

УДК 539.3

## ОСОБЕННОСТИ ВОЗБУЖДЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН ПРИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПОЛУСЛОЯ

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ, В. Т. ГРИНЧЕНКО, И. В. СТАРОВОЙТ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

*Получено 20.06.2007*

Проведен анализ особенностей распределения вносимой энергии между различными распространяющимися модами в упругом полуслое при его антисимметричных колебаниях. Рассмотрены как вынужденные колебания, так и процесс отражения первой и второй мод от свободного торца. Показано существование существенной частотной зависимости энергии, которую переносит данная мода. Энергоемкость конкретной волны зависит от частоты и вида нагрузки.

Проведено аналіз особливостей розподілу внесеної енергії між різними нормальними хвилями, які поширюються у пружному півшарі при його антисиметричних коливаннях. Розглянуто як вимушені коливання, так і відбиття першої та другої мод від вільного краю півшару. Показано існування істотної частотної залежності енергії, яку переносить певна хвиля, що поширюється. Енергоємність конкретної моди залежить від частоти й типу навантаження.

The paper deals with analyzing the features of the input energy distribution among different propagating modes in the elastic half-layer at its antisymmetric vibration. Both the forced oscillation, and reflection of the first and second waves from the free end are considered. The significant frequency dependence of the energy transferred by a certain propagating wave is shown. Power consumption of the particular mode depends on frequency and type of loading.

### ВВЕДЕНИЕ

Широкое использование ультразвуковых методов неразрушающего контроля стимулирует исследования, направленные на углубление понимания свойств волн Лэмба в упругих волноводах, которыми переносятся возмущения во многих элементах конструкций. Этого можно достичь, проводя тщательный сравнительный анализ количественных данных, полученных при решении сложных граничных задач динамической теории упругости для различных типов нагружения, и устанавливая связи между энергетическими и кинематическими характеристиками мод.

Сложность граничных задач динамической теории упругости для конечного волновода стимулировала развитие различных подходов к построению их решений. Отметим, что последние работы в этой области посвящены разработке комбинированных численно-аналитических методов, обеспечивающих уменьшение объема и повышение точности вычислений и, главное, упрощающих качественный анализ результатов. Это направление исследований представлено, например, комбинированными методами граничных элементов и однородных решений [1], конечных элементов и однородных решений [2], "mode-exciting method" [3]. При этом основой рассмотрения динамических процессов является представление о модовой структуре волнового поля и данные об особенностях обмена энергией между продольными и сдвиговыми вол-

нами при отражении их от свободной или заземленной границы.

Особо следует выделить класс задач, связанных с рассмотрением упругих волн в полуограниченных телах типа полуслоя и полуцилиндра, ведь на такой простейшей геометрии удастся установить специфические особенности распространения упругих волн, не имеющие аналога в акустических волноводах.

Большинство ранних работ, посвященных этой тематике, связано с исследованием явления краевого резонанса – эффекта локализации волновых движений вблизи свободного торца [4–7]. В упругом полуслое краевой резонанс изучался при симметричных относительно срединной поверхности колебаниях в области частот, когда существует только одна распространяющаяся волна. Это дало возможность сформировать довольно стройную картину характера движения у торца полуслоя и дать достаточно полное физическое объяснение причин возникновения краевого резонанса [8–10].

Знание модовой структуры волнового поля позволяет анализировать характер движения у торца полуслоя для двух типичных случаев возбуждения волн – с помощью падающей из бесконечности нормальной волны и внешней гармонической нагрузки на торце. Для упругого волновода, в отличие от акустического, отражение падающей нормальной волны от торца является сложным процессом, при котором энергия падающей нормаль-

ной волны перераспределяется между неоднородными (реактивная составляющая) и бегущими (активная составляющая) волнами. Заметим, что в большинстве работ рассматривались только симметричные колебания для фиксированного значения коэффициента Пуассона.

На частотах, где в волноводе существует несколько бегущих волн, распределение энергии первой падающей волны между ними при отражении рассматривалось методом вариаций [11], методом проекций [12] и методом граничных элементов [1]. Для случая полуслоя с заземленным торцом энергетика этого процесса изучалась в работах [12, 13].

При вынужденных колебаниях под действием нормальной равномерной нагрузки на торце распределение энергии, поступающей в полуслой, между различными распространяющимися модами рассматривалось в [14]. Такая граничная задача исследовалась в [15] методом суперпозиции при изучении краевого резонанса, а в [16] – с точки зрения изучения возможности сформулировать динамический аналог принципа Сен-Венана при вынужденных колебаниях под действием самоуравновешенной и несамоуравновешенной нагрузок.

Количественный анализ распределения энергии между различными распространяющимися волнами для обоих типов возбуждения колебаний и обоих типов идеальных граничных условий на торце показал наличие существенной частотной зависимости энергетических вкладов разных распространяющихся волн. При этом в диапазоне, лежащем ниже частоты запирания четвертой распространяющейся волны, практически вся энергия уносится от торца только одной распространяющейся волной. Однако на разных частотах могут доминировать разные моды. Так, первая нормальная волна переносит всю энергию вплоть до частоты  $\Omega^*$ , на которой первый комплексный корень вырождается в действительный, и в отраженном поле появляются три бегущие волны. В области между  $\Omega^*$  и  $\Omega_{2k}$  ( $\Omega_{2k}$  – частота запирания для второй распространяющейся моды) вклад первой нормальной волны падает, а энергоемкость второй и третьей волн возрастает как при вынужденных колебаниях, так и при отражении падающей волны от торца. Более того, и при свободном, и при заземленном торцах энергоемкость первой нормальной волны падает при появлении распространяющихся мод высших порядков. Если частота становится больше частоты запирания для третьей нормальной волны, доминирующий тип моды определяется типом возбуждения и граничными условиями на торце.

Впервые некоторое объяснение причин разли-

чного возбуждения бегущих волн при фиксированной нормальной нагрузке на торце, было представлено в работе Торвика [14], который установил, что степень возбуждения моды связана с согласованностью распределения нагрузки и распределения нормального напряжения в распространяющейся волне по высоте.

Для случая антисимметричных колебаний полуслоя распределение энергии по бегущим модам практически не анализировалось, хотя количественные данные приводились в ряде работ в связи с разработкой методов решения граничных задач [1, 3, 17–19]. Изгибные деформации полуслоя при отражении первой нормальной волны от торца в связи с поиском аналога краевого резонанса изучались в [20]. Статьи [18, 19] следует отметить особо, так как в них содержатся обширные экспериментальные сведения об амплитудах возбуждения нормальных волн.

В этой работе изучаются особенности распределения энергии по распространяющимся модам при отражении нормальных волн, а также при вынужденных антисимметричных колебаниях полуслоя. Основное внимание сосредоточено на анализе физических причин, вызывающих перераспределение вносимой в волновод энергии между различными распространяющимися модами.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоскую задачу определения волнового поля в изотропном при плоской деформации полубесконечного упругого слоя ( $|Y| \leq H$ ,  $Z \geq 0$ ,  $-\infty > X > \infty$ ) с заданными модулем сдвига  $\mu$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  и плотностью  $\rho$ . Выбор системы координат и геометрия области показаны на рис. 1. Волны предполагаются гармоническими с круговой положительной вещественной частотой  $\omega$ ; зависимость от времени кинематических и силовых характеристик поля задается множителем  $e^{-i\omega t}$ , который опускается в последующих выкладках. Рассматривается антисимметричное относительно плоскости  $Y=0$  волновое поле. При построении решения вводятся безразмерные координаты  $y=Y/H$ ,  $z=Z/H$ .

Рассмотрим два случая возбуждения волнового поля в волноводе. Для начала изучим процесс отражения приходящих из бесконечности распространяющихся нормальных волн  $\mathbf{u}^{(0)}(y, z)$  от свободного от напряжений торца (рис. 1). Для нахождения характеристик отраженных волн  $\mathbf{u}^{(1)}(y, z)$  необходимо решить следующую граничную зада-

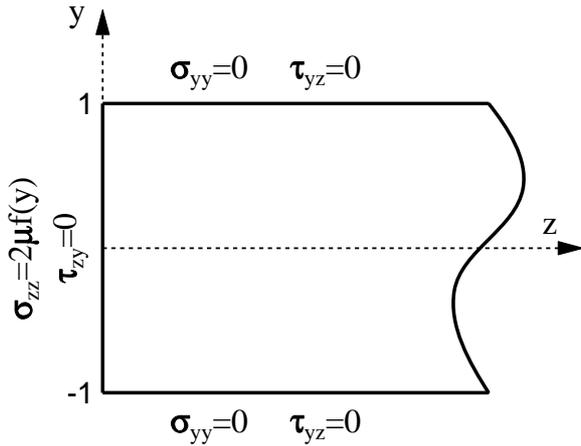


Рис. 1. Геометрия задачи

чу для уравнений движения Ламе [21]:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(y, 0) + \sigma_{zz}^{(0)}(y, 0) &= 0, & z = 0, & |y| \leq 1, \\ \tau_{zy}(y, 0) + \tau_{zy}^{(0)}(y, 0) &= 0, & z = 0, & |y| \leq 1, \\ \sigma_{yy}(\pm 1, z) = \tau_{yz}(\pm 1, z) &= 0, & y = \pm 1, & z \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Индекс 0 соответствует падающей волне, напряжения в которой задаются в форме

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{zz}^{(0)}}{2\mu} &= iC^0 \left( \frac{(\xi^2 + \alpha_2^2)}{2\alpha_1} (\xi^2 + \Omega_0^2) \alpha_1 \frac{\text{sh } \alpha_1 y}{\text{sh } \alpha_1} - \right. \\ &\quad \left. - \xi^2 \alpha_2 \frac{\text{sh } \alpha_2 y}{\text{ch } \alpha_2} \right) e^{-i\xi z}, \quad (2) \\ \frac{\tau_{zz}^{(0)}}{2\mu} &= C^0 \xi \frac{\xi^2 + \alpha_2^2}{2} \left( \frac{\text{ch } \alpha_2 y}{\text{ch } \alpha_2} - \frac{\text{ch } \alpha_1 y}{\text{ch } \alpha_1} \right) e^{-i\xi z}. \end{aligned}$$

Постоянная распространения  $\xi$  соответствует действительному корню дисперсионного уравнения, которое для антисимметричных колебаний изотропного бесконечного слоя со свободными поверхностями имеет вид

$$\Delta(\xi) = \xi^2 \alpha_2 \text{th } \alpha_2 - (2\xi^2 - \Omega_2^2) \frac{\text{th } \alpha_1}{4\alpha_1} = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$\alpha_j = \begin{cases} \sqrt{\xi^2 - \Omega_j^2}, & |\xi| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \xi^2}, & |\xi| < \Omega_j; \end{cases} \quad (4)$$

$\Omega_1 = \omega h / c_l$ ;  $\Omega_2 = \omega h / c_s$ ;  $c_l$  и  $c_s$  – скорости продольной и поперечной волн соответственно.

В случае вынужденных колебаний для определения характеристик генерируемого волнового поля  $u(y, z)$  следует решить задачу с граничными условиями

$$\frac{\sigma_{zz}}{2\mu} = f(z), \quad \frac{\tau_{zz}}{2\mu} = \phi(z). \quad (5)$$

Заметим, что везде поверхности  $y = \pm 1$  считаются свободными от напряжений. Дополнительно к граничным условиям (1) должны выполняться условия излучения, заключающиеся в том, что каждая распространяющаяся нормальная волна уносит энергию от торца полуполосы на бесконечность.

В дальнейшем количественные характеристики волновых полей будут нормироваться на амплитуду падающей волны  $C^0$  или на величину внешней нагрузки на торце  $S_0$ .

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Применим метод суперпозиции [21], в рамках которого построим решение граничной задачи для антисимметричных колебаний волновода. Следуя общей схеме метода [17], компоненты вектора смещений ( $z \geq 0$ ) представим в виде

$$\begin{aligned} u_y^{(1)} &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \beta_k e^{-q_1 z} + B_k q_2 e^{-q_2 z} \right) \times \\ &\quad \times \cos \beta_k y + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U_y(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u_z^{(1)} &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k q_1 e^{-q_1 z} + B_k \beta_k e^{-q_2 z} \right) \times \\ &\quad \times \sin \beta_k y - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U_z(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau \end{aligned}$$

с неизвестными постоянными  $A_k, B_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и функцией  $x(\tau)$ . Кроме того, здесь положено

$$U_y(\tau, y) = \tau^2 \frac{\text{ch } p_2 y}{\text{ch } p_2} - \frac{(\tau^2 + p_2^2)}{2} \frac{\text{ch } p_1 y}{\text{ch } p_1}; \quad (7)$$

$$U_z(\tau, y) = -\tau \left( p_2 \frac{\text{sh } p_2 y}{\text{ch } p_2} - \frac{(\tau^2 + p_2^2)}{2} \frac{\text{sh } p_1 y}{\text{ch } p_1} \right),$$

$$p_j = \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - \Omega_j^2}, & |\tau| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \tau^2}, & |\tau| < \Omega_j; \end{cases}$$

$$q_j = \begin{cases} \sqrt{\beta_k^2 - \Omega_j^2}, & |\beta_k| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \beta_k^2}, & |\beta_k| < \Omega_j; \end{cases}$$

$$\beta_k = \frac{2k-1}{2}\pi.$$

Представление (6) выбрано таким образом, чтобы условие отсутствия касательных напряжений на поверхностях  $y = \pm 1$  удовлетворялось автоматически. Выполнение оставшихся граничных условия приводит к системе интеграл-алгебраических уравнений относительно неизвестных  $y_k = (-1)^k \beta_k B_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  и функции  $x(\tau)$ , причем

$$A_k = -B_k \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2\beta_k q_1} - (-1)^k \frac{\phi_k}{\beta_k q_1}.$$

Указанная система имеет следующий вид:

$$x(\tau)\Delta(\tau) - \sum_{k=1}^{\infty} y_k c_k(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \frac{2(\beta_k^2 + \Omega_0^2)}{\beta_k(\tau^2 + q_1^2)},$$

$$y_k R_k - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d_k(\tau) d\tau = f_k, \quad (8)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Здесь введены обозначения

$$c_k = \frac{(\beta_k^2 + \Omega_0^2)(\beta_k^2 + q_2^2)}{\beta_k^2(\beta_k^2 + p_1^2)} - \frac{2q_2^2}{\beta_k^2 + p_2^2};$$

$$d_k = \frac{(\tau^2 + \Omega_0^2)(\tau^2 + p_2^2)}{\beta_k^2 + p_1^2} - \frac{2\tau^2 p_2^2}{\beta_k^2 + p_2^2}; \quad (9)$$

$$R_k = q_2 - \frac{(\beta_k^2 + q_2^2)^2}{4\beta_k^2 q_1};$$

$\Delta(\tau)$  – определитель Рэля–Лэмба (3).

Для вынужденных колебаний нагрузка раскладывается в ряд Фурье:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_k \sin \beta_k z,$$

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \phi_k \cos \beta_k z.$$

В случае возбуждения волнового поля падающей волной справедливо

$$\phi_k = -\xi(2\xi^2 - \Omega_2^2)\beta_k \left( \frac{1}{\beta_k^2 + p_2^2} - \frac{1}{\beta_k^2 + p_1^2} \right);$$

$$f_k = -2i \left( \frac{(\xi^2 + p_2^2)(\xi^2 + \Omega_0^2)}{2(\beta_k^2 + p_1^2)} - \frac{\xi^2 p_2^2}{\beta_k^2 + p_2^2} \right).$$

Алгоритм решения системы (8) аналогичен приведенному в [8, 17]. Отметим только, что при ее редуцировании использовались асимптотики

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = a_0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} x(\tau)t^2 = a_0.$$

Для замыкания конечной системы использовались соотношения

$$y_K = a_0. \quad (10)$$

Решение граничной задачи, полученное по методу суперпозиции, можно следующим образом представить через нормальные волны:

$$\mathbf{u}(y, z) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \mathbf{u}(\xi_j, y) e^{i\xi_j z}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{u}(\xi_j, y) = \{U_y(\xi_j, y), U_z(\xi_j, z)\}$ , а  $\xi_j$  – корни уравнения Рэля–Лэмба (3). Коэффициенты возбуждения нормальных волн находятся с учетом соотношений

$$C_j = \frac{1}{\Delta'(\xi_j)} \times$$

$$\times \left( \sum_{k=1}^{\infty} y_k a_k(\xi_j) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \frac{2(\beta_k^2 + \Omega_0^2)}{\beta_k(\xi_j^2 + q_1^2)} \right). \quad (12)$$

Главным критерием качества решения, полученного в результате редукции системы, являлся контроль за точностью выполнения граничных условий. При  $k = 1, \dots, 15$  и ограничении верхнего предела в интегралах до  $T = 150$  (для  $\tau > 150$  использовались асимптотические представления для подынтегральных функций) граничные условия на торце выполнялись с точностью до 1.0% заданных напряжений, а на поверхностях  $y = \pm 1$  – до 0.2%.

Дополнительным критерием достоверности результатов был контроль за выполнением закона сохранения энергии, согласно которому энергия, поступающая в волновод, равна энергии, уносимой распространяющимися волнами. В случае вынужденных колебаний средний за период поток мощности, поступающий в полуслой, определяется со-

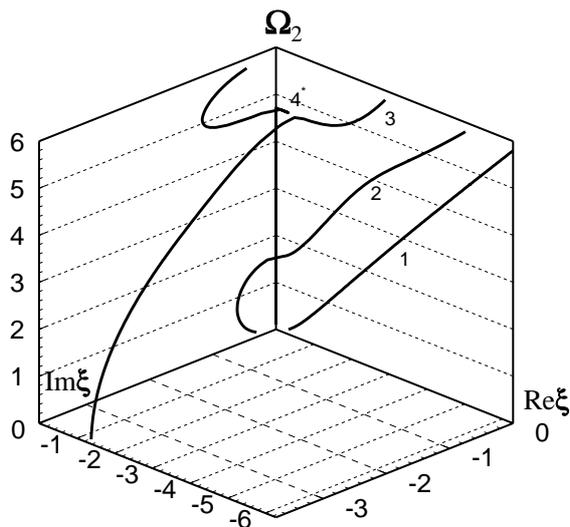


Рис. 2. Дисперсионные кривые изгибных мод Лэмба для  $\nu = 0.3$

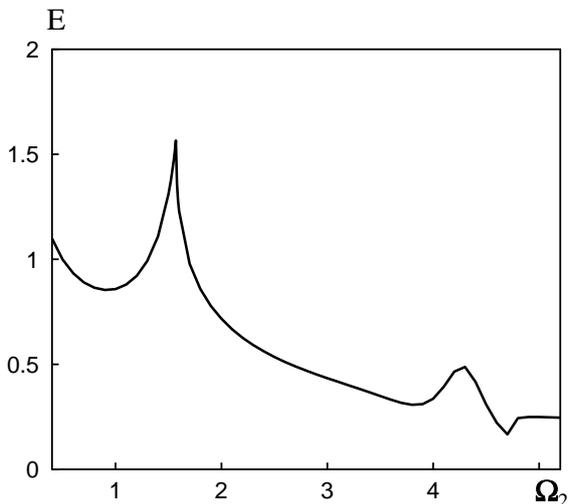


Рис. 3. Частотная зависимость подведенной за период к полубесконечному слою энергии для нагрузки  $\sigma_{zz}(y, 0) = 2\mu \sin(\pi y/2), \tau_{zy}(y, 0) = 0$

отношением

$$\begin{aligned}
 W^0 = & -\mu\omega \left( -\frac{\Omega_2^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \frac{\text{Im } y_k}{\beta_k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \times \right. \\
 & \times \left[ \text{Im} \left( y_k \left( \frac{q_2}{\beta_k} - \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2\beta_1} \right) \right) - \phi_k \text{Im} \frac{1}{q_1} \right] + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \phi_k \cos \beta_k y \times \\
 & \times \text{Im} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U_y(\tau, y) d\tau \right].
 \end{aligned} \tag{13}$$

Средний за период поток мощности, уносимый распространяющимися волнами, будет

$$W = \sum_{j=1}^J W_j, \quad W_j = \mu\omega \frac{\Omega_2^2}{2} |C_j|^2 \Delta'(\xi_j). \tag{14}$$

Здесь  $J$  – количество распространяющихся волн, которые могут существовать на данной частоте;  $W_j$  – поток мощности, переносимый  $j$ -ой волной. Закон сохранения энергии при расчетах выполнялся с точностью до 99.91 % величины  $W^0$ .

### 3. АНАЛИЗ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ДАННЫХ

Перейдем к анализу результатов вычислений, характеризующих волновое поле при антисимметричных колебаниях полуслоя. На рис. 2 представлены дисперсионные кривые для антисимметричных волн в бесконечном слое для  $\nu = 0.3$ . Цифры возле кривых обозначают порядковые номера нормальных волн (мод). Рассматривается диапазон частот, в котором могут существовать три нормальные распространяющиеся волны – в него входит участок 4\* с “обратной” волной.

#### 3.1. Вынужденные колебания

Выбирая характер возбуждения волнового поля в полуслое (5), прежде всего остановимся на нормальной нагрузке вида

$$\sigma_{zz}(y, 0) = 2\mu \sin \frac{\pi y}{2}, \quad \tau_{zy}(y, 0) = 0.$$

По сути, полуслой нагружается изгибающим моментом на торце.

На рис. 3 представлена частотная зависимость безразмерной величины  $E = W/(2\mu\omega)$ , которая характеризует энергию, подведенную к полуслою за период. Прежде всего, отметим сильное изменение потребляемой системой энергии с частотой, что при фиксированной амплитуде нагрузки связано с изменением скоростей точек на торце полуслоя. На рис. 3 четко выражены два пика потребляемой энергии – при  $\Omega_2 = \pi/2$  (частота запирания для второй распространяющейся волны) и при  $\Omega_2 = 4.27$ .

На первый взгляд, эти данные можно интерпретировать как указание на существование в рассматриваемом частотном диапазоне двух резонансных ситуаций. Следует, однако, иметь в виду, что рост энергии, потребляемой системой с распределенными параметрами, может быть обусловлен двумя разнородными факторами. Так, увеличение потребляемой энергии может быть следствием повышения степени согласованности нагрузки

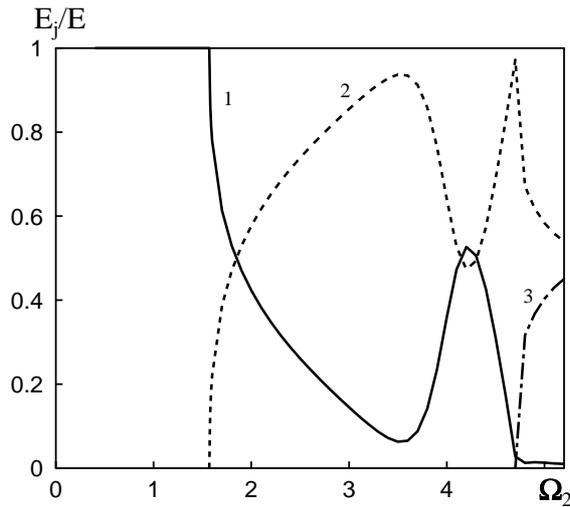


Рис. 4. Частотная зависимость процентного распределения энергии по нормальным модам (номера кривых соответствуют номерам мод)

и формы колебаний. Именно такая ситуация возможна в данном случае, поскольку распределение смещений (скоростей) в нормальных волнах существенно зависит от частоты. Кроме того, закачиваемая энергия может возрастать, если частота внешней нагрузки близка к некоторой собственной частоте системы (в случае симметричного волнового поля – к частоте краевого резонанса).

Роль согласованности нагрузки и формы колебаний наглядно иллюстрируется данными о распределении энергии между бегущими волнами (рис. 4). В отличие от продольных колебаний полуслоя [14], в данном случае не удается разделить исследуемую частотную полосу на диапазоны, в которых преваляровала бы только одна распространяющаяся мода. Каждая из волн на разных частотах может оказаться доминирующей, слабо возбуждаемой или переносящей энергию, сопоставимую с другими распространяющимися волнами. Например, вторая мода переносит более 90% энергии, поступающей в полуслой, в диапазоне  $3.3 \leq \Omega_2 \leq 3.7$  и более 80% – при  $4.6 \leq \Omega_2 \leq 4.72$ . Вблизи своих частот записания нормальные моды не всегда являются наиболее энергетически выраженными. Так, третья мода переносит здесь не более 40% энергии, поступающей в полуслой.

Для трактовки наблюдаемой энергетической картины рассмотрим распределения напряжений по высоте полуслоя на различных частотах, характерные для разных мод (рис. 5). Рис. 5, а и б соответствуют нормальному и касательному напряжениям для первой нормальной волны, а рис. 5, в

и г – для второй. Кривые 1 соответствуют частоте  $\Omega_2 = 1.0$ , кривые 2 –  $\Omega_2 = 1.5$ , кривые 3 –  $\Omega_2 = 1.6$ , кривые 4 –  $\Omega_2 = 2.0$ , кривые 5 –  $\Omega_2 = 3.0$ , кривые 6 –  $\Omega_2 = 4.0$ . Вычисления проведены при фиксированной амплитуде нагрузки. Следовательно, величины напряжений существенно зависят от степени ее согласованности с распределением напряжений в соответствующих модах. Поэтому для представления данных на одном рисунке приходилось вводить масштабирующие множители. В частности, на порядок уменьшены следующие напряжения: на рис. 5, а для кривой 6, на рис. 5, б – для кривых 4 и 5, на рис. 5, в и г – для кривых 5 и 6. Для кривой 6 на рис. 5, б представленные значения уменьшены на два порядка. Следует также отметить, что кривые 1, 2 для второй моды на рис. 5, в и г дают распределение напряжений ниже частоты ее записания.

Сравнение формы приложенной нагрузки  $\sigma_{zz}(y, 0) = 2\mu \sin \pi(y/2)$  и распределения напряжений по высоте слоя показывает, что напряжение во второй моде на частотах  $\Omega_2 = 1.6$  (кривая 3 на рис. 5, в),  $\Omega_2 = 2.0$  (кривая 4 на рис. 5, в) и  $\Omega_2 = 3.0$  (кривая 5 на рис. 5, в) больше соответствует ему, чем в первой. Действительно, в первой моде нормальное напряжение находится в противофазе к приложенной нагрузке (кривые 1–5 на рис. 5, а). В то же время, на частоте  $\Omega_2 = 4.0$  распределение напряжения в первой моде приближается к форме приложенной нагрузки. Как видно из рис. 4, переносимая второй модой энергия превышает энергию первой моды в диапазоне  $\Omega_2 = 1.9 \div 4.1$ . В узкой частотной полосе  $\Omega_2 = 3.7 \div 4.6$  энергоемкость первой моды увеличивается, однако и здесь она не становится доминирующей.

Несмотря на хорошее согласование формы нагрузки и нормальной компоненты напряжений во второй моде, следует помнить, что граничные условия (5) необходимо выполнить как по нормальным, так и по касательным напряжениям. Оценим степень влияния нормальных и касательных составляющих на энергию нормальной волны. Общее выражение для среднего за период потока мощности  $E$  через поперечное сечение  $z = \text{const}$  определяется как [21]

$$W = -\frac{i\omega}{4} \int_{-1}^1 \left( \sigma_{zz} u_z^* - \sigma_{zz}^* u_z + \tau_{zy} u_y^* - \tau_{zy}^* u_y \right) dy. \quad (15)$$

Поскольку для распространяющейся волны  $\sigma_{zz}^* = -\sigma_{zz}$ ,  $u_z^* = u_z$ ,  $\tau_{zy}^* = \tau_{zy}$ ,  $u_y^* = -u_y$ , то выраже-

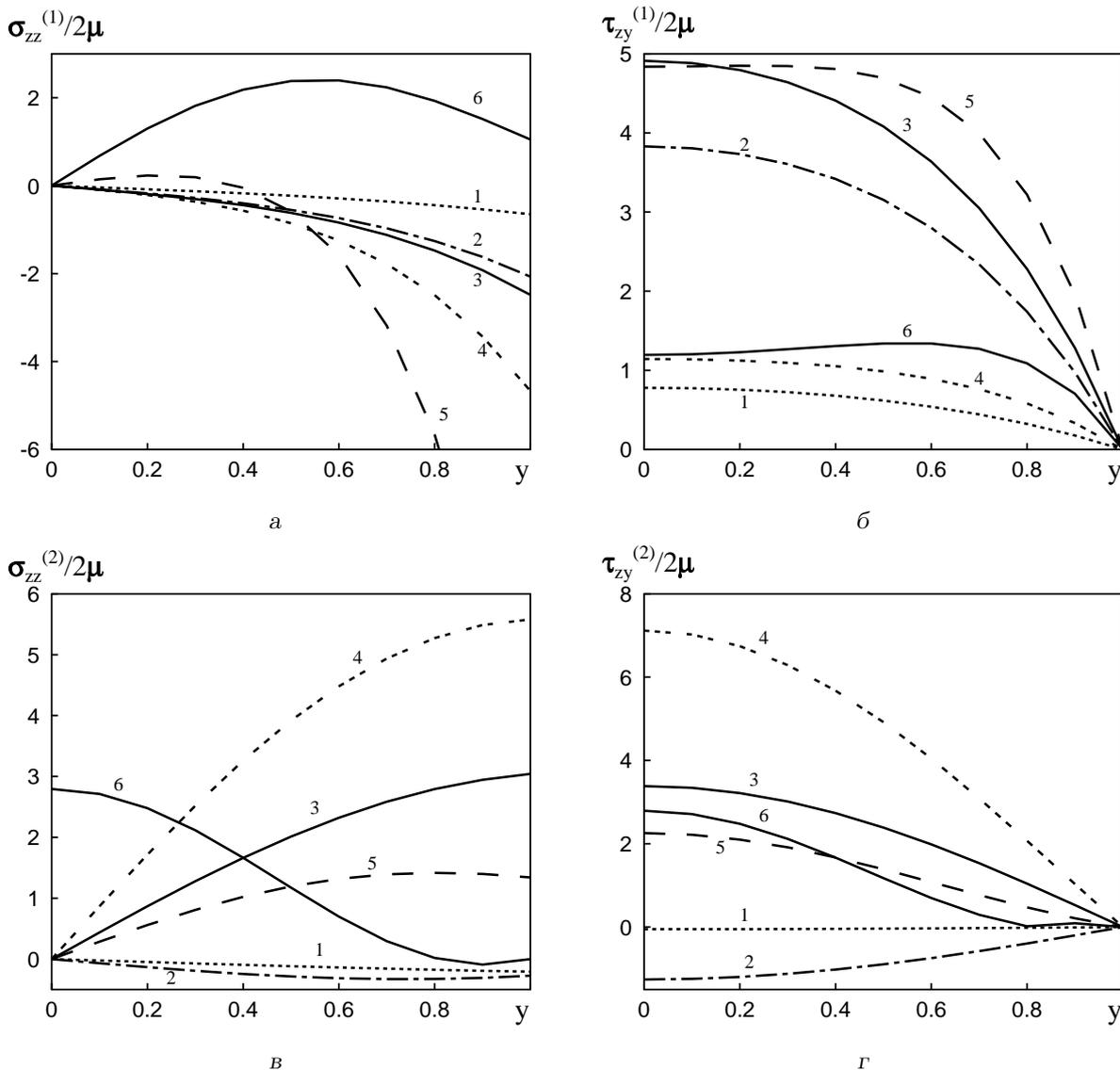


Рис. 5. Распределение напряжений по высоте слоя для мод Лэмба:  
 а – нормальное напряжение для первой моды, б – касательное напряжение для первой моды,  
 в – нормальное напряжение для второй моды, г – касательное напряжение для второй моды

ние (15) можно переписать в виде

$$W = -\frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 \left( \sigma_{zz} u_z - \tau_{zy} u_y \right) dy.$$

Нормальное выражение определяется составляющей потока мощности  $J_s$ , а касательное –  $J_t$ :

$$J_s = \int_{-1}^1 \sigma_{zz} u_z dy, \quad J_t = \int_{-1}^1 \tau_{zy} u_y dy.$$

На рис. 6 представлены частотные зависимости  $J_{is}$  и  $J_{it}$ . Номера кривых соответствуют но-

мерам нормальных мод, индексы  $s$  и  $t$  относятся к нормальной и касательной составляющим энергии. Звездочками обозначена доля полной энергии, переносимая первой, а кружочками – второй волной. Как видно из графиков, общая энергия второй моды определяется нормальной составляющей. При этом нормальное напряжение в ней по форме наиболее соответствует приложенной нагрузке. Очевидно, именно по этой причине данная мода наиболее энергетически выражена в диапазоне  $\pi/2 \leq \Omega_2 \leq 3.8$ . При дальнейшем росте частоты формы нагрузки и напряжений во второй моде уже существенно разнятся (кривая  $b$  на рис. 5,  $v$ )

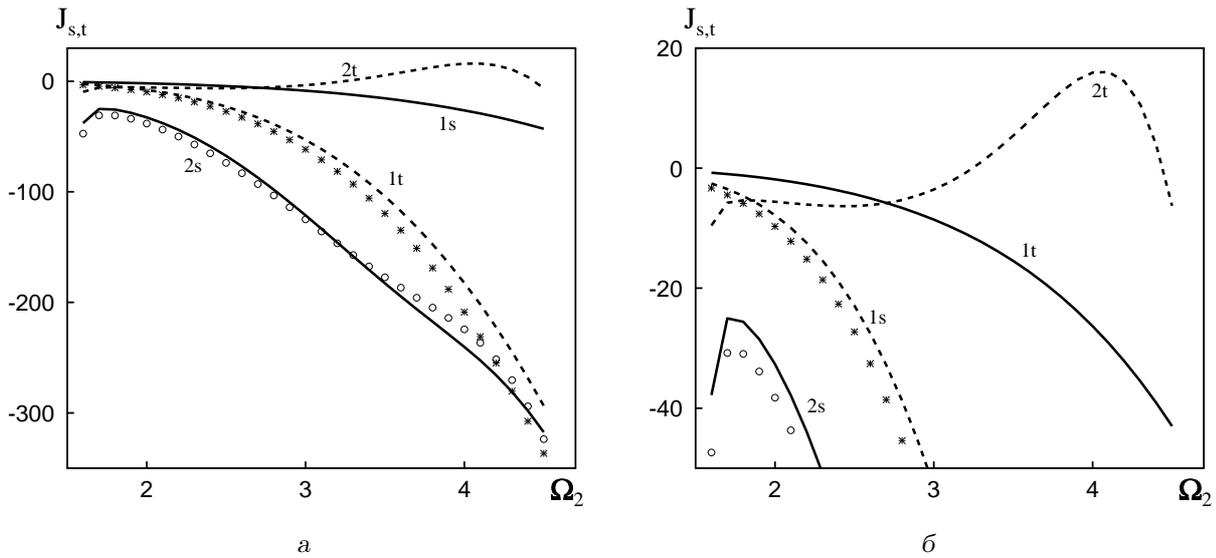


Рис. 6. Составляющие потока мощности для различных мод Лэмба  $J_s = \int_{-1}^1 \sigma_{zz} u_z dy$ ,  $J_t = \int_{-1}^1 \tau_{zy} u_y dy$  (номера кривых соответствуют номерам мод)

и первая нормальная волна набирает энергетический вес. Форма приложенной нагрузки вблизи частоты  $\Omega_2 = 4.0$  оказывается ближе к распределению напряжения в первой волне. Однако в общей ее энергии определяющими являются составляющие, связанные с касательными напряжениями (см. рис. 6). Поэтому первая мода не становится доминирующей.

Рассогласование формы приложенной нагрузки и распределений напряжений в распространяющихся модах вблизи частоты  $\Omega_2 = 4.0$  приводит к значительному возбуждению волн с комплексными постоянными распространения. Хотя эти моды не переносят энергию, однако их возбуждение значительно перестраивает волновое поле вблизи торца, что способствует увеличению энергии, поступающей в волновод (см. рис. 3).

При дальнейшем росте частоты распределение энергии между распространяющимися волнами еще больше усложняется. На частоте  $\Omega_2 = 4.72$  появляются “обратная” волна и третья распространяющаяся мода. Для  $\nu = 0.3$  диапазон существования “обратной” волны очень узок,  $4.71 \leq \Omega_2 \leq 4.712$ , и в приведенном на графике масштабе он не виден. В отличие от случая симметричных вынужденных колебаний [14], “обратная” волна возбуждается слабо. Выше частоты загираия третьей моды ее энергоемкость увеличивается, однако в диапазоне  $3\pi/2 \leq \Omega_2 \leq 5.4$  доминирующей остается вторая мода.

Более глубокое представление об особенностях

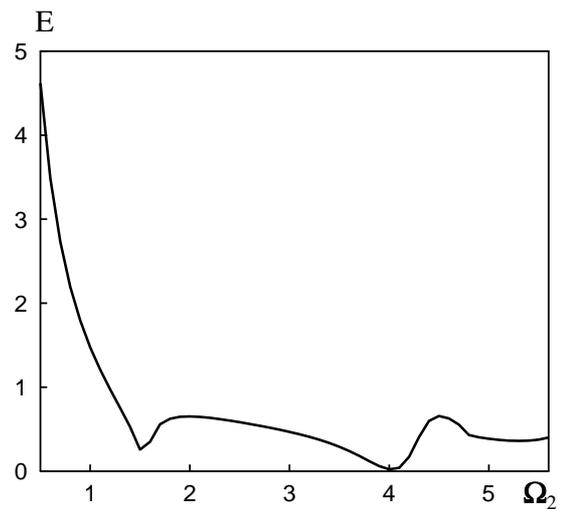


Рис. 7. Частотная зависимость энергии, подведенной за период к полубесконечному слою, для нагрузки  $\sigma_{zz}(y, 0) = 0$ ,  $\tau_{zy}(y, 0) = 2\mu \cos(\pi y/2)$

изгибного деформирования полуслоя можно получить при рассмотрении нагружения типа перерезывающей силы. В данном случае оно реализуется заданием распределения касательных напряжений на торце:

$$\sigma_{zz}(y, 0) = 0, \quad \tau_{zy}(y, 0) = 2\mu \cos \frac{\pi y}{2}.$$

На рис. 7 представлена частотная зависимость полной потребляемой полуслоем энергии

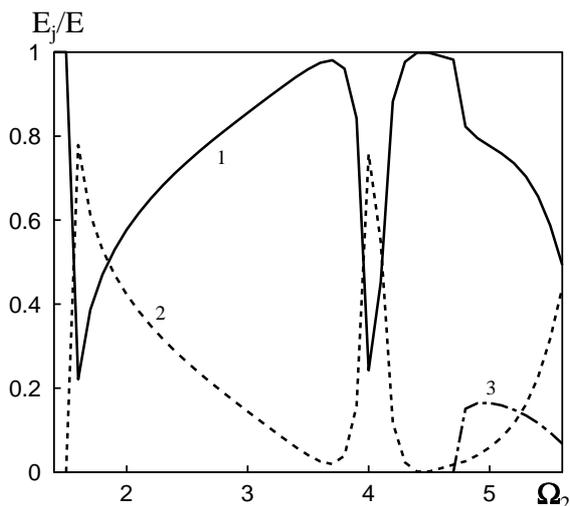


Рис. 8. Зависимость от частоты процентного распределения энергии по нормальным модам (номера кривых соответствуют номерам мод)

$E = W/(2\mu\omega)$ . При сравнении данных с рис. 3 и 7 в первую очередь обращает на себя внимание то, что энергетическая восприимчивость полуслоя в области низких частот при нагружении перерезывающей силой оказывается значительно выше, чем при нагружении изгибающим моментом. Еще одним принципиально важным фактом является то, что при изменении типа нагрузки относительный максимум энергопотребления, наблюдавшийся на частоте запирающей второй моды (см. рис. 3), исчезает. Таким образом, подтверждается предположение о том, что этот максимум обусловлен высокой степенью согласованности характера внешней нагрузки и распределения напряжений в нормальной волне. В то же время, второй относительный максимум на частоте  $\Omega_2 = 4.5$  сохранился. Следовательно, рост энергопотребления колебательной системы здесь обусловлен близостью частоты внешней нагрузки к некоторой характерной (собственной) частоте, которую целесообразно определить как собственную частоту краевой моды для случая антисимметричных колебаний полуслоя.

Различие в характере вынуждающей нагрузки сказывается и при рассмотрении энергетической эффективности бегущих волн. На рис. 8 приведены данные о процентном распределении подводимой энергии по различным распространяющимся модам. Отличительной особенностью этого графика является резкое увеличение энергии, переносимой второй модой вблизи своей частоты запирающей. При дальнейшем росте частоты энергоем-

кость этой моды падает и доминировать начинает первая мода. Вблизи частоты  $\Omega_2 = 4.0$  энергия второй моды вновь резко возрастает (в узком частотном диапазоне  $3.8 \leq \Omega_2 \leq 4.4$ ). Третья мода нигде не становится доминирующей и переносит не более 20 % энергии, поступающей в волновод.

Для рассматриваемого вида нагрузки ( $\tau_{zy}(y, 0) = 2\mu \cos(\pi y/2)$ ,  $\sigma_{zz}(y, 0) = 0$ ) не удается объяснить резкое возрастание переносимой второй модой энергии только за счет согласования ее формы и формы нагрузки. Как видно из рис. 5, б и г (кривые 3,  $\Omega_2 = 1.6$ ) при появлении второй распространяющейся волны распределение касательных напряжений и в первой, и во второй модах близко к форме приложенной нагрузки. Однако обусловленная касательной составляющей энергия, которую переносит вторая нормальная волна, в  $J_{2t}/J_{1t} = 3.75$  раз больше, чем энергия, переносимая касательной составляющей первой волны (см. рис. 6, б). Кроме того, основная часть энергии второй моды сосредоточена в ее нормальной составляющей  $J_{2s}$ . Хотя нормальные напряжения для обеих мод на частоте  $\Omega_2 = 1.6$  находятся в противофазе (что соответствует выполнению граничных условий (5)), однако  $J_{2s}/J_{1s} = 49.1$ , т.е. энергия, переносимая нормальной составляющей второй моды, значительно больше, чем первой. При дальнейшем росте частоты это отношение монотонно падает. В диапазоне  $2.0 \leq \Omega_2 \leq 3.8$  основная часть энергии переносится первой модой, в которой здесь преобладает касательная составляющая  $J_{1t}$ .

Проведенный анализ позволяет качественно объяснить перераспределение поступающей в полуслой энергии между распространяющимися модами, наблюдаемое в определенных частотных интервалах. Однако при рассмотрении количественных данных возникает ряд неясностей. В особенности это касается окрестности частоты  $\Omega_2 = 4.0$ . Некоторые дополнительные сведения о динамических свойствах полуслоя можно получить, исследуя “свободные” колебания, т.е. рассматривая процесс отражения от торца падающей из бесконечности нормальной волны.

### 3.2. Отражение распространяющихся мод от свободного торца

Рассмотрим отражение первой и второй распространяющихся нормальных волн от свободного торца полуслоя. Прежде всего отметим, что такой вид возбуждения волн качественно отличается от случая вынужденных колебаний. При отражении нормальной волны от свободного торца форма на-

грузки, которую нужно приложить на торце при формировании отраженного волнового поля (распределение напряжений в падающей волне), зависит от частоты. Кроме того, в напряжения в падающей волне входят как нормальные, так и касательные составляющие.

Рассмотрим вначале отражение первой антисимметричной распространяющейся волны от свободного торца. На рис. 9 представлено распределение потока мощности  $E = W/(2\mu\omega)$  в падающей волне между распространяющимися отраженными волнами. Потоки мощности нормированы на мощность падающей волны. Кривые 1–3 описывают частотные зависимости энергии, которую переносит распространяющаяся волна соответствующего номера. Кривая 4\* (см. рис. 9, б, то же для окрестности  $\Omega_2 = 4.71$ ) описывает частотную зависимость потока мощности в “обратной” волне. В качестве подтверждения достоверности рассматриваемых оценок отметим, что приведенные данные в соответствующих частотных интервалах хорошо согласуются с результатами работы [22] (в ней аналогичная граничная задача решена методом однородных решений) и некоторыми другими количественными оценками [1, 3].

Как видно из графика, наблюдается сильная частотная зависимость энергоемкости различных распространяющихся мод в отраженном поле. Вторая волна доминирует выше своей частоты запертия в полосе  $1.61 \leq \Omega_2 \leq 2.95$ . Первая же нормальная волна, кроме естественного диапазона  $0 \leq \Omega_2 \leq \pi/2$ , где она является единственной распространяющейся, превалирует при  $3.15 \leq \Omega_2 \leq 4.72$ . Верхняя граница этого диапазона определяется частотой, при которой начинают распространяться волны более высоких порядков. В отличие от случая продольных колебаний, “обратная волна” не становится доминирующей в области частот своего существования (см. рис. 9, а). При этом вплоть до частоты запертия четвертой моды  $\Omega_2 = 5.9$  доминирующая волна не выделяется, а энергии, переносимые первой и третьей волнами, отличаются не более, чем на 13 %.

Сравнивая данные о распределении энергии для вынужденных и “свободных” колебаний (см. рис. 4, 8, 9), следует отметить, что во всех случаях после появления второй распространяющейся волны эта мода становится наиболее энергетически выраженной. Вблизи своей критической частоты  $\Omega_2 = \pi/2$  она резко увеличивает энергодержание как при отражении волн от свободного торца (см. рис. 9), так и в случае вынужденных колебаний под действием перевязывающей силы. Заметим, что при возбуждении волнового поля

нормальными напряжениями на торце нарастание энергии во второй волне с ростом частоты происходит значительно медленнее (см. рис. 4).

При падении на торец первой нормальной волны одним из интересных эффектов является то, что в определенном частотном диапазоне в отраженном поле доминирует вторая волна. Это обстоятельство заставляет более тщательно рассмотреть вопрос о согласовании типа нагрузки с пространственным распределением смещений и скоростей в нормальной волне. По-видимому, причина перекачки энергии первой волны во вторую состоит в том, что в упругом волноводе невозможно одновременно выполнить граничные условия по нормальным и касательным напряжениям на торце за счет простого наложения отраженной волны того же типа с измененной фазой. Особое внимание привлекает существование в рассматриваемом диапазоне частот, для которых происходит полное превращение энергии падающей волны одного типа в энергию отраженной волны другого типа (например, при  $\Omega_2 = 1.85$ , (см. рис. 9, а)). Отметим, что, согласно результатам, приведенным в [12], при отражении первой симметричной волны от свободного торца также существует частота, на которой она полностью отсутствует в отраженном поле. Это – важная характерная черта процесса отражения волн в упругих волноводах, отличающая их от акустических. Вновь обратившись к рис. 6, замечаем, что подобная структура отраженного поля формируется в тех случаях, когда в падающей волне составляющие потока энергии, переносимой нормальными и касательными напряжениями, имеют один порядок.

Рис. 6 также указывает на существование частотных диапазонов, в которых энергия в нормальной волне переносится преимущественно только нормальными или только касательными напряжениями. В этом случае следует ожидать, что в отраженном поле энергетически доминировать будет волна того же типа, что и падающая. Так, в диапазоне частот  $3.0 \leq \Omega_2 \leq 3.8$ , для которого в первой нормальной волне энергия переносится касательными напряжениями (см. рис. 6), она доминирует и в отраженном поле (см. рис. 9, а).

Рассмотрение данных об отражении второй нормальной волны в значительной мере подтверждает сделанные выводы. Эта волна становится распространяющейся, начиная с частоты  $\Omega_2 = \pi/2$ . На рис. 10 представлена частотная зависимость соответствующего среднего за период потока мощности  $E_j = W/(2\mu\omega)$  для различных отраженных распространяющихся мод (использовалась нормировка на мощность падающей волны). Как и в

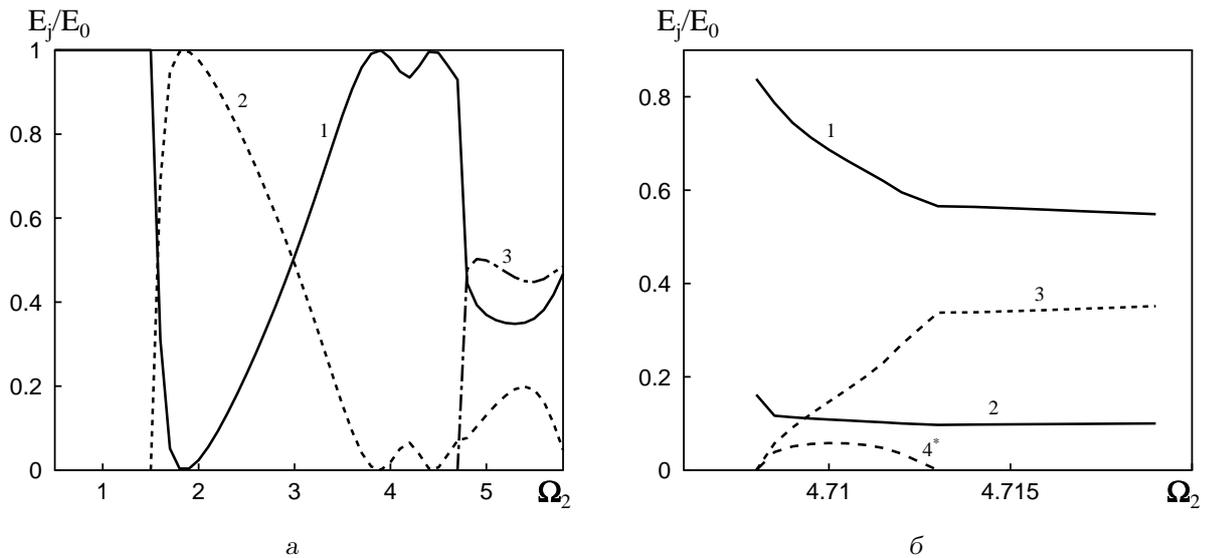


Рис. 9. Частотная зависимость процентного распределения энергии по нормальным модам при отражении первой нормальной волны от торца (номера кривых соответствуют номерам мод)

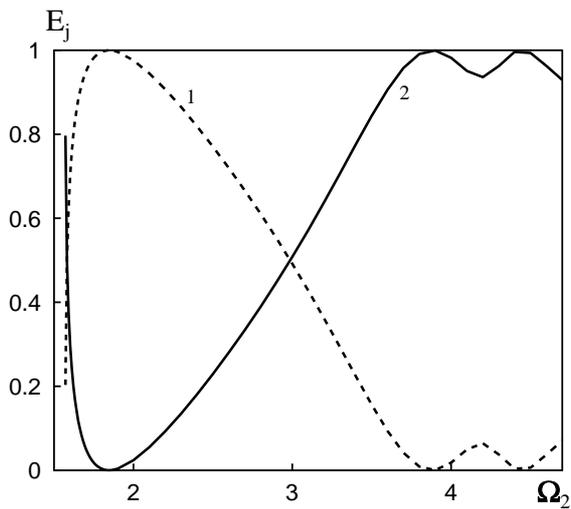


Рис. 10. Частотная зависимость процентного распределения энергии по нормальным модам при отражении второй нормальной волны от свободного торца (номера кривых соответствуют номерам мод)

падения на торец первой антисимметричной волны, при возбуждении полуполосы высшими модами наблюдается ярко выраженная зависимость энергоёмкости отраженной моды от частоты.

Отличительной особенностью отражения второй антисимметричной моды от свободного торца является то, что вблизи частоты загиравания второй моды, последняя быстро теряет свою интенсивность и в диапазоне частот  $1.59 \leq \Omega_2 \leq 2.9$  боль-

шая часть энергии, поступающей в полуслой, переносится первой модой (см. рис. 10). Аналогичная картина наблюдается и при отражении первой волны. Вблизи частоты загиравания второй волны в отраженном поле вторая волна становится доминирующей почти сразу после возникновения. К сожалению, в настоящее время трудно предложить качественное объяснение обоим эффектам.

Как и при отражении от свободного торца первой волны, в системе существуют частоты, на которых падающая волна вырождается полностью –  $\Omega_2 = 1.85$ . Отметим, что при отражении первой моды на этой же частоте в отраженном поле полностью исчезает первая мода. При отражении второй моды от свободного торца первая мода не возбуждается на частотах  $\Omega_2 = 3.9$  и  $4.4$ .

Отметим еще один интересный результат, следующий из сравнения рис. 9, а и 10. В диапазоне частот, когда в полуполосе существуют только две бегущие антисимметричные волны, оба графика практически повторяют друг друга с точностью до замены номера кривой (так, кривая 1 на рис. 9, а соответствует кривой 2 на рис. 10). Это замечательное подобие позволяет сформулировать некое правило взаимности. Будем характеризовать процесс отражения первой нормальной волны от свободного торца волновода зависящим от частоты коэффициентом трансформации энергии во вторую нормальную волну  $\lambda_{12}$  (т. е.  $W_2 = \lambda_{12}(\Omega_2)W_1$ ). По сути, для этого частотного диапазона кривая 2 на рис. 9, а представляет величину  $\lambda_{12}$ . Здесь она с графической точностью совпадает с кривой 1 на

рис. 10, которая дает коэффициент трансформации энергии из второй моды в первую  $\lambda_{21}$ . Тогда можно считать, что  $\lambda_{12} = \lambda_{21}$ . Это равенство тем более интересно, что оно не имеет аналога в случае симметричных волновых движений в полуполосе. Для более высокочастотной области, когда существуют три бегущие волны, установленное правило взаимности нарушается и проявляются иные специфические особенности процесса отражения второй нормальной волны от свободного торца.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены частотные зависимости энергии, которую переносят различные распространяющиеся моды при антисимметричных колебаниях полуслоя. Изучены вынужденные колебания системы под воздействием нормальной нагрузки вида  $\sigma_{zz} = 2\mu \sin(\pi y/2)$  и касательной нагрузки вида  $\tau_{zy} = 2\mu \cos(\pi y/2)$  на торце. Кроме того, исследован более сложный в физическом плане процесс возбуждения волнового поля – отражение первой и второй нормальных волн от свободного торца. В этом случае характер нагрузки изменяется с частотой. Установлено, что независимо от вида нагрузки наблюдается значительная зависимость энергии, переносимой различными распространяющимися модами, от частоты. При этом частотные интервалы, в которых данная мода наиболее энергетически выражена, определяются видом нагрузки.

В отличие от возбуждения симметричных волн равномерной нагрузкой на торце полуслоя [14], при вынужденных антисимметричных колебаниях простой связи между распределением напряжений в наиболее энергоемкой моде и характером внешней нагрузки не наблюдалось. Предложен иной критерий определения энергетического веса моды – согласованность между нормальной ( $J_{js}$ ) и касательной ( $J_{jt}$ ) компонентами энергии отраженной волны и нагрузкой. Показано, что использование критерия согласованности не дает полного качественного объяснения структуры отраженного волнового поля вблизи частоты загибания второй моды и собственной частоты системы.

При изучении отражения нормальных волн от свободного торца найдены частоты, на которых в отраженном поле полностью отсутствует волна типа падающей. Примечательно, что при отражении как первой, так и второй моды значение этой частоты одно и то же:  $\Omega_2 = 1.85$ . Сравнение энергетических характеристик процесса отражения для обоих случаев позволило установить правило взаимности для диапазона частот, в котором

существуют только две распространяющиеся моды.

Для полного понимания процессов обмена энергией между различными нормальными волнами следует провести более тщательный анализ кинематики частиц вблизи торца полуслоя.

1. Cho Y. H., Rose J. L. A boundary element solution for a mode conversion study on the edge reflection of Lamb waves // J. Acoust. Soc. Amer.– 1996.– **99**, N 4, Pt.1.– С. 2097–2109.
2. Koshiba M., Karakida S., Suzuki M. Finite-element analysis of Lamb waves scattering in an elastic plate waveguide // IEEE Trans. SU.– 1984.– **31**.– С. 18–25.
3. Gunawan A., Hirose S. Mode-exciting method for Lamb wave-scattering analysis // J. Acoust. Soc. Amer.– 2004.– **115**, N 3.– С. 996–1005.
4. Shaw E. A. G. On the resonant vibration of thin barium titanate disks // J. Acoust. Soc. Amer.– 1956.– **20**, N 1.– С. 38–50.
5. Gazis D. C., Mindlin R. D. Extensional vibration and waves in a circular disk and semi-infinite plate // J. Acoust. Soc. Amer.– 1960.– **27**, N 3.– С. 541–547.
6. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. О резонансе в полубесконечной упругой полосе // Прикл. мех.– 1980.– **16**, N 2.– С. 58–63.
7. Auld B. A., Tsao E. J. A variational analysis of edge resonance in semi-infinite plate // IEEE Trans. SU.– 1977.– **24**, N 5.– С. 317–326.
8. Городецкая Н. С. Еще раз о краевом резонансе // Акуст. вісн.– 2000.– **3**, N 4.– С. 35–44.
9. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С. Анализ физических особенностей явления краевого резонанса в упругих телах // Акуст. вісн.– 2004.– **7**, N 1.– С. 30–43.
10. Гринченко В. Т. Эффекты локализации волновых движений в упругих волноводах // Прикл. мех.– 2006.– **41**, N 9.– С. 38–45.
11. Torvic P. J. Reflection of wave trains in semiinfinite plates // J. Acoust. Soc. Amer.– 1967.– **41**, N 2.– С. 346–353.
12. Gregory R. D., Gladwell I. The reflection of a symmetric Rayleigh-Lamb wave at fixed or free edge of a plate // J. of Elasticity.– 1984.– **20**, N 9.– С. 12–16.
13. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С. Трансформация энергии падающей волны при отражении от заземленного торца полуполосы // Прикл. мех.– 1991.– **27**, N 5.– С. 77–82.
14. Torvic P. J., McClatchey J. J. Response of an elastic plate to a cyclic longitudinal force // J. Acoust. Soc. Amer.– 1968.– **44**, N 1.– С. 59–64.
15. Гомилко А. М., Городецкая Н. С., Мелешко В. В. Продольные волны Лэмба в полубесконечном упругом слое // Прикл. мех.– 1991.– **27**, N 6.– С. 53–59.
16. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С., Мелешко В. В. О принципе Сен-Венана для гармонических колебаний упругого полуслоя // Акуст. вісн.– 2006.– **9**, N 1.– С. 21–33.
17. Мелешко В. В., Татуян В. Б. Возбуждение гармонических волн Лэмба в полубесконечном упругом слое // Акуст. ж.– 1987.– **33**, N 5.– С. 919–926.

18. Morvan B., Wilkie-Chancellier N., Duflo H., Tinel A., Duclos J. Lamb wave reflection at the free edge of a plate // J. Acoust. Soc. Amer.– 2003.– **113**, N 3.– С. 1417–1425.
19. Dilligent O., Lowe M. J. D., Clezio E., Le Castings M., Hosten B. Prediction and measurement of nonpropagating Lamb modes at the free end of a plate when fundamental antisymmetric mode  $A_0$  is incident // J. Acoust. Soc. Amer.– 2003.– **113**, N 6.– С. 3032–3042.
20. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С. Краевой резонанс при изгибных колебаниях полуполосы // Докл. АН УССР, сер. А.– 1985.– N 4.– С. 20–23.
21. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
22. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С. Отражение волны Рэлея от свободного торца волновода // Прикл. мех.– 1984.– **20**, N 9.– С. 12–16.