphi_n^{(1)L} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$r \geq R_2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_n^{(2)L}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi_n^{(2)L}}{\partial r} - \\ - \left(\frac{n(n+1)}{r^2} + \alpha_2^2 s^2 \right) \varphi_n^{(2)L} &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$R_1 \leq r < R_2$$

$$\begin{aligned} q_{cn}^L (p_{2n}^L - p_{1n}^L)|_{r=R_2} &= \\ &= -\beta_2 s \varphi_n^{(2)L} + \beta_1 s [\varphi_n^{(1)L} + \varphi_n^{(0)L}], \end{aligned} \quad (16)$$

$$q_{kn}^L = -p_{2n}^L|_{r=R_1} = \beta_2 s \varphi_n^{(2)L}. \quad (17)$$

Здесь s – параметр преобразования; L – индекс, обозначающий соответствующие трансформанты;

$$\lambda_1 = -(1 + \varepsilon_1)(n^2 + n - 1 + \xi);$$

$$\lambda_2 = \varepsilon_1(n^2 + n - 1 + \xi) + 1 + \xi;$$

$$\lambda_3 = (n^2 + n)[\varepsilon_1(n^2 + n - 1 + \xi) + 1 + \xi];$$

$$\lambda_4 = -\varepsilon_1(n^2 + n)(n^2 + n - 1 + \xi) - 2(1 + \xi);$$

$$\lambda_5 = -(1 + \varepsilon_2)(n^2 + n - 1 + \nu);$$

$$\lambda_6 = \varepsilon_2(n^2 + n - 1 + \nu) + 1 + \nu;$$

$$\lambda_7 = (n^2 + n)[\varepsilon_2(n^2 + n - 1 + \nu) + 1 + \nu];$$

$$\lambda_8 = -\varepsilon_2(n^2 + n)(n^2 + n - 1 + \nu) - 2(1 + \nu).$$

Постоянные коэффициенты, входящие в соотношения (10), (12)–(15), определяются по формулам

$$\chi = \frac{e_{31}^2}{\varepsilon_{33}^s C_{11}^E}; \quad \beta_1 = \frac{\rho_1}{\gamma_k}; \quad \beta_2 = \frac{\rho_2}{\gamma_k};$$

$$\alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = \frac{c_1}{c_2}.$$

Граничные условия трансформируются следующим образом:

$$\left[\frac{\partial \varphi_n^{(1)L}}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_n^{(0)L}}{\partial r} \right] \Bigg|_{r=R_2} = sw_{cn}^L,$$

$$\frac{\partial \varphi_n^{(2)L}}{\partial r} \Bigg|_{r=R_1} = sw_{kn}^L, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \varphi_n^{(2)L}}{\partial r} \Bigg|_{r=R_2} = sw_{cn}^L.$$

Общие решения преобразованных по Лапласу волновых уравнений (14), (15) с учетом разложений (11) имеют вид

$$\varphi_n^{(1)L} = A_{1n}^L(s) \frac{1}{\sqrt{sr}} e^{s\alpha_1 R_2} K_{n+1/2}(s\alpha_1 r),$$

$$\varphi_n^{(2)L} = A_{2n}^L(s) \frac{1}{\sqrt{sr}} e^{s\alpha_2 R_1} K_{n+1/2}(s\alpha_2 r) +$$

$$+ B_{2n}^L(s) \frac{1}{\sqrt{sr}} e^{-s\alpha_2 R_2} I_{n+1/2}(s\alpha_2 r),$$

где $K_{n+1/2}$ и $I_{n+1/2}$ – модифицированные функции Бесселя первого рода полуцелого индекса; $A_{1n}^L(s)$; $A_{2n}^L(s)$; $B_{2n}^L(s)$ – функции параметра s , которые находятся из граничных условий.

Потенциал $\varphi^{(0)L}$, описывающий плоскую нестационарную волну, также допускает разложение, аналогичное рядам (11):

$$\varphi^{(0)L} = -Q^L(s) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{s\sqrt{sr}} e^{-sR_2} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1/2}(sr) (2n+1) P_n(\cos \theta).$$

Функция $Q^L(s)$ определяет характер изменения давления за фронтом волны.

Выполнив интегрирование соотношений (9), с учетом формулы (10), а также принятых разложений (11), получаем соотношение, связывающее электрическую напряженность с прогибами пьезокерамической оболочки:

$$E_r^{(0)} = -2 \frac{\varepsilon_{31} d_{33}}{R_1 \varepsilon_{33}^s} w_{k0}. \quad (19)$$

Здесь w_{k0} – перемещения в радиальном направлении, соответствующие нулевой (пульсирующей) моде колебаний срединной поверхности оболочки.

Как видно из соотношения (19), электрическая напряженность не зависит от изгибных форм колебаний. Если в процессе выполнения расчетов необходимо определить разность потенциалов на электродах пьезокерамической оболочки, математическую постановку задачи (12)–(16) можно ограничить только пульсирующей модой ($n=0$). Тогда упрощенные соотношения примут вид:

$$(s^2 + a_1) w_{k0}^L = b_1 q_{k0}^L, \quad (20)$$

$$(s^2 + a_2) w_{c0}^L = b_2 q_{c0}^L, \quad (21)$$

$$\varphi_0^{(1)L} = A_1^L(s) \frac{1}{\sqrt{sr}} e^{s\alpha_1 R_2} K_{1/2}(s\alpha_1 r), \quad (22)$$

$$\varphi_0^{(2)L} = A_2^L(s) \frac{1}{\sqrt{sr}} e^{s\alpha_2 R_1} K_{1/2}(s\alpha_2 r) +$$

$$+ B_2^L(s) \frac{1}{\sqrt{sr}} e^{-s\alpha_2 R_2} I_{1/2}(s\alpha_2 r), \quad (23)$$

$$\varphi_0^{(0)L} = -Q^L(s) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{s\sqrt{sr}} e^{-sR_2} I_{1/2}(sr), \quad (24)$$

$$q_{c0}^L = [p_{20}^L - p_{10}^L] \Big|_{r=R_2} =$$

$$= -\beta_2 s \varphi_0^{(2)L} + \beta_1 s [\varphi_0^{(1)L} + \varphi_0^{(0)L}], \quad (25)$$

$$q_{k0}^L = -p_{20}^L \Big|_{r=R_1} = \beta_2 s \varphi_0^{(2)L}, \quad (26)$$

где

$$a_1 = (4\chi - \lambda_4) \frac{C_{11}^E}{R_1^2 c_1^2 \gamma_k} =$$

$$= \frac{2}{R_1^2 c_1^2 \gamma_k} \left(2 \frac{e_{31}^2}{\varepsilon_{33}^s} + C_{11}^E + C_{12}^E \right);$$

$$a_2 = \lambda_8 \frac{E_U}{\gamma_c R_2^2 c_1^2 (1 - \nu^2)} = \frac{2E_U}{\gamma_c c_1^2 R_2^2 (1 - \nu)};$$

$$b_1 = \frac{1}{h_1}; \quad b_2 = \frac{\gamma_k}{h_2 \gamma_c}.$$

Граничные условия запишутся следующим образом:

$$\left[\frac{\partial \varphi_0^{(1)L}}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_0^{(0)L}}{\partial r} \right] \Bigg|_{r=R_2} = sw_{c0}^L, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \varphi_0^{(2)L}}{\partial r} \Bigg|_{r=R_1} = sw_{k0}^L, \quad \frac{\partial \varphi_0^{(2)L}}{\partial r} \Bigg|_{r=R_2} = sw_{c0}^L.$$

Далее, подставляя формулы (20)–(26) в граничные условия (27), получаем следующую систему уравнений относительно $A_1^L(s)$, $A_2^L(s)$ и $B_2^L(s)$:

$$\begin{aligned}
 & A_1^L(s)[1 + F_1^{(1)L}(s)] - \\
 & - A_2^L(s)e^{-\alpha_2(R_2-R_1)s}F_1^{(2)L}(s) - \\
 & - B_2^L(s)F_1^{(3)L}(s) + \\
 & + B_2^L(s)e^{-2\alpha_2R_2s}F_1^{(3)L}(s) = \\
 & = -Q^L(s)\Phi_1^L(s) - Q^L(s)\Phi_2^L(s)e^{-2R_2s}, \\
 & A_1^L(s)F_2^{(1)L}(s) - B_2^L(s)[1 + F_2^{(3)L}(s)]\frac{1}{\pi} + \\
 & + A_2^L(s)e^{-\alpha_2(R_2-R_1)s}[1 + F_2^{(2)L}(s)] - \\
 & - B_2^L(s)e^{-2\alpha_2R_2s}[1 + F_2^{(2)L}(s)]\frac{1}{\pi} = \\
 & = Q^L(s)\Phi_3^L(s) - Q^L(s)\Phi_3^L(s)e^{-2R_2s}, \\
 & -B_2^L(s)e^{-\alpha_2(R_2-R_1)s}[1 + F_3^{(2)L}(s)]\frac{1}{\pi} - \\
 & - B_2^L(s)[1 + F_3^{(1)L}(s)]e^{-\alpha_2(R_1+R_2)s}\frac{1}{\pi} + \\
 & + A_2^L(s)[1 + F_3^{(1)L}(s)] = 0.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 F_1^{(2)L}(s) &= \frac{b_2\beta_2}{\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\alpha_2}}\frac{1}{s}; & F_1^{(3)L}(s) &= \frac{b_2\beta_2}{\pi\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\alpha_2}}\frac{1}{s}; \\
 F_2^{(1)L}(s) &= \frac{b_2\beta_1}{\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\alpha_2}}\frac{1}{s};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_1^{(1)L}(s) &= \left(\frac{\beta_1b_2}{\alpha_1} + \frac{1}{R_2\alpha_1}\right)\frac{1}{s} + \\
 & + a_2\frac{1}{s^2} + \frac{a_2}{R_2\alpha_1}\frac{1}{s^3};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2^{(2)L}(s) &= \left(-\frac{\beta_2b_2}{\alpha_2} + \frac{1}{R_2\alpha_2}\right)\frac{1}{s} + \\
 & + a_2\frac{1}{s^2} + \frac{a_2}{R_2\alpha_2}\frac{1}{s^3};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2^{(3)L}(s) &= \left(\frac{\beta_2b_2}{\alpha_2} - \frac{1}{R_2\alpha_2}\right)\frac{1}{s} + \\
 & + a_2\frac{1}{s^2} - \frac{a_2}{R_2\alpha_2}\frac{1}{s^3};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_3^{(1)L}(s) &= \left(\frac{\beta_2b_1}{\alpha_2} + \frac{1}{R_1\alpha_2}\right)\frac{1}{s} + \\
 & + a_1\frac{1}{s^2} + \frac{a_1}{R_1\alpha_2}\frac{1}{s^3};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_3^{(2)L}(s) &= -\left(\frac{\beta_2b_1}{\alpha_2} + \frac{1}{R_1\alpha_2}\right)\frac{1}{s} + \\
 & + a_1\frac{1}{s^2} - \frac{a_1}{R_1\alpha_2}\frac{1}{s^3};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_1^L(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_1}} \times \\
 & \times \left(1 - \left(b_2\beta_1 + \frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{s} + a_2\frac{1}{s^2} - \frac{a_2}{R_2}\frac{1}{s^3}\right)\frac{1}{s};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_2^L(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_1}} \times \\
 & \times \left(1 + \left(b_2\beta_1 + \frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{s} + a_2\frac{1}{s^2} + \frac{a_2}{R_2}\frac{1}{s^3}\right)\frac{1}{s};
 \end{aligned}$$

$$\Phi_3^L(s) = \frac{b_2\beta_1}{\sqrt{2\pi\alpha_2}}\frac{1}{s^2}.$$

В результате решения системы (28) в явном виде могут быть получены формулы для неизвестных $A_1^L(s)$, $A_2^L(s)$ и $B_2^L(s)$. Однако, они являются весьма громоздкими и содержат многократные произведения функций Бесселя, что приводит к принципиальным трудностям при обратном преобразовании Лапласа. Воспользуемся подходом, согласно которому удовлетворение граничным условиям осуществляется в области оригиналов. Для этого проводится инверсия равенств (28) и [6], а неизвестные $A_1(t)$, $B_2(t)$, $A_2(t)$ находятся из системы интегральных уравнений Вольтерра с запаздывающими аргументами:

$$\begin{aligned}
 & A_1(t) + \int_0^t A_1(t-x)F_1^{(1)}(x)dx - F_1^{(3)} \int_0^t B_2(t-x)dx = F_1^{(2)} \int_{\alpha_2(R_2-R_1)}^t A_2[t - \alpha_2(R_2 - R_1) - x]dx - \\
 & - F_1^{(3)} \int_{2\alpha_2 R_2}^t B_2(t - 2\alpha_2 R_2 - x)dx - \int_0^t Q(t-x)\Phi_1(x)dx - \int_{2R_2}^t Q(t - 2R_2 - x)\Phi_2(x)dx, \\
 & F_2^{(1)} \int_0^t A_1(t-x)dx - B_2(t)\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^t B_2(t-x)F_2^{(3)}(x)dx = \\
 & = - \int_{\alpha_2(R_2-R_1)}^t A_2[t - \alpha_2(R_2 - R_1) - x]F_2^{(2)}(x)dx + \frac{1}{\pi} B_2(t - 2\alpha_2 R_2) - A_2(t - \alpha_2(R_2 - R_1)) + \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{2\alpha_2 R_2}^t B_2(t - 2\alpha_2 R_2 - x)F_2^{(2)}(x)dx + \int_0^t Q(t-x)\Phi_3(x)dx - \int_{2R_2}^t Q(t - 2R_2 - x)\Phi_3(x)dx,
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 & A_2(t) + \int_0^t A_2(t-x)F_3^{(1)}(x)dx = \frac{1}{\pi} B_2[t - \alpha_2(R_1 + R_2)] + \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_2(R_1+R_2)}^t B_2[t - \alpha_2(R_1 + R_2) - x]F_3^{(1)}(x)dx + \frac{1}{\pi} B_2[t - \alpha_2(R_2 - R_1)] + \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_2(R_2-R_1)}^t B_2[t - \alpha_2(R_2 - R_1) - x]F_3^{(2)}(x)dx,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 F_1^{(1)}(t) &= \left(\frac{\beta_1 b_2}{\alpha_1} + \frac{1}{R_2 \alpha_1} \right) + a_2 t + \frac{a_2}{R_2 \alpha_1} \frac{t^2}{2}; \\
 F_2^{(2)}(t) &= \left(-\frac{\beta_2 b_2}{\alpha_2} + \frac{1}{R_2 \alpha_2} \right) + a_2 t + \frac{a_2}{R_2 \alpha_2} \frac{t^2}{2}; \quad F_2^{(3)}(t) = \left(\frac{\beta_2 b_2}{\alpha_2} - \frac{1}{R_2 \alpha_2} \right) + a_2 t - \frac{a_2}{R_2 \alpha_2} \frac{t^2}{2}; \\
 F_3^{(1)}(t) &= \left(\frac{\beta_2 b_1}{\alpha_2} + \frac{1}{R_1 \alpha_2} \right) + a_1 t + \frac{a_1}{R_1 \alpha_2} \frac{t^2}{2}; \quad F_3^{(2)}(t) = - \left(\frac{\beta_2 b_1}{\alpha_2} + \frac{1}{R_1 \alpha_2} \right) + a_1 t - \frac{a_1}{R_1 \alpha_2} \frac{t^2}{2}; \\
 F_1^{(2)} &= \frac{b_2 \beta_2}{\sqrt{\alpha_1} \sqrt{\alpha_2}}; \quad F_2^{(1)} = \frac{b_2 \beta_1}{\sqrt{\alpha_1} \sqrt{\alpha_2}}; \quad F_1^{(3)} = \frac{b_2 \beta_2}{\pi \sqrt{\alpha_1} \sqrt{\alpha_2}}; \\
 \Phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_1}} \left(1 - \left(b_2 \beta_1 + \frac{1}{R_2} \right) t + a_2 \frac{t^2}{2} - \frac{a_2}{R_2} \frac{t^3}{6} \right); \\
 \Phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_1}} \left(1 + \left(b_2 \beta_1 + \frac{1}{R_2} \right) t + a_2 \frac{t^2}{2} + \frac{a_2}{R_2} \frac{t^3}{6} \right); \\
 \Phi_3 &= \frac{b_2 \beta_1}{\sqrt{2\pi\alpha_2}} t.
 \end{aligned}$$

Система интегральных уравнений (29) решалась численно методом квадратурных формул. При этом наличие запаздывающих аргументов у входящих в правые части неизвестных позволяет решать интегральные уравнения, соответствующие граничным условиям на поверхностях каждой из оболочек, независимо. До момента времени $t = \alpha_2(R_2 - R_1)$ все коэффициенты, содержащие неизвестные функции с запаздывающими аргументами, равны нулю. Это позволяет вычислить $A_1(t)$ и $B_2(t)$ из первых двух уравнений. В последующие временные интервалы ($t > \alpha_2(R_2 - R_1)$, $t > \alpha_2(R_1 + R_2)$ и $t > 2\alpha_2 R_2$) найденные значения $A_1(t)$, $B_2(t)$, $A_2(t)$ со сдвигом во времени фигурируют в правых частях трех уравнений как известные величины. Таким образом удается построить рекуррентные формулы для их отыскания.

После определения $A_1(t)$, $B_2(t)$, $A_2(t)$ находятся физические характеристики переходного процесса. Ниже приведена формула для расчета разности электрических потенциалов $U(t)$, возникающих на электродах пьезокерамической оболочки:

$$U(t) = \frac{E_r^{(0)}(t)}{h_1} = -2 \frac{e_{31} d_{33}}{h_1 R_1 \varepsilon_{33}^s} \left(-\pi \int_0^t A_2(t-x) F_1(x) dx + \int_{\alpha_2(R_2 - R_1)}^t B_2(t - \alpha_2(R_2 - R_1) - x) F_2(x) dx + \int_{2\alpha_2 R_2}^t B_2(t - 2\alpha_2 R_2 - x) F_1(x) dx \right), \quad (30)$$

где

$$F_1(t) = \frac{1}{R_1 \sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{\alpha_2} + \frac{1}{R_1 \sqrt{\alpha_2}} t \right);$$

$$F_2(t) = \frac{1}{R_1 \sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{\alpha_2} - \frac{1}{R_1 \sqrt{\alpha_2}} t \right).$$

Равенство (30) записано с использованием формулы (17) после подстановки представления (23) во второе соотношение (27) с последующей инверсией полученного выражения. Входящие сюда интегралы также вычислялись с использованием квадратурных формул.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Расчеты проводились для гидроэлектроупругой системы, состоящей из внешней стальной и вложенной в нее пьезокерамической оболочки (материал марки ЦТБС-3 [7]). Внешнее пространство и межоболочечный объем заполнены водой. Расчеты на рис. 2–5 выполнены при следующих параметрах системы: $h_1/R_1 = 0.04$; $h_2/R_1 = 0.016$; $R_2/R_1 = 0.4$. На графиках напряжения на электродах пьезокерамической оболочки (кривые 1) отнесены к статическому напряжению, возникающему при гидростатическом обжатии одиночной пьезооболочки единичным акустическим давлением. Для сравнения кривыми 2 везде нанесены значения $U(t)$ при отсутствии упругого экрана. Во всех случаях длительность акустического импульса выбиралась равной $\tau = 15$.

Форма падающего акустического импульса задавалась следующей:

- $p^{(0)}(t) = H(\tau - t)$ – прямоугольный акустический импульс (рис. 2);
- $p^{(0)}(t) = H(\tau - t) \sin \omega_k t$ – акустический импульс с одночастотным заполнением (рис. 3), где ω_k – частота пульсирующих колебаний пьезокерамической оболочки в вакууме;
- $p^{(0)}(t) = H(\tau - t) \sin \omega_c t$ – акустический импульс с одночастотным заполнением (рис. 4), где ω_c – частота пульсирующих колебаний упругой оболочки в вакууме;
- $p^{(0)}(t) = H(\tau - t) \sin(\omega_0 + \varepsilon t)t$ – акустический линейно частотно модулированный (ЛЧМ) импульс (рис. 5), где $\omega_0 = 0.8\omega_k$ – начальная частота возбуждения; $\varepsilon = 0.08$ – девиация частоты.

При отыскании неизвестных функций $A_1(t)$, $B_2(t)$, $A_2(t)$ интегральные уравнения (29) численно решались путем разбиения временного интервала на равные отрезки. Варьируя длительностью временных отрезков, расчеты были проведены с контролируемой точностью (не хуже 2% в экстремальных точках). Для всех случаев шаг временного интервала составлял 0.01.

Проанализируем полученные результаты. Прежде всего отметим, что падающая плоская волна давления вызывает возникновение переходного процесса, длительность которого зависит от конфигурации акустического импульса. Как и следовало ожидать, на всех осциллограммах электрического напряжения наблюдается нулевой начальный участок, когда пьезокерамическая оболочка

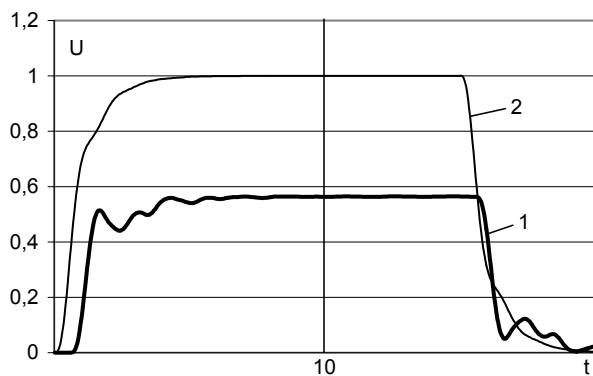


Рис. 2. Электрическое напряжение на электродах пьезокерамической оболочки при действии акустического импульса прямоугольной формы

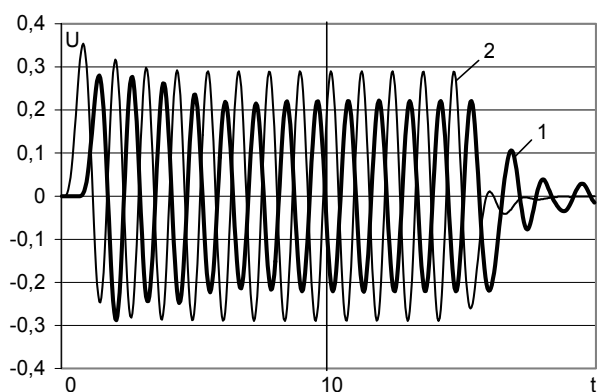


Рис. 3. Электрическое напряжение на электродах пьезокерамической оболочки при действии акустического импульса с одночастотным заполнением $\omega = \omega_k$

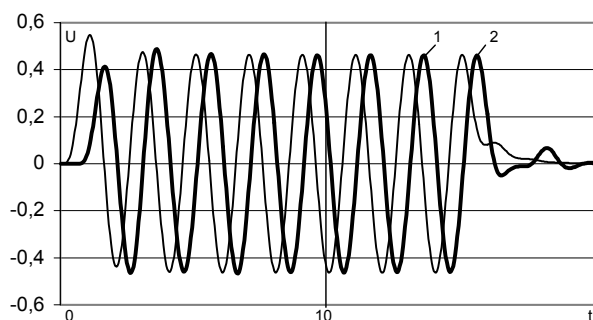


Рис. 4. Электрическое напряжение на электродах пьезокерамической оболочки при действии акустического импульса с одночастотным заполнением $\omega = \omega_c$

находится в состоянии покоя. Длительность этого интервала равна времени, необходимому акустической волне для прохождения расстояния между оболочками.

На рис. 2–4 осциллограммы электрических напряжений качественно повторяют характер изменения давления за фронтом падающей волны. Отличия на переднем и заднем фронтах импульсов (прямоугольного и имеющего одночастотное заполнение) объясняются наличием переходного процесса, вызванного инерциальностью системы. При этом большая инерциальность системы с упругой оболочкой приводит к большей длительности переходных процессов в ней. При этом уровни электрических напряжений оказываются ниже, чем для одиночной пьезокерамической оболочки для прямоугольного акустического импульса без заполнения и для случая, когда частота его заполнения равна ω_k .

Если частота заполнения импульса равна ω_c (см. рис. 4), уровни электрических напряжений на экранированной и неэкранированной оболочках практически совпадают. Отмечено наличие всплесков напряжения для одиночной пьезокерамической оболочки в начале действия импульса, причем для системы оболочек они отсутствуют (см. рис. 3 и 4). Наоборот, при возбуждении системы импульсом с одночастотным заполнением $\omega = \omega_c$ в начальной стадии возбуждения электрическое напряжение оказывается ниже, чем для всего интервала возмущения. Это объясняется инерционностью внешней оболочки и жидкости в межоболочечном пространстве. В целом уменьшение частоты заполнения акустического импульса ведет к тому, что электрическое напряжение возрастает. Конфигурация центральной части осциллограмм, представленных на рис. 2–4, свидетельствует о том, что система для этого временного интервала колеблется с практически постоянными амплитудой и частотой в установившемся режиме.

При возбуждении системы акустическим ЛЧМ импульсом (рис. 5) электрическое напряжение, снимаемое с электродов, ведет себя несколько по-иному. В случае одиночной пьезокерамической оболочки максимальное значение $U(t)$ наблюдается в начальной стадии возбуждения с последующим монотонным спаданием. Для системы оболочек в начальной стадии возбуждения напряжение возрастает, затем монотонно спадает до того момента, когда частота возбуждения становится близкой к резонансной частоте пьезокерамической оболочки. Затем электрическое напряжение выходит на практически установившийся режим колебания.

Во всех случаях при окончании действия акустических импульсов электрическое напряжение на электродах начинает уменьшаться. При этом для одиночной пьезокерамической оболочки снижение уровня электрического сигнала происходит быстрее, чем для системы оболочек.

ВЫВОДЫ

Как следует из материалов статьи, математическая постановка задачи и полученные результаты справедливы для системы пьезокерамической и упругой сферических оболочек, которая в первом приближении может моделировать такой физический объект как экранированный сферический гидрофон. Наружный металлический экран является конструктивным элементом, предназначенным для защиты пьезоприемника от агрессивных факторов внешней среды или возможных механических повреждений. Следует отметить, что реальные сферические пьезопреобразователи имеют либо круглое отверстие, либо цилиндрическую юбку, сопряженную со сферой, а защитный экран оснащен элементами крепления и отверстием для вывода электрических проводов. Указанные конструктивные особенности могут привести к некоторому несовпадению экспериментальных данных с изложенными теоретическими результатами. Однако, поскольку конфигурация электрического сигнала зависит лишь от нулевой моды колебаний оболочек, можно предположить, что эти отличия не будут искажать качественную картину процесса.

При возбуждении электроупругой системы акустическими импульсами простой формы (прямоугольный и с одночастотным заполнением), электрическое напряжение позволяет ориентировочно судить о временной эволюции давления за фронтом падающей волны. В случае действия на электроупругую систему сложных акустических импульсов (например, ЛЧМ импульса) инерционность системы оболочек и

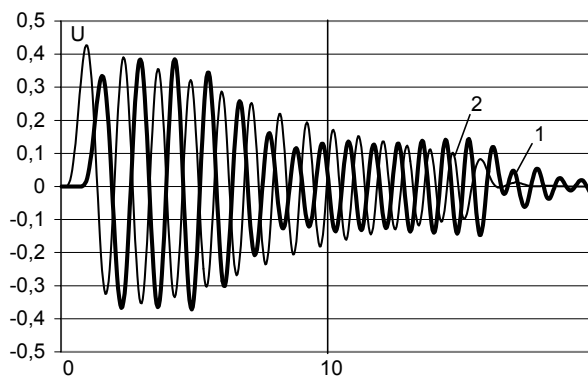


Рис. 5. Электрическое напряжение на электродах пьезокерамической оболочки при действии акустического ЛЧМ импульса

жидкостей приводит к существенным различиям между характером изменения электрического напряжения и конфигурацией акустического сигнала. Это может затруднить оценку изменения давления за фронтом падающей волны по электрическому напряжению на приемнике.

1. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Бабаев А. Э. Динамика систем оболочек взаимодействующих с жидкостью // Прикл. мех.– 2002.– 38, N 3.– С. 13–58.
2. Савин В. Г., Моргун И. О. Преобразование акустических импульсов в электрические сферической пьезокерамической оболочкой // Электроника и связь.– 2006.– N 6.– С. 36–42.
3. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Бабаев А. Э. Гидроупругость систем оболочек.– К.: Вища школа, 1984.– 208 с.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1978.– 736 с.
5. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость / Механика связанных полей в элементах конструкций: том 5.– К.: Наук. думка, 1989.– 280 с.
6. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению.– М.: Высш. школа, 1965.– 466 с.
7. Пьезокерамические преобразователи / Под ред. С. И. Пугачева.– Л.: Судостроение, 1984.– 256 с.