

УДК 539.3

СПРАЛЬНІ ХВИЛІ В ЗАКРУЧЕНИХ ПРУЖНИХ ТРУБЧАСТИХ СТЕРЖНЯХ, ЩО ОБЕРТАЮТЬСЯ, З ВНУТРІШНІМИ ПОТОКАМИ РІДИНИ

О. І. БОРЩ, В. І. ГУЛЯЄВ

Національний транспортний університет, Київ

Отримано 16.04.2007

Розглянуто задачу про вільні гармонічні коливання попередньо напруженого поздовжньою силою і крутильним моментом трубчастого стержня з внутрішніми потоками рідини, що обертається. Встановлено, що коливання у таких системах можуть бути реалізовані тільки у вигляді біжучих лівовинтових та правовинтових кругових циліндричних спіральних хвиль. Для кожного значення хвильового параметра існує чотири хвилі, дві з яких мають вигляд лівої спіралі, а дві – правої. Дисперсійний аналіз цих хвиль показав, що вони поширюються з різними швидкостями у різних напрямках.

Рассмотрена задача о свободных гармонических колебаниях предварительно напряженного продольной силой и крутящим моментом вращающегося трубчатого стержня с внутренними потоками жидкости. Установлено, что колебания в таких системах могут быть реализованы только в виде бегущих левовинтовых и правовинтовых круговых цилиндрических спиральных волн. Для каждого значения волнового параметра существуют четыре волны, две из которых имеют вид левой спирали, а две – правой. Дисперсионный анализ этих волн показал, что они распространяются с разными скоростями в различных направлениях.

The paper deals with the problem of free harmonic vibration of a rotating tube rod prestressed by a longitudinal force and torque and containing the internal liquid flows. It is found that vibration in such systems can be performed only as propagating cylindrical spiral waves. Four waves exist for every value of the wave parameter. Two of them are the right-hand spiral waves and two others are the left-hand ones. The dispersion analysis of these waves shows that they have different velocities for different propagation directions.

ВСТУП

У теорії коливань пружних тіл, зазвичай, розглядаються так звані замкнені (геометрично обмежені) системи [1], вільні коливання яких можна представити суперпозицією стоячих хвиль, характер яких визначається граничними умовами. Однак, якщо розміри пружної системи достатньо великі, то в ряді випадків впливом граничних умов на коливальний процес можна знехтувати. Тоді систему вважають відкритою (необмеженою) і в ній можуть бути збуджені як стоячі, так і біжучі хвилі. Якщо прикладене зовнішнє навантаження є гармонічним, гармонічними будуть і згенеровані хвилі.

Один з прикладів систем, які можна наближено вважати відкритими, – колона глибинного буріння. На теперішній час глибини вертикальних свердловин, які проходяться роторним способом за допомогою трубчатих колон, досягають 10 км. У процесі функціонування вони підлягають впливу ряду статичних і динамічних факторів, що істотно впливають на їхню механічну поведінку [2–5]. Зокрема, колони попередньо напружені поздовжньою силою гравітації; на них діє крутильний момент, необхідний для руйнування долотом гірської породи в її нижній частині. Особливу спе-

цифіку у форму коливань вносить обертання колони, яке породжує відцентрові й гіроскопічні сили інерції [6, 7]. Окрім того, поперечні коливання бурильних колон істотно підсилюються наявністю внутрішніх потоків промивної рідини.

Відомо, що характер відхилення орієнтації збурення у хвилі від напрямку її поширення в суцільному середовищі визначається її поляризацією. Коливання збурення в середовищі, які відбуваються в одному напрямку, відповідають найпростішому випадку – лінійно поляризованій хвилі. У середовищах, які пропускають поперечні хвилі, можливі більш складні типи поляризації. Наприклад, якщо кінець вектора, яким зображені збурення, описує коло або еліпс у площині коливань, говорять про кругову або еліптичну поляризацію. Таку поляризацію можуть мати, наприклад, пружні хвилі зсуву або електромагнітні хвилі [8]. Якщо ж дві пружні гармонічні поперечні хвилі однакової довжини розміщені у взаємно перпендикулярних площинах і поширюються в пружному стержні, то за рахунок зсуву їхніх фаз на $\pi/2$ можна досягнути того, що біжуча хвиля матиме вигляд спіралі.

Ситуація істотно змінюється, якщо стержень, в якому поширюється гармонічна хвиля, попередньо напружений крутильним моментом. Розгляд хви-

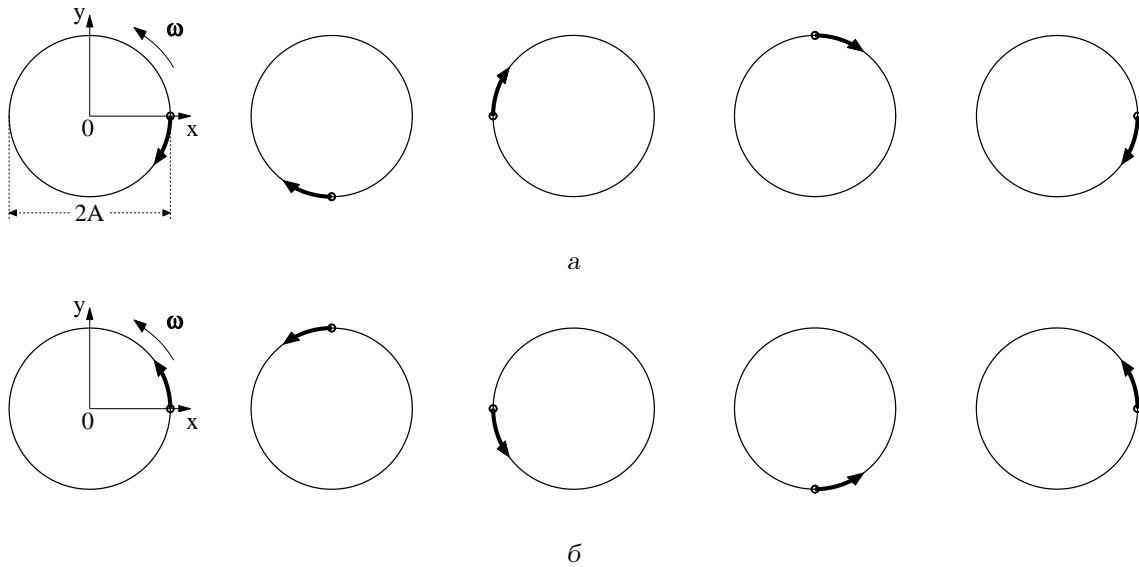


Рис. 1. Траєкторії руху елемента стержня у правій (а) і лівій (б) спіралях

левідних властивостей такої системи за допомогою дисперсійного аналізу і є предметом даної статті. Як буде показано нижче, у цьому випадку ніякі хвилі, окрім спіральних, неможливі. Для кожної довжини (параметра поширення) існує чотири такі хвилі, дві з яких мають вигляд лівої спіралі, а дві – правої.

1. АНАЛІЗ ОСНОВНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо задачу про коливання нескінченно-пружного трубчастого стержня, попередньо напруженого поздовжньою силою T і крутильним моментом M_z . Нехай стержень обертається навколо своєї осі зі сталою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Всередині труби зі швидкістю V рухається рідина з густиною ρ_l . Сформулюємо рівняння руху стержня. Для цього введемо інерційну систему координат $OXYZ$ та систему координат $Oxyz$ з ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, яка обертається разом зі стержнем. Осі OZ і Oz збігаються з поздовжньою віссю стержня і мають спільний початок. Спектри частот і форм власних коливань стержня, який обертається, залежать від вибору системи координат. З точки зору оцінки деформованого стану динамічну поведінку зручніше розглядати в системі координат $Oxyz$, яка обертається.

Приймемо, що при коливаннях пружні переміщення елементів стержня вздовж осей Ox і Oy становлять u і v , а зміщеннями вздовж осі Oz будемо нехтувати. Розглянемо лінійні коливальні й хвильові процеси, для яких характерний адитив-

ний відгук на адитивні впливи, тобто виконується принцип суперпозиції. При коливаннях стержня на нього діють зовнішні та внутрішні сили, а також сили інерції. Для виведення рівнянь його динаміки використано принцип Даламбера, відповідно до якого в будь-який момент часу сума всіх активних сил \vec{q}^a і сил інерції \vec{q}^i , прикладених до кожного елемента стержня, дорівнює нулю [2, 3].

У нашому випадку роль активних сил \vec{q}^a відіграють сили, викликані попереднім гравітаційним напруженням і крутильним моментом, а також сили пружності.

Для обчислення складових q_x^a і q_y^a поперечного розподіленого навантаження від сил інерції необхідно враховувати інерційні сили двох типів – викликані обертанням стержня і його пружних коливань (\vec{q}^t), а також ті, що діють на рухоми рідину в ньому (\vec{q}^l).

При визначенні величини \vec{q}^t враховано, що механічна поведінка трубчастого стержня розглядається в системі координат $Oxyz$, яка обертається. У зв'язку з цим рух кожного елемента стержня є складним і його абсолютне прискорення \vec{a}^t підраховується за формулою Коріоліса [9, 10]. При роботі трубчастих бурильних колон всередині них зі швидкістю \vec{V} переміщується промивна рідина. Її рух також є складним, а на її елементи, окрім сил інерції, спричинених коливаннями стержня, діють додаткові сили інерції руху всередині труби.

Після переходу від звичайних похідних до частинних у працях [2, 3] виведені рівняння коливань трубчастого стержня з внутрішнім потоком ріди-

ни, що обертається, попередньо напруженого по-
здовжньою силою T і крутильним моментом M_z :

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) -$$

$$-(\rho F + \rho_l F_l) \omega^2 u - 2(\rho F + \rho_l F_l) \omega \frac{\partial v}{\partial t} +$$

$$+ V^2 \rho_l F_l \frac{d^2 u}{dz^2} + 2V \rho_l F_l \frac{d^2 u}{dz dt} + \rho F \frac{d^2 u}{dt^2} = 0, \quad (1)$$

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) -$$

$$-(\rho F + \rho_l F_l) \omega^2 v + 2(\rho F + \rho_l F_l) \omega \frac{\partial u}{\partial t} +$$

$$+ V^2 \rho_l F_l \frac{d^2 v}{dz^2} + 2V \rho_l F_l \frac{d^2 v}{dz dt} + \rho F \frac{d^2 v}{dt^2} = 0.$$

Зазначимо, що незважаючи на лінійність рів-
нянь (1), вони мають досить складну структуру,
обумовлену доданками типу

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M_z \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M_z \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

$$-2\rho F \omega \frac{\partial v}{\partial t}, \quad 2\rho F \omega \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Так, завдяки присутності перших двох членів, сис-
тема не допускає розв'язків у формі плоскої кри-
вої, а пружна лінія вигнутого стержня може бу-
ти тільки тривимірною кривою (у даному випадку –
спіраллю). Наявність же членів з ω визначає
більш складний закон зміни форми коливання як
у просторі, так і за часом, виключаючи можли-
вість синфазного руху елементів стержня. Зазна-
чене ускладнення пов'язане з тим, що вказані до-
данки містять непарні похідні по z і t , а коефіцієн-
ти перед ними утворюють кососиметричні матри-
ці. Відповідні сили дестабілізують урівноважений
стан системи [11]. Зазначимо, що сили інерції Ко-
ріоліса

$$2V \rho_l F_l \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t}, \quad 2V \rho_l F_l \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t}$$

входять в рівняння (1) з однаковими знаками, а
роль коефіцієнтів тут відіграє швидкість V у пер-
шому степені. Їхній вплив на форми руху є менш
суттєвим, але він все ж унеможливує коливання
у вигляді стоячих хвиль навіть при $\omega = 0$, $M_z = 0$.

2. ФОРМИ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ СИСТЕ- МИ

Поставлена задача є суттєво багатопараметри-
чною, що ускладнює її аналіз. Тому для виділення

явища поширення вільних спіральних хвиль роз-
глянемо спрощений випадок $T = \text{const}$, $M_z = \text{const}$.
Виконавши підстановки

$$u(z, t) = A \cos kz \sin ct, \quad (2)$$

$$v(z, t) = B \sin kz \cos ct,$$

або

$$u(z, t) = A \cos kz \sin ct, \quad (3)$$

$$v(z, t) = B \cos kz \cos ct,$$

переконаємось, що вихідна система не допускає
розв'язків у формі стоячих хвиль чи біжучих
хвиль із вузловими точками. Тому розв'язок слід
будувати у вигляді циліндричних спіральних бі-
жучих хвиль:

$$u(z, t) = A \cos(kz - ct), \quad (4)$$

$$v(z, t) = B \sin(kz - ct).$$

Підставивши вирази (4) у зредуковану систе-
му (1) і виконавши скорочення на відповідні гар-
монічні співмножники, одержимо однорідну сис-
тему алгебраїчних рівнянь відносно амплітудних
коефіцієнтів A і B :

$$[EIk^4 + (T - V^2 \rho_l F_l)k^2 - (\rho F + \rho_l F_l)\omega^2 +$$

$$+ 2V \rho_l F_l kc - (\rho F + \rho_l F_l)c^2]A +$$

$$+ [M_z k^3 + 2(\rho F + \rho_l F_l)\omega c]B = 0, \quad (5)$$

$$[M_z k^3 + 2(\rho F + \rho_l F_l)\omega c]A +$$

$$+ [EIk^4 + (T - V^2 \rho_l F_l)k^2 - (\rho F + \rho_l F_l)\omega^2 +$$

$$+ 2V \rho_l F_l kc - (\rho F + \rho_l F_l)c^2]B = 0.$$

Прирівнявши до нуля визначник матриці коефі-
цієнтів системи (5), одержимо дисперсійне рівнян-
ня

$$[EIk^4 + (T - V^2 \rho_l F_l)k^2 - (\rho F + \rho_l F_l)\omega^2 +$$

$$+ 2V \rho_l F_l kc - (\rho F + \rho_l F_l)c^2]^2 -$$

$$- [M_z k^3 + 2(\rho F + \rho_l F_l)\omega c]^2 = 0. \quad (6)$$

яке пов'язує хвильове число k з круговою частотою c . Хвильове число входить у цей вираз у во-
сьмому степені, а кругова частота – в четвертому.
Помічаємо, однак, що ліва частина рівняння являє
собою різницю квадратів. Тому його можна замі-
нити еквівалентною системою двох рівнянь. Виконавши ці перетворення, знайдемо два корені для

кругових частот

$$c_{1,2} = \frac{V \rho_l F_l k}{\rho F + \rho_l F_l} - \omega \pm \frac{D_1}{\rho F + \rho_l F_l}, \quad (7)$$

що відповідають хвилі у формі правої спіралі ($A/B > 0$), і два корені для хвилі у формі лівої спіралі ($A/B < 0$) –

$$c_{3,4} = \frac{V \rho_l F_l k}{\rho F + \rho_l F_l} - \omega \pm \frac{D_2}{\rho F + \rho_l F_l}. \quad (8)$$

У рівностях (7), (8) введені позначення

$$D_1 = \sqrt{V^2 \rho_p^2 F_p^2 k^2 + (\rho F + \rho_p F_p) \times} \\ \times \sqrt{2V \rho_p F_p k \omega + k^2 (EI k^2 + M_z k + T - V^2 \rho_p F_p)},$$

$$D_2 = \sqrt{V^2 \rho_p^2 F_p^2 k^2 - (\rho F + \rho_p F_p) \times} \\ \times \sqrt{2V \rho_p F_p k \omega - k^2 (EI k^2 - M_z k + T - V^2 \rho_p F_p)}.$$

Для того, щоб підтвердити ці висновки, підставимо знайдені значення c_i у систему (5) і підрахуємо відношення A_i/B_i . Так, $A_1/B_1 = A_2/B_2 = 1$. Отже, при коливаннях з цією частотою всі елементи стержня рухаються по кругових траєкторіях за годинниковою стрілкою з фазами, лінійно зміщеними в напрямку проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця осі Oz (див. рис. 1, а). Як результат хвиля утворює циліндричну правогвинтову спіраль кругового профілю, що суміщається в додатному напрямку осі Oz .

Аналогічно, $A_3/B_3 = A_4/B_4 = -1$ і утворюється лівогвинтова спіральна хвиля (див. рис. 1, б). Ці хвилі переміщуються в додатному напрямку осі Oz для частот $c_3 > 0$ і у від'ємному напрямку для частоти c_4 , оскільки вона завжди від'ємна.

Наведені міркування дозволяють зробити важливі висновки. По-перше, в закручених стержнях, які обертаються, можуть поширюватися тільки спіральні хвилі. По-друге, при тому самому кроці спіралі і вибраних напрямках обертання й крутильного моменту поширюються гармонічні хвилі у формі лівої і правої спіралей з чотирма різними круговими частотами c_i . Для кожної з цих хвиль характер дисперсійних кривих $c_i = c_i(k)$ визначається співвідношеннями між згинною жорсткістю EI , величиною крутильного моменту M_z , а також значенням і знаком поздовжньої сили T .

Вигляд співвідношень (7), (8) для кругових частот c_i свідчить про те, що при малих k хвильові рухи трубчастого стержня істотно залежать від

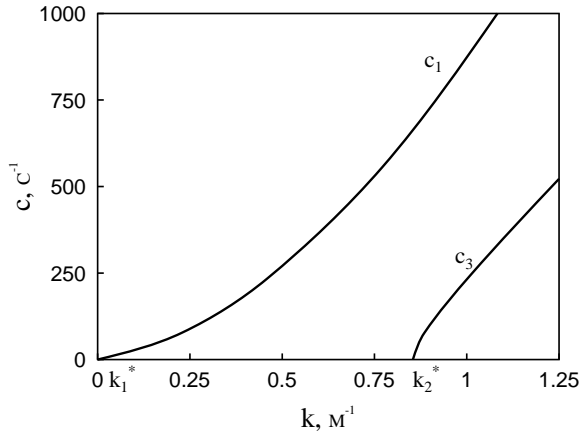


Рис. 2. Дисперсійні криві при $\omega = 0$, $\rho_l = 0$, $M_z = 4.2 \cdot 10^7$ Н·м, $T = 2 \cdot 10^6$ Н

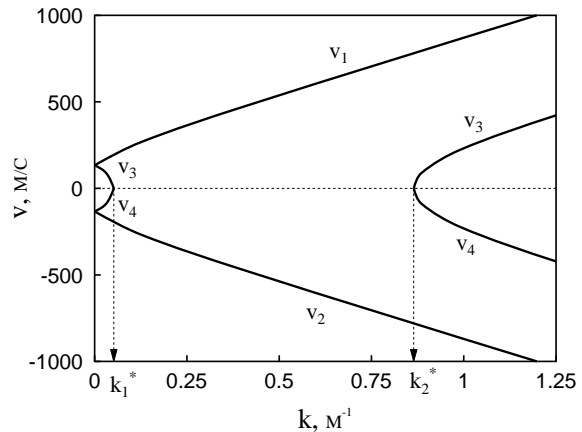


Рис. 3. Залежності фазових швидкостей спіральних хвиль від хвильового числа k при $\omega = 0$, $\rho_l = 0$, $M_z = 4.2 \cdot 10^7$ Н·м, $T = 2 \cdot 10^6$ Н

знака поздовжньої сили T (а при наявності потоку рідини – від його швидкості V). Так, якщо $T > 0$ додатна (стержень розтягнений, потоку немає), то частоти c_1 і c_2 є дійсними величинами і хвилі у вигляді правих спіралей завжди існують. Хвилі у вигляді лівих спіралей у цьому випадку існують при малих і великих значеннях k . Для параметрів k , які лежать між додатними коренями $k_{3,4}^* = (M_z \pm \sqrt{M_z^2 - 4EIT}) / (2EI)$, підкореневий вираз у рівності для D_2 стає від'ємним. Тоді частоти c_3 і c_4 стають комплексними і хвилі у вигляді лівих спіралей не можуть поширюватись.

Для прикладу розглянемо трубчастий сталевий стержень із зовнішнім діаметром $D = 35.5$ см, товщиною $h = 1.4$ см при $EI = 4.586 \cdot 10^7$ Па·м⁴, $\rho F = 117$ кг/м, $M_z = 4.2 \cdot 10^7$ Н·м, $T = 2 \cdot 10^6$ Н.

Враховуючи, що поставлена задача є багато па-

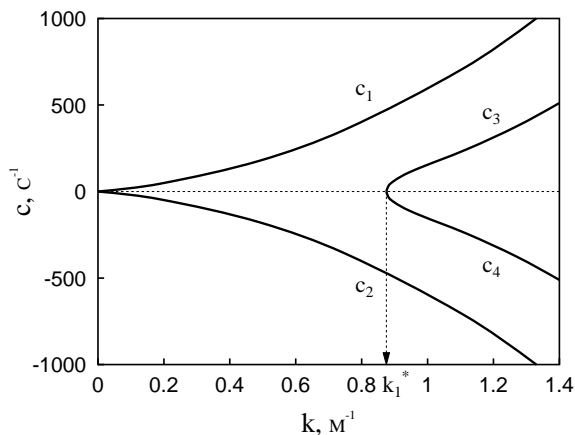


Рис. 4. Дисперсійні криві при $\omega=0$, $V=10$ м/с, $M_z=4.2 \cdot 10^7$ Н·м, $T=2 \cdot 10^6$ Н

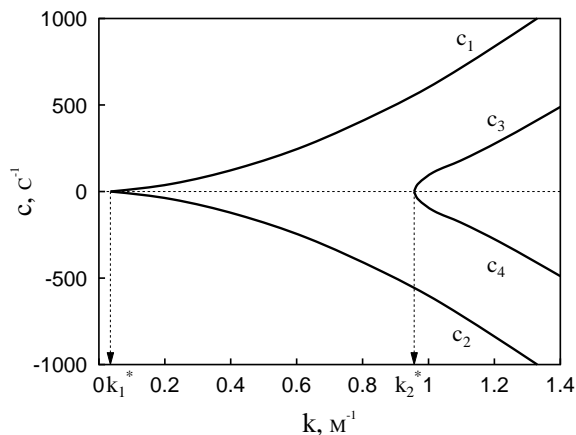


Рис. 6. Дисперсійні криві при $\omega=0$, $V=10$ м/с, $M_z=4.2 \cdot 10^7$ Н·м, $T=-2 \cdot 10^6$ Н

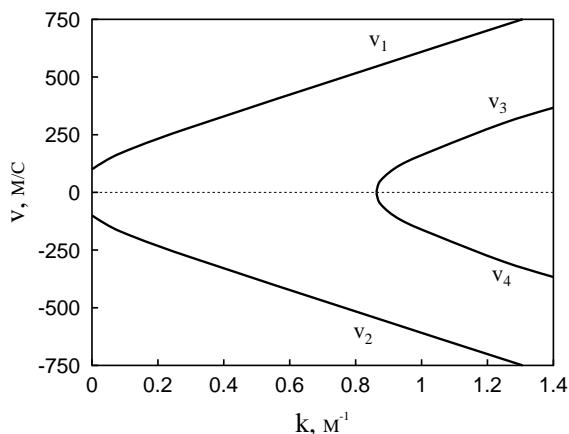


Рис. 5. Залежності фазових швидкостей спіральних хвиль від хвильового числа k при $\omega=0$, $V=10$ м/с, $M_z=4.2 \cdot 10^7$ Н·м, $T=2 \cdot 10^6$ Н

раметричною, проаналізуємо спеціальні випадки, порівнюючи до нуля деякі з характерних величин. Спочатку вважатимемо $\omega=0$, $\rho_l=0$. Тоді рівності (7), (8) набувають вигляду

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= \pm \frac{k}{\sqrt{\rho F}} \sqrt{EIk^2 + M_z k + T}, \\ c_{3,4} &= \pm \frac{k}{\sqrt{\rho F}} \sqrt{EIk^2 - M_z k + T}. \end{aligned} \quad (9)$$

На рис. 2 наведені відповідні залежності частот c_1 і c_3 від хвильового числа k . Частоти c_2 і c_4 не показані, тому що вони відрізняються від c_1 і c_3 лише знаком. З графіка видно, що функція $c_1(k)$ є гладкою неперервною кривою, у той час як функція $c_3(k)$ не має дійсних значень у діапазоні $k_1^* < k < k_2^*$ ($k_1^* = 0.05$ м⁻¹, $k_2^* = 0.865$ м⁻¹).

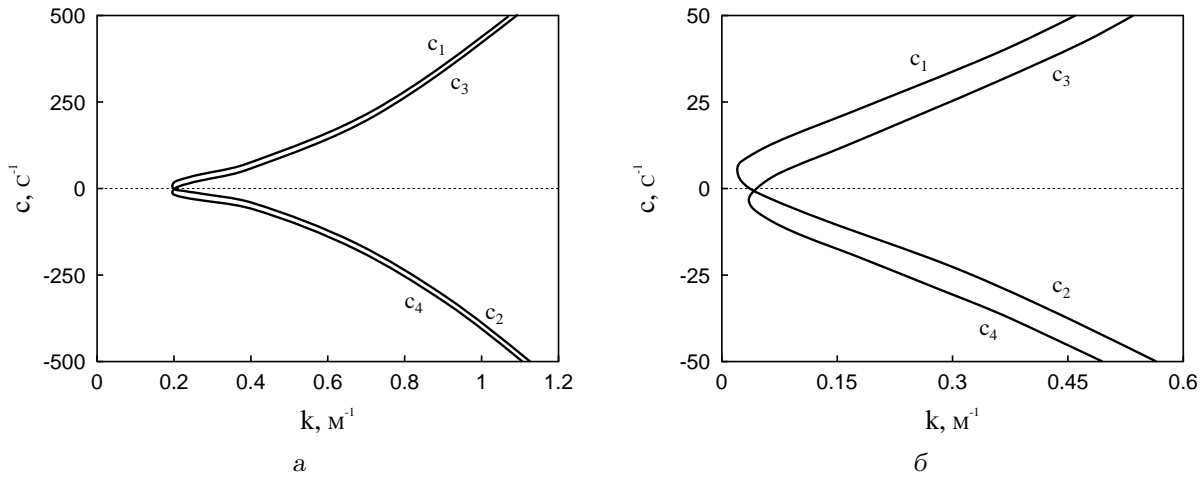
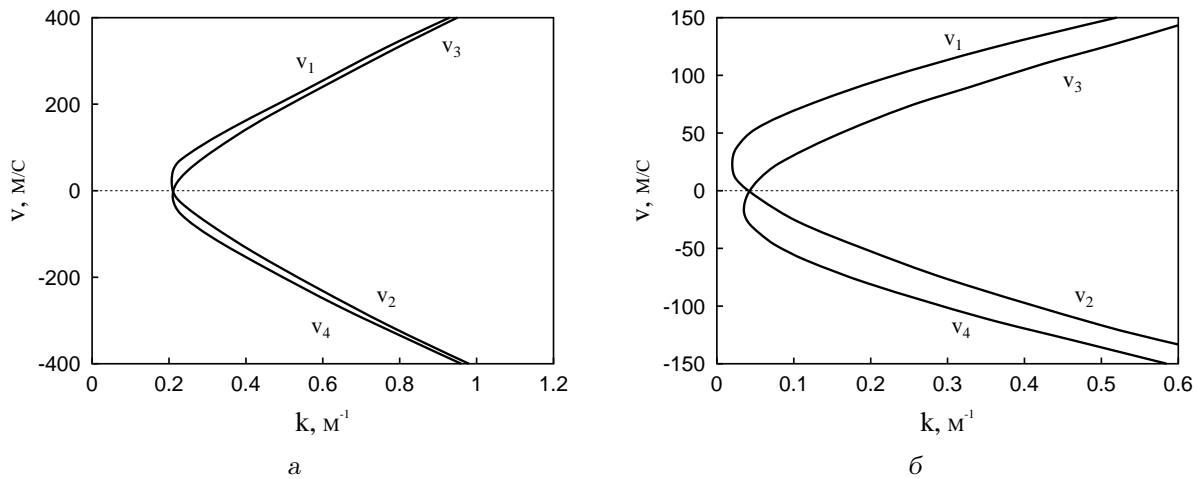
Фазові швидкості v_i поширення хвиль у системі координат $Oxyz$, що обертається, визначаються рівностями

$$\begin{aligned} v_{1,2} &= \frac{c_{1,2}}{k} = \pm \sqrt{\frac{EIk^2 + M_z k + T}{\rho F}}, \\ v_{3,4} &= \frac{c_{3,4}}{k} = \pm \sqrt{\frac{EIk^2 - M_z k + T}{\rho F}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Графіки $v_i(k)$ представлені на рис. 3. Зазначимо, що при $k=0$ всі швидкості однакові. Зі збільшенням k вони починають відрізнятися, причому в діапазоні $k_1^* < k < k_2^*$ v_3, v_4 стають комплексними. Тому хвилі у формі лівих спіралей у цьому діапазоні поширюватися не можуть. Усі криві симетричні відносно осі абсцис. Це означає, що і ліві, і праві спіралі не змінюють значень швидкостей при зміні напрямку руху.

Якщо всередині труби в додатному напрямку осі Oz рухається рідина зі швидкістю $V=10$ м/с, то дисперсійні криві $c_i(k)$ набувають форм, зображених на рис. 4: при $k < k_1^*$ частоти c_3 і c_4 не мають дійсних значень, тому в цій області хвилі з фазовими швидкостями v_3, v_4 не можуть поширюватися. Залежності швидкостей v_i від хвильового числа представлені на рис. 5.

Як показали обчислення, залежності $c_i(k)$ та $v_i(k)$ не зазнають суттєвих змін при знятті поздовжньої сили T і наданні трубі обертального руху зі швидкістю $\omega=4$ рад/с. Однак, якщо трубу стиснути поздовжньою силою $T=-2 \cdot 10^6$ Н, то циклічні частоти c_1, c_2 набувають комплексних значень при $k < k_1^* = 0.0401$ м⁻¹, а c_3, c_4 – при $k < k_2^* = 0.96156$ м⁻¹ (рис. 6). Звідси випливає, що при $k < k_1^*$ у стержні не можуть поширюватись ні

Рис. 7. Дисперсійні криві при $\omega = 4$ рад/с, $V = 10$ м/с, $M_z = 0$, $T = -2 \cdot 10^6$ НРис. 8. Залежності фазових швидкостей спіральних хвиль від хвильового числа k при $\omega = 4$ рад/с, $V = 10$ м/с, $M_z = 0$, $T = -2 \cdot 10^6$ Н

право-, ні лівовинтові спіральні хвилі.

Рис. 7 ілюструє випадок, коли крутильний момент відсутній ($M_z = 0$) і трубчастий стержень стиснутий ($T = -2 \cdot 10^6$ Н). Видно, що при таких значеннях характерних параметрів різниця між частотами c_1 , c_3 і c_2 , c_4 зменшилась, і криві $c_1(k)$, $c_3(k)$ та $c_2(k)$, $c_4(k)$ попарно не зливаються при $k \rightarrow \infty$ (рис. 7, а). На рис. 7, б ці ж залежності подані в більш крупному масштабі при невеликих значеннях k . Представлені на рис. 8 відповідні залежності $v_i(k)$ також мають однаковий характер, а при великих значеннях k криві для v_1 і v_3 (v_2 і v_4) попарно асимптотично наближаються одна до одної.

ВИСНОВКИ

1. Розглянуто задачу про вільні гармонічні коливання нескінченного попередньо напруженого поздовжньою силою і крутильним моментом трубчастого стержня з внутрішніми потоками рідини, що обертається.
2. Встановлено, що коливальні рухи такої системи можуть бути реалізовані тільки у формі біжучої спіральної хвилі.
3. Дисперсійний аналіз рівнянь руху стержня показав, що для кожного значення хвильового параметра існує чотири хвилі, дві з яких

мають вигляд лівої спіралі, а дві – правої. Ці хвилі поширюються з різними швидкостями в різних напрямках. Побудовані аналітичні вирази для визначення фазових швидкостей.

- Отримані розв'язки можуть бути використані для оцінювання динамічної поведінки колон глибокого буріння.

ПОДЯКИ

Робота виконана в рамках держбюджетної теми N 59 “Теоретичне дослідження міцності та коливань трубчастих колон глибокого буріння”, яка фінансується Міністерством освіти і науки України.

- Крауфорд Ф. Волны.– М.: Наука, 1976.– 528 с.
- Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Соловьев И. Л., Горбунович И. В. Квазистатические критические состояния колонн глубокого бурения // Пробл. прочн.– 2006.– N 5.– С. 109–119.
- Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Соловьев И. Л.,

Горбунович И. В. Квазистатические и динамические критические состояния колонн глубокого бурения // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности.– 2006.– N 10.– С. 25–32.

- Tucker W. R., Wang C. An integrated model for drill-string dynamics // J. Sound Vib.– 1999, **224**, N 1.– P. 123–165.
- Vaz M. A., Patel M. H. Analysis of drill strings in vertical and deviated holes using the Galerkin technique // Engng Struct.– 1995, **17**, N 6.– P. 437–442.
- Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов.– М.: Наука, 1967.– 237 с.
- Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций.– М.: Мир, 1971.– 192 с.
- Рабинович М. К., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн.– М.: Наука, 1984.– 432 с.
- Лурье А. И. Аналитическая механика.– М.: Физматгиз, 1961.– 824 с.
- Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Кошкин В. Л. Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней.– К.: Наук. думка, 1992.– 344 с.
- Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения.– М.: Наука, 1976.– 320 с.