ISSN 1028-7507 Акустичний вiсник. 2007. Том 10, N 2. С. 43 – 63

УДК 539.3

ВОЛНЫ В ПОРИСТО-УПРУГИХ НАСЫЩЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ СРЕДАХ

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 24.04.2007

Данный обзор состоит из двух частей. В первой части кратко изложена теория Био для описания пористо-упругих насыщенных жидкостью сред и проанализированы направления дальнейшего ее развития. Проведено сравнение модели Био и модели пористых сред, построенной на основе теории смесей. Во второй части описаны волновые задачи, решенные в рамках теории Био.

Даний огляд складається з двох частин. У першій частині коротко викладено теорію Біо для опису пористо-пружних насичених рідиною середовищ і проаналізовано напрямки подальшого її розвитку. Проведено коротке порівняння моделі Біо й моделі пористих середовищ, побудованої на основі теорії сумішей. Другу частину присвячено хвильовим задачам, розв'язаним у рамках теорії Біо.

This review consists of two parts. In the first part, the Biot's theory for the description of poroelastic fluid-saturated media is presented and further directions for its development are analyzed. The Biot's model is compared with a model of porous media based on the theory of mixtures. Wave problems solved within the framework of the Biot's theory are described in the second part.

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование многокомпонентных (многофазных) континуумов типа пористых насыщенных жидкостью сред началось более 90 лет тому назад с исследований процесса консолидации грунтов. Многокомпонентность необходимо учитывать при решении значительного числа прикладных задач, возникающих в различных областях человеческой деятельности. Однако сложности описания эффектов взаимодействия фаз, фазовых переходов, теплообмена и других сопутствующих процессов привели к тому, что до настоящего времени общепринятая модель для насыщенной пористой среды не разработана. Даже при существенных упрощениях, когда фазовые переходы отсутствуют, температурные эффекты не принимаются во внимание и пр., модель насыщенной жидкостью пористо-упругой среды существенно усложняется по сравнению с однородным упругим или вязкоупругим континуумом за счет способности жидкости втекать или вытекать в любую область, формируемую порами. Это принципиально отличает пористую среду от традиционной упругой, поскольку концепция элементарного объема в последней предполагает, что хотя частички упругой среды могут двигаться относительно некого положения равновесия, они всегда остаются в относительной близости друг к другу. Для частичек поровой жидкости ситуация иная – некоторые из них могут удаляться на значительные расстояния от начального положения равновесия. Это особенно важно учитывать при рассмотрении волновых процессов. Действительно, в таких задачах по мере роста частоты возрастает вклад динамического поведения жидкости, что значительно усложняет модель среды.

Исторически сформировались два подхода к описанию механики насыщенных пористо-упругих сред, которые интенсивно развиваются и в настоящее время. Один из них связан с именем Fillunger (1913) [72][1] и основан на аксиоме о несмешивающихся взаимопроникающих континуумах с внутренним взаимодействием. В то же время, как отмечено в работе [101], "более интуитивная теория была развита Terzaghi (1923)". С именем Terzaghi связывают термин "механика грунтов". Он описал консолидацию грунта, т. е. процесс осадки пористой, деформируемой среды, содержащей вязкую жидкость, под действием нагрузки [110]. В этой работе Terzaghi, основываясь на классической теории упругости, применил закон Дарси для описания фильтрации жидкости через упругую среду. Им же впервые введено понятие эффективных напряжений.

Несмотря на взаимную непримиримую критику работ по механике грунтов оба выдающихся ученых – и Fillunger и Terzaghi – считаются основоположниками первых теорий пористых сред. Они исследовали такие механические эффекты в насыщенных средах как капиллярность, трение по-

[1]В виде исключения, список библиографических источников к статье составлен в алфавитном порядке (прим. ред.).

© Н. С. Городецкая, 2007

ровой жидкости при движении относительно пористого скелета, повышение давления в поровой жидкости. Исторический обзор исследований, посвященный упомянутым двум подходам к описанию насыщенных пористых сред, можно найти в обзоре [54] или более поздней работе De Boer [55].

Обобщая работы Terzaghi на случай трехмерных задач, Био (Biot) развил теорию пористых сред, насыщенных вязкой жидкостью. Теория Био является расширением классической теории упругости на случай двухфазной среды с учетом ввода дополнительных параметров, учитывающих взаимодействие фаз. В своих исследованиях Био развил принцип соответствия, согласно которому "уравнения, описывающие механику пористых сред, будут формально такими же, как и для упругих или вязкоупругих систем, при условии, что упругие коэффициенты заменены соответствующими операторами" [2].

Первая работа Био, посвященная консолидации грунта, опубликована в 1941 г. [37]. В ней были получены соотношения между напряжениями и деформациями в двухфазной среде. В 1944 г. в связи с изучением сейсмоэлектрического эффекта Я. И. Френкель в работе [20] впервые рассмотрел теорию распространения акустических волн в пористой насыщенной жидкостью среде. В первых работах Био предполагалось, что среда статически однородна и изотропна [38, 39]. В дальнейшем эта теория была развита на случаи анизотропного упругого [4] и вязкоупругого [2] скелета. Собрание статей Био по пористо-упругим насыщенным жидкостью средам опубликовано в [109].

Базовые положения теории Био о распространении упругих волн в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде были опубликованы в 1955–1956 гг. [38, 39]. До настоящего времени они остаются основополагающими для линейной акустики пористых материалов. Теория Био предсказывает существование в пористой среде трех типов волн – быстрой продольной, медленной продольной (которая также называется волной Био или продольной волной II рода) и поперечной. Эти типы волн также были найдены в работе Френкеля [20]. Быстрая продольная и поперечная волны по своей природе близки к волнам в безграничной упругой среде и распространяются с небольшим затуханием. Анализу их акустических характеристик, в частности, коэффициенту затухания и скорости распространения, посвящено значительное число работ. Отметим только некоторые их них, например, [38].

Медленная продольная волна характерна именно для пористо-упругой среды. Она распространяется значительно медленнее, чем быстрая продольная волна, и быстро затухает. Роль этой волны в акустических задачах наиболее существенна в случае большой сжимаемости среды, заполняющей поровое пространство (в частности, если эта среда – воздух или другой газ). Медленную продольную волну сложно обнаружить в естественных пористых насыщенных жидкостью средах, так как она имеет значительно меньшую амплитуду, чем быстрая продольная. Кроме того, как отмечалось в [90], трудности обнаружения медленной продольной волны обусловлены не только большим затуханием, но в значительной мере сложностью ее возбуждения и выделения на фоне сигналов от быстрой продольной и поперечной волн.

Существование медленной продольной волны впервые было подтверждено экспериментально в пористой водонасыщенной среде искусственного происхождения на ультразвуковых частотах (500 кГц) для широкого диапазона изменений пористости ($8 \div 28$ %) [94]. Plona отметил, что с уменьшением пористости среды скорость медленной продольной волны снижается, в отличие от быстрой продольной и поперечной волн, скорость которых при этом увеличивается. Johnson, 1980 [76], измерял скорость медленной продольной волны в газонасыщенной среде. В более поздних работах Chandler и Johnson, 1981 [49], а также Johnson и Plona, 1982 [78] показано, что в водонасыщенной среде медленная продольная волна в области высоких частот существует всегда. Для естественных пористых сред с воздушным заполнением медленная продольная волна изучалась в работах Albert [23], а в работе Adler и Nagy [90] была измерена экспериментально. Для естественных пористых водонасыщенных сред медленная продольная волна экспериментально наблюдалась в исследовании Kelder и Smeulder [83]

Экспериментальное обнаружение медленной продольной волны в значительной степени стимулировало интерес к подходу Био и дальнейшее его развитие. При этом следует отметить, что теория Био не только качественно, но и количественно правильно предсказывает скорости, амплитуды и частотную зависимость затухания всех трех типов волн в различных насыщенных пористых средах [51, 68, 78, 79, 89, 93, 100]. Отметим также работы, в которых показано, что игнорирование медленной продольной волной приводит к значительным ошибкам при оценке затухания быстрой продольной и поперечной волн [51, 96, 102, 112].

1. ТЕОРИЯ БИО

Вопросам распространения волн в пористо-упругих насыщенных вязкой жидкостью средах посвящены работы Био, опубликованные в 1956 и 1962 гг. Судя по ссылкам, исследования, относящиеся к 1956 г., получили значительно более широкую известность. Вместе с тем, в более поздних публикациях приведена обобщающая теория распространения волн, позволяющая учитывать неоднородность пористости, анизотропию, диссипативные эффекты, обусловленные как движением вязкой жидкости относительно упругого скелета, так и потерями собственно в скелете или поровой жидкости. Применение понятия вязкоупругого оператора позволило включить в модель релаксацию, диссипацию, обусловленную физико-химическими, термоупругими механическими и другими процессами, протекающими в насыщенной пористо-упругой среде. Здесь же Био ввел независимую переменную ζ, определяющую приращение содержания жидкости в системе координат, связанной со скелетом – количество жидкости, которая втекает или вытекает из данного элемента, жестко связанного со скелетом. Исходя из этого, при рассмотрении в рамках теории Био статистически однородной изотропной пористо-упругой среды мы будем основываться преимущественно на его работах, опубликованных в 1962 г.

1.1. Уравнения состояния

Пористо-упругая среда состоит из упругого однородного скелета с сообщающимися между собой порами. Поровое пространство скелета полностью заполнено вязкой сжимаемой жидкостью. Поровая жидкость может перетекать по поровому пространству. Пористость определяется как отношение объема сообщающихся между собой пор к общему объему (эффективная пористость):

$$\phi = \frac{V_f}{V}\,.$$

При таком определении пористости закрытые изолированные поры, по которым жидкость не движется, рассматриваются как часть упругого скелета.

Обозначим через $\boldsymbol{u}$ – средний по элементарному объему упругого скелета вектор перемещения, а через $\boldsymbol{U}$ – вектор перемещения жидкости, также усредненный по объему. Отметим, что для описания процессов в однородной жидкости, как правило, используется вектор скорости. Однако, следуя работам Био, будем использовать вектор перемещений как для скелета, так и для жидкости.

Приращение содержания жидкости определяется следующим образом:

$$\zeta = -\mathrm{div}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{U}).$$

Оно имеет смысл количества жидкости, втекающей или вытекающей из данного элемента, жестко связанного со скелетом [2]. В изотропной однородной пористо-упругой насыщенной жидкостью среде, внутренняя энергия деформации (W) будет квадратичной функцией инвариантов тензора деформации упругого скелета I_1, I_2 и приращения содержания жидкости:

$$W = C_1 I_1^2 + C_2 I_2 + C_3 I_1 \zeta + C_4 \zeta^2.$$

Здесь

$$I_1 = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 = e, \qquad e = \mathrm{div}\boldsymbol{u},$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon_{ii}\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}{2}\,, \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big).$$

Постоянные $C_1, \ldots, C_4$ выражаются через постоянные H, μ, C, M, которые использовал Био [38, 39]. В этих обозначениях выражение для энергии можно переписать в виде

$$2W = HI_1^2 - 4\mu I_2 - 2Ce\zeta + M\zeta^2. \qquad (1)$$

Дифференцируя выражения для энергии по деформации, можно получить соотношения между напряжениями и деформациями:

$$\begin{gathered} \sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}\big((H-2\mu)e - C\zeta\big), \\ p_f = -Ce + M\zeta. \end{gathered} \qquad (2)$$

Здесь $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^s+\sigma_f$ – суммарный тензор напряжений, приложенный к пористо-упругой среде в целом; $\sigma_{ij}^s=(1-\phi)\tilde{\sigma}_{ij}^s$ – напряжения в скелете; $\tilde{\sigma}_{ij}^s$ – напряжения в матрице скелета; σ_f – напряжение в жидкости.

Соотношения (2) были получены Био и в других работах в 1941, 1956 гг. При этом автор от статьи к статье изменял как обозначения коэффициентов, так и сами коэффициенты. В частности, в [37] был введен коэффициент эффективных напряжений α, $C=\alpha M$.

Определению физического смысла и методов измерений коэффициентов, входящих в уравнения состояния (2), уделялось много внимания. Этим вопросам посвящена обширная литература [18, 40, 73, 74].

Четыре макрокоэффициента H, μ, C и M определяются через микропараметры среды соотношениями [18, 73]

$$H = \frac{(K_s - K_b)^2}{D - K_b} + K_b + \frac{4\mu}{3}\,,$$
$$C = \frac{K_s(K_s - K_b)}{D - K_b}\,, \qquad M = \frac{K_s^2}{D - K_b}\,, \tag{3}$$
$$D = K_s\left[1 + m\left(\frac{K_s}{K_f} - 1\right)\right].$$

Принята следующая терминология: "дренажное" деформирование соответствует изменению состояния пористой среды при постоянном поровом давлении. Эти условия также называют сжатием в "оболочке" [18], сжимаемостью в "обойме" [2], когда насыщенный жидкостью пористый образец помещается в непроницаемую эластичную оболочку (при этом жидкость может свободно вытекать из оболочки через трубку). Всестороннее сжатие такого типа используется в некоторых стандартных методах определения механических свойств грунтов [18]. "Недренажное" деформирование происходит при постоянстве содержания жидкости (m_f – масса жидкости). В этом случае насыщенный жидкостью пористый образец также находится в эластичной оболочке, однако жидкость не может вытекать из нее. Отметим, что реакция среды при недренажном деформировании будет более жесткой, чем при дренажном. Тогда в приведенных выше соотношениях K_b – модуль объемного сжатия пористой среды при дренажных условиях; K_s – модуль объемного сжатия упругого скелета; K_f – модуль объемного сжатия жидкости; μ – модуль сдвига пористой среды. В работе [85] показано, что формулы (3) справедливы до тех пор, пока пористо-упругую среду можно рассматривать как однородную на макро- и на микроуровнях.

В теории Био сделано предположение, что жидкость не влияет на сдвиговые свойства пористого скелета, т. е. ее вязкость учитывается только в силе межфазного взаимодействия. Такое же допущение сделано в работе Френкеля [20]. Модуль сдвига является характеристикой, относящейся только к скелету, и одинаков для насыщенной и ненасыщенной пористых сред.

Общее напряжение, приложенное к насыщенно пористо-упругой среде, представим в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \sigma^f \delta_{ij}, \tag{4}$$

где $\sigma^f = -\phi p_f$; p_f – давление поровой жидкости; σ_{ij}^s – напряжения, приложенные к упругому скелету.

С точки зрения инженерных расчетов важное значение имеют эффективные напряжения насыщенной пористо-упругой среды, поскольку, как известно из эксперимента, свойства пористых сред при разрушении зависят именно от их величин. В работах Био эффективные напряжения определяются следующим образом [2, (3.11), с. 109]:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_{ij} p_f. \tag{5}$$

Эффективные напряжения представляют собой часть полных напряжений, за вычетом давления жидкости в данной точке. Эффективные напряжения в форме (5) – суть эффективные напряжения Terzaghi, соответствующие несжимаемой матрице скелета. Используя последнее соотношение, уравнения состояния (2) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\sigma'_{ij} - (1-\alpha)p = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}\left(K_b - \frac{2}{3}\mu\right)e,\\ p_f = -Ce + M\zeta.\end{gathered} \tag{6}$$

Коэффициент эффективных напряжений α определяется следующим образом:

$$\alpha = 1 - \frac{K_b}{K'_s}$$

где K'_s – модуль объемного сжатия для случая сжатия без оболочки. Это соответствует случаю, когда насыщенный жидкостью пористо-упругий образец полностью помещен в жидкость, подвергающуюся воздействию внешнего давления. Модуль K'_s в точности равен K_s, если пористо-упругий скелет однороден [34, 45]. Как показывают эксперименты, для изотропного упругого скелета коэффициент α изменяется в диапазоне от 0.4 до 1 [69, 86]. В то же время, согласно [32], теоретические пределы изменения α таковы:

$$\phi \le \alpha \le 1.$$

В этой же работе показано, что для любых насыщенных пористо-упругих сред α не зависит от K_f.

Для случая сжимаемой матрицы скелета эффективные напряжения имеют вид (см. [57, (21), с. 328] или [53, (4.26), с. 76)])

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \alpha p_f \delta_{ij}. \tag{7}$$

Эффективные напряжения в формах (5) и (7) совпадают для несжимаемой матрицы скелета ($K_b/K_s = 0$). Эффективные напряжения в форме (5) можно трактовать как напряжения, обусловленные деформацией пористо-упругой среды при нулевом поровом давлении $p_f=0$, а эффективные напряжения в форме (7) – как напряжения, обусловленные деформацией пористо-упругой среды в целом при произвольном поровом давлении. В [43] показаны различия между эффективными напряжениями в формах (5) и (7), проявляющиеся в эксперименте для скелета (горная порода) при $\alpha=0.65$.

Отметим, что для случая несжимаемой жидкости и несжимаемого скелета $\alpha=1$, $M=\infty$.

Таким образом, в оригинальных работах Био и в последующих публикациях, которые основывались на теории Био, получены уравнения состояния для пористо-упругой полностью насыщенной вязкой сжимаемой жидкостью среды и разработаны методики проведения экспериментов для определения значений коэффициентов, входящих в эти уравнения.

1.2. Уравнения движения

Для получения уравнений движения пористо-упругой насыщенной жидкостью среды Био использовал различные подходы (например, в работе [38] – закон сохранения импульса для пористой среды в целом и закон Дарси для описания движения жидкости относительно упругого скелета). Здесь мы повторим вывод уравнений движения на основе метода Лагранжа [2].

Кинетическая энергия единицы объема пористо-упругого материала определяется следующим образом:

$$W_k = \frac{1}{2}(1-\phi)\rho_s\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\rho_f\left(\frac{d\boldsymbol{U}}{dt}\right)^2 d\Omega. \quad (8)$$

Здесь Ω – объем жидкости в порах в единице объема пористо-упругой среды; ρ_s – плотность упругого скелета; ρ_f – плотность жидкости; $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{U}$ – средние смещения в упругом скелете и жидкости соответственно. Среднюю скорость в жидкости рассмотрим как сумму скоростей – скорости упругого скелета и некой локальной скорости жидкости $\boldsymbol{V}$. Поле локальных скоростей жидкости является линейной функцией скорости потока жидкости относительно упругого скелета и для случая постоянной пористости имеет вид

$$V_i = a_{ij}\phi\left(\frac{dU_j}{dt} - \frac{du_j}{dt}\right) = a_{ij}\frac{dw_j}{dt}, \quad (9)$$

где $\boldsymbol{w}=\phi(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{u})$ – поток жидкости относительно упругого скелета. Такая запись вполне правомерна при условии, что поле микроскоростей в поровой жидкости описывается движением Пуазейля. Тогда второе слагаемое в выражении (8) при выполнении гипотезы малых возмущений может быть представлено в форме

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\rho_f\left(\frac{du_i}{dt}+V_i\right)^2\right)d\Omega = \frac{1}{2}\phi\rho_f\left(\frac{du_i}{dt}\right)^2 + \\ +\rho_f\frac{du_i}{dt}\frac{dw_i}{dt} + \frac{1}{2}\rho_f\int\limits_{\Omega}V_iV_i d\Omega.\end{gathered} \quad (10)$$

С учетом соотношения (9) третье слагаемое в (10) представим как

$$\rho_f\int\limits_{\Omega}V_iV_i d\Omega = \sum_{i,j} m_{ij}\frac{dw_i}{dt}\frac{dw_j}{dt},$$
$$m_{ij} = \rho_f\int\limits_{\Omega}\sum_k a_{ki}a_{kj}.$$

Для изотропного упругого скелета можно записать

$$m_{ij} = m\delta_{ij}, \qquad m = \rho_f\alpha_f,$$

где α_f – извилистость.

Мы подробно повторили выкладки, сделанные в [2] для кинетической энергии, чтобы напомнить, как в работах Био было введено понятие извилистости. Извилистость характеризует эффективное (действительное) расстояние, которое проходит жидкость по поровому пространству. Она позволяет учесть тот факт, что в направлении градиента макроскопического давления не может двигаться вся поровая жидкость, так как поры ориентированы в различных направлениях. Кроме того, модуль величины $\boldsymbol{V}-\dot{\boldsymbol{u}}$ также изменяется по сечению поры[2]. Исходя из условия прилипания на стенках упругого скелета, справедливо считать, что его величина максимальна вдали от границы раздела жидкость – упругий скелет. Извилистость может быть определена так [53]:

$$\alpha_f = \frac{\langle f_\Omega(\boldsymbol{z})\rho_f(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{V}-\dot{\boldsymbol{u}})^2\rangle}{\phi\rho_f(\dot{\boldsymbol{U}}-\dot{\boldsymbol{u}})^2} \geq 1.$$

Здесь $f_\Omega(\boldsymbol{z})$ – характеристическая функция объема Ω:

$$f_\Omega(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{z}\in\Omega, \\ 0 & \boldsymbol{z}\notin\Omega. \end{cases}$$

Для однородной структуры, все поры в которой ориентированны в направлении градиента давления, получаем $\alpha_f=1$. В [111] показано, что извилистость может изменяться в пределах $1\leq\alpha_f<\infty$. Она зависит от геометрии пор и, в общем случае,

[2]Здесь и далее точками обозначены частные производные по времени.

от частоты [77,101]. В [77, (3.4а), с. 386] показано, что частотная зависимость извилистости определяется следующим образом:

$$\alpha_f(\omega) = \alpha_\infty + \frac{i\eta_f\phi}{\omega\rho_f k_0}\sqrt{1-\psi(\omega)}, \quad \alpha_\infty = G\phi. \quad (11)$$

Здесь α_∞ – извилистость в низкочастотном пределе; G – структурный коэффициент; η_f – динамическая вязкость жидкости; k_0 проницаемость в низкочастотном пределе. Частотная зависимость, представленная в [77], была обобщена в [25] с учетом температурных эффектов, которые имеют принципиальное значение при насыщении пористой среды газом.

В области низких частот извилистость, измеренная экспериментально на ансамбле стеклянных сфер, составила $\alpha_f = 1.66$ [42]. Для реальных пористо-упругих сред извилистость должна определяться экспериментально. Для многих песчаников (sandstone) эта величина лежит в диапазоне $1.5 \leq \alpha_f \leq 5$, а для большинства песков $\alpha_f = 2$ [103]. Отметим, что экспериментально найденные в [79] значения фазовых скоростей и затуханий для всех трех объемных волн с высокой точностью совпадают со скоростями и затуханиями, вычисленными по теории Био с учетом частотной зависимости извилистости (11) и проницаемости.

Через извилистость определяется присоединенная масса, характеризующая динамическое взаимодействие между упругим скелетом и жидкостью [2, 18, 101]:

$$\rho_{12} = \rho_f\phi(1-\alpha_f). \quad (12)$$

Тогда кинетическая энергия пористо-упругой насыщенной среды в зависимости от смещений в упругом скелете и в жидкости примет вид

$$W_k = \frac{1}{2}\rho_{11}\dot{u}_i\dot{u}_i + \rho_{12}\dot{u}_i\dot{U}_i + \frac{1}{2}\rho_{22}\dot{U}_i\dot{U}_i. \quad (13)$$

Здесь $\rho_{11} = (1-\phi)\rho_s - \rho_{12}$; $\rho_{22} = \phi\rho_f - \rho_{12}$; ρ_s – плотность матрицы упругого скелета; ρ_f – плотность жидкости. Величины ρ_{11} и ρ_{22} можно рассматривать как некие "эффективные массы" упругой и жидкой фаз. Исходя из диапазона возможных значений α_f, замечаем, что $\rho_{12} \leq 0$. Следовательно, величины "эффективных масс" фаз больше истинных масс.

В рамках теории Био вязкость жидкости учитывается на микроуровне через силы взаимодействия между упругим скелетом и жидкостью. Связь между вязкими силами и скоростью течения жидкости через пористую среду в области низких частот задается законом Дарси:

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} = \frac{K_{pr}}{\eta_f}\,\mathrm{grad} p_f. \quad (14)$$

Здесь K_{pr} – проницаемость пористой среды, характеризующая способность упругого скелета пропускать сквозь себя жидкость.

Проверке и обоснованию применимости закона Дарси посвящено значительное количество работ, на обсуждении которых мы не будем останавливаться. Однако отметим, что этот закон имеет верхний и нижний пределы применимости. Верхний предел обусловлен необходимостью учета инерционных сил при высоких скоростях течения жидкости через пористую среду. Его обычно связывают с критическим значением числа Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = |\boldsymbol{w}|l/\nu_f.$$

Здесь l – характерный размер пористой среды (максимальный диаметр пор); ν_f – кинематическая вязкость жидкости $\rho_f\nu_f = \eta_f$. Приведем некоторые характерные значения числа Рейнольдса для различных пористых сред (табл. 1), при которых справедлив закон Дарси [1]. Нижний предел применимости определяется проявлением неньютоновских реологических свойств жидкости. В рамках теории Био вводится поправка, учитывающая отклонение от закона Дарси в области высоких частот, когда инерционными силами по сравнению с вязкими уже нельзя пренебрегать. На ее описании остановимся позже.

Рассмотрим коэффициент проницаемости. Он не зависит от свойств жидкости и является динамической характеристикой пористой среды. Для простейшей конфигурации скелета – ансамбля одинаковых сфер – $K_{pr} = l^2\delta(\phi)$. Выражение для $\delta(\phi)$ можно найти в литературе [53]. Типичные значения коэффициента проницаемости для различных пористых сред приведены в табл. 2.

В [77] показано, что K_{pr} зависит от частоты следующим образом:

$$K_{pr} = \frac{k_0}{\sqrt{1-L\omega} - \dfrac{i\alpha_\infty k_0\rho_f\omega}{\eta_f\phi}}, \qquad L = \frac{4i\alpha_\infty^2 k_0^2\rho_f}{\eta\phi^2\Lambda^2}. \quad (15)$$

Здесь параметр Λ имеет размерность длины и принимает значения от нескольких микрометров до нескольких десятков микрометров [77]. Частотная зависимость проницаемости исследовалась также в [26].

Табл 1. Характерные значения числа Рейнольдса для пористых сред, при которых справедлив закон Дарси

Среда	Re
Однородная дробь	$13 \div 14$
Однородный крупнозернистый песок	$3 \div 10$
Неоднородный мелконозернистый песок с преобладанием фракций диаметром менее 0.1 мм	$0.34 \div 0.23$
Горная порода	$13 \div 14$

Отметим, что в работах Био проницаемость трактовалась как характеристика всей "однородной" пористо-упругой среды. В то же время, в таких средах как горная порода "локальная" проницаемость значительно меняется от точки к точке. Как показано в работах [33, 36], именно это оказывается главной причиной того, что экспериментально найденные амплитуды объемных волн и их затухание в горных породах значительно отличаются от вычисленных по теории Био.

Определив коэффициенты, входящие в уравнения Дарси, можно записать диссипативную функцию, обусловленную течением вязкой жидкости как квадратичную форму объемного расхода. Для изотропной среды она имеет вид

$$2D = \frac{\eta_f}{K_{pr}} w_i w_i. \qquad (16)$$

Рассматривая силы, приложенные к единице объема пористо-упругой среды и считая перемещения в упругом скелете ($\boldsymbol{u}$) и в жидкости ($\boldsymbol{U}$) обобщенными координатами, можно записать уравнения Лагранжа [38]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W_k}{\partial u_i} + \frac{\partial D}{\partial u_i}\right),$$

$$\frac{\partial \sigma_f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W_k}{\partial U_i} + \frac{\partial D}{\partial U_i}\right).$$

Используя уравнения состояния (2), получим известную систему уравнений движения Био в перемещениях:

$$\begin{gathered}\mu\Delta\boldsymbol{u}+\\ +(A+\mu)\text{grad div }\boldsymbol{u} + Q\text{ grad div }\mathbf{w} =\\ = \rho_{11}\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial^2 t} + \rho_{12}\frac{\partial^2\boldsymbol{U}}{\partial^2 t} + b_0\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} - \frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t}\right),\\ Q\text{ grad div }\boldsymbol{u} + R\text{ grad div }\boldsymbol{U} =\\ = \rho_{22}\frac{\partial^2\boldsymbol{U}}{\partial^2 t} + \rho_{12}\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial^2 t} - b_0\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} - \frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t}\right),\end{gathered} \qquad (17)$$

Табл 2. Типичные значения коэффициента проницаемости для пористых сред [53]

Среда	K_{pr}, м^2
Песок	$10^{-9} \div 10^{-12}$
Бетон	$10^{-16} \div 10^{-21}$
Глина	$10^{-16} \div 10^{-20}$
Кости	10^{-20}
Гравий	$10^{-7} \div 10^{-9}$

где

$$b_0 = \phi^2\eta_f/K_{pr}, \qquad A = H - 2\mu - 2\phi C + \phi^2 M,$$

$$Q = \phi C - \phi^2 M, \qquad R = \phi^2 M.$$

В рамках теории Био учитываются две силы взаимодействия между фазами – вязкая сила, обусловленная течением жидкости относительно упругого скелета,

$$f_1 = b_0(\dot{\boldsymbol{U}} - \dot{\boldsymbol{u}}),$$

и инерционная сила межфазного взаимодействия, обусловленная разными ускорениями фаз,

$$f_2 = \rho_{12}(\ddot{\boldsymbol{U}} - \ddot{\boldsymbol{u}}).$$

Заметим, что Био развил свою теорию, используя макрохарактеристики среды. При этом для описания пористо-упругой полностью насыщенной жидкостью среды он использовал два независимых параметра – вектор перемещения упругого скелета $\boldsymbol{u}$ и вектор перемещения жидкости $\boldsymbol{U}$ [38]. В [2] в качестве второго независимого параметра использовалась величина $\boldsymbol{\zeta}$ – объемное содержание жидкости.

При нахождении уравнений движения для пористо-упругой среды предполагалось, что при течении жидкости по порам упругого скелета вязкие силы значительно превосходят инерционные, т. е. справедлив закон Дарси (течение Пуазейля).

Однако с ростом частоты закон Дарси перестает работать. Био в [38, 39] выделил области низких и высоких частот. На высоких частотах развивается пограничный слой, микроскорости в котором не совпадают по фазе, т. е. течение жидкости в порах отличается от течения Пуазейля и существует фазовый сдвиг между силой трения и относительной скоростью течения жидкости по порам. Био ввел частотно-зависимую комплексную функцию $F(\omega)$, уточняющую вязкую силу межфазного взаимодействия. В этом случае коэффициент b_0 в уравнениях (17) имеет вид $b_0 = F(\omega)\phi^2\nu_f/K_{pr}$. При этом в области низких частот $F(\omega) \simeq 1$. В [39] была введена критическая частота, выше которой нарушается закон Дарси:

$$\omega_t = \frac{\pi^2 \nu_f}{2l^2} . \qquad (18)$$

Эта частота получена в предположении, что диаметр пор l равен 1/4 длины волны $\lambda = 4\pi\sqrt{\nu_f/(2\omega)}$. Так, ω_t для воды при $T = 15°$C и скелета с диаметром пор $l = 10^{-4}$ м составляет $2\pi \cdot 10^2$ 1/с, а для $l = 10^{-5}$ м – $2\pi \cdot 10^4$ 1/с.

При дальнейшем росте частоты $F(\omega)$ становится комплексной, частотно-зависимой [39] и в значительной мере определяется размерами, формой и взаимосвязью пор. При этом образуется пограничный слой, которым ограничены вязкие силы, он становится очень тонким. Поле скоростей в основной массе жидкости задается потенциальным течением. Отметим также, что сила трения жидкости об упругий скелет определяется эффективной вязкостью, которая оказывается частотно-зависимой. Кроме того, поле микроскоростей уже не имеет фиксированной конфигурации.

Поскольку аналитический учет всех факторов очень сложен, то в большинстве случаев для определения $F(\omega)$ делаются дополнительные допущения. В работах [38, 39] Био предположил, что характер изменения отношения силы трения на межфазовых поверхностях к относительному расходу жидкости в зависимости от частоты в пористо-упругой среде аналогичен случаю течения вязкой жидкости в цилиндрической трубке постоянного сечения. Такое предположение позволило ему ввести корректирующую частотно-зависимую функцию $F(\omega)$ в виде

$$F(\omega) = \frac{kT(k)}{4(1 - 2T(k)/ik)} ,$$
$$k = a_2\sqrt{\frac{\omega}{\nu_f}} , \quad T(k) = \frac{\mathrm{ber}'(k) + i\,\mathrm{bei}'(k)}{\mathrm{ber}(k) + i\,\mathrm{bei}(k)} . \qquad (19)$$

Заметим, что в этом случае рассматривается диапазон частот, для которых длина всех трех волн, существующих в безграничной насыщенной пористо-упругой среде, остается значительно больше размеров пор. Функции $\mathrm{ber}(k)$ и $\mathrm{bei}(k)$ представляют собой действительную и мнимую части функций Кельвина; ω – круговая частота; a_2 – структурный коэффициент. Параметр a_2 имеет размерность длины, зависит от размера и формы пор и определяется экспериментально. Заметим, что в работах Био этот структурный коэффициент изменяется в зависимости от формы пор незначительно [39].

Поскольку учет реальной формы поперечного сечения поры сказывается только на небольших изменениях масштабов длин, то для системы параллельных пор – каналов произвольного, но постоянного сечения – можно полагать, что комплексная функция $F(\omega)$ сохраняет вид (19).

В работе [77] для нахождения функции $F(\omega)$ предполагалось, что определяющую роль при движении жидкости по порам играют релаксационные процессы. При этом, как уже отмечалось, извилистость и проницаемость рассматривались как частотно зависимые функции (11), (15). Исходя из этого, корректирующую частотно зависимую функцию $F(\omega)$ можно записать в виде

$$F(\omega) = \sqrt{1 + \frac{i}{2} M_{js} \frac{\omega}{\omega_r}} ,$$

$$\omega_r = \frac{\eta_f \phi}{\alpha_\infty \rho_f k_0}, \qquad M_{js} = \frac{8\alpha_\infty k_0}{\phi \Lambda^2} ,$$

где ω_r – частота, при которой толщина пограничного слоя становится одного порядка с размерами пор. В работах Био частота ω_r определена несколько иначе [39]:

$$\omega_r = \frac{b_0}{\phi \rho_f} = \frac{\eta_f \phi}{\rho_f K_{pr}} .$$

Как видно частоты ω_r, введенные в статьях [39] и [77], отличаются на величину извилистости α_∞. Предложенная в [77] частотная зависимость корректирующей функции $F(\omega)$ в высокочастотном пределе для пор в виде цилиндрических трубок хорошо согласуется с моделью Био [39] и использовалась в исследованиях [23, 24, 70, 104].

Введение характерных частот ω_t и ω_r позволяет разделить весь рассматриваемый диапазон на три области. Для частот $\omega < \omega_t$ течение жидкости по порам упругого скелета описывается течением Пуазейля. Для частот $\omega_t < \omega < \omega_r$ течение Пуазейля нарушается, однако в этом диапазоне продолжают доминировать вязкие силы взаимодействия.

На частоте $\omega=\omega_r$ вязкие и инерционные силы имеют один порядок, а при $\omega>\omega_r$ доминируют инерционные силы.

Частотно зависимая поправка, введенная Био, используется практически во всех работах, посвященных анализу распространения волн в пористоупругих средах [24]. Это объясняется хорошим согласованием экспериментальных данных с теоретическими результатами, полученными по теории Био с учетом коэффициента $F(\omega)$. Следует отметить, что модель Био является моделью пористой среды на макроуровне и ее применение ограничено частотами, при которых длина волны оказывается порядка размеров пор (для песков – $2\pi\cdot(10^5\div10^6)$ 1/с).

Следует обратить внимание на то, что введение функции $F(\omega)$ в уравнения (17) приводит к тому, что входящие в них величины заданы как функции разных переменных – одни зависят от времени, а другие от частоты. Эта "мнимая проблема" решается за счет того, что при выполнении преобразования Фурье над функциями, зависящими от времени в уравнении (17), получают функции, зависящие от частоты, причем последняя отождествляется с частотой в $F(\omega)$.

Напомним, что при определении функции $F(\omega)$ в области высоких частот в рамках теории Био появился еще один параметр – a_2, названный Био структурным коэффициентом. Такой же терминологии придерживались авторы работ [18, 78, 93]. В ряде других исследований a_2 упомяну как коэффициент связи [45].

Био в работе [39] определил a_2 как

$$a_2 = \gamma\sqrt{\frac{K_{pr}}{m}}\,, \tag{20}$$

где γ – коэффициент, учитывающий геометрию пор. Для пор в форме цилиндрических трубок $\gamma=\sqrt{8}$, а для пор в виде щелей $\gamma=\sqrt{16/3}$ [39]. Согласно последним экспериментам, проведенным на ансамбле сфер, получено значение $\gamma=3.2$ [30].

Отметим, что одни исследователи находили структурный коэффициент теоретически [106], другие – экспериментально [30] или численно. Например, Столл (Stoll) [106] предположил, что $a_2=l/7$ (напомним, что l – диаметр пор). В работах [93, 106] подчеркивалось, что для реальных пористо-упругих сред структурный коэффициент должен определяться экспериментально. В [78] отмечалось, что структурный коэффициент – один из наиболее непонятных параметров в теории Био и в то же время величина a_2 является определяющей при описании распространения медленной продольной волны в пористых средах с очень жестким скелетом. В [64] отмечалось, что структурный коэффициент – это параметр, который наиболее критикуется различными авторами. Несмотря на приведенные замечания, трактовке, экспериментальному определению и теоретическому нахождению структурного коэффициента посвящено очень большое количество работ.

Структурный коэффициент является параметром среды на "микроуровне" и зависит от ряда факторов. Например, при увеличении порового давления, "сцементированности" матрицы скелета, консолидации среды, увеличения ее насыщенности (для частично насыщенных сред) величина a_2 возрастает. Обычно считают, что структурный коэффициент не зависит от частоты [18, 39, 64] и является "чисто геометрическим" параметром. Следует отметить, что есть работы, в которых вводится частотная зависимость структурного коэффициента в области высоких частот [105]. Однако это предположение требует экспериментального подтверждения. В то же время, структурный коэффициент существенно изменяется в зависимости от формы и ориентации пор, структуры матрицы скелета.

В работе [64] показано, что если поровая жидкость является идеальной, то $a_2\to\infty$. Для реальных сред в [76] предложен диапазон изменения a_2 в пределах $1.75\div3.84$, соответствующий изменению пористости от 0.11 до 0.341. В [117] найдено изменение структурного коэффициента в пределах $1.24\div1.64$, что соответствует изменению пористости $0.26\div0.48$. В [50] получена вариация a_2 в пределах $1.75\div1.89$ для пористости $0.36\div0.40$.

В работе [99] структурный коэффициент вычислялся по результатам обработки сейсмических измерений. Здесь была выведена формула, связывающая a_2 с модулем объемного сжатия K_b, модулем сдвига μ:

$$a_2 = 1.3134 + 0.11733\frac{K_b}{\mu}\,,$$

а также соотношение, связывающее структурный коэффициент с пористостью:

$$a_2 = 18.315 - 0.98193\phi + 0.01872\phi^2 - 0.00011824\phi^3.$$

Такие эмпирические зависимости были получены на основе измерений скоростей P- и SV-волн в диапазоне $80\div21000$ м/с.

Необходимость учитывать геометрические особенности пор, которые и описывает структурный коэффициент, привела к введению понятия двойной пористости (double-porosity) для пористых сред со скелетом типа горной породы. Это связано с тем, что в таких средах конфигурация разных пор значительно отличается. Существуют поры как в виде цилиндрических трубок, так и в виде щелей. При этом, хотя поровая жидкость и может перетекать между порами разных конфигураций, ощутимые различия в течении жидкости по поровому пространству со своим типом геометрии требуют дополнительного рассмотрения. Такой анализ проведен в работах Berryman, например в [35].

Дальнейшее развитие теории Био развивается по пути более полного учета реальных свойств двухфазных сред. При этом учитываются как реальные свойства скелета (такие как анизотропия и вязкость) [46, 53, 70, 97], состояние скелета (до консолидации или после) [87], так и изменение характера движения жидкости по порам. Кроме того, более полно учитываются механизмы затухания и реальная геометрия пор.

1.3. Модели, описывающие затухание

Вкратце остановимся на моделях, описывающих различные механизмы затухания. В пористоупругой среде затухание волн обусловлено потерями энергии двух различных типов – диссипацией в каждой из фаз (в упругом скелете и в жидкости) и потерями за счет относительного движения содержащейся в порах жидкости относительно скелета. Впервые Био [38], а впоследствии Столлом [18] было выдвинуто предположение о том, что общее затухание может быть описано как суперпозиция эффектов, вызванных обеими причинами. Это подтвердили экспериментальные данные, полученные разными исследователями [18, 30, 93]. Диссипация в упругом скелете, по аналогии с вязкоупругой средой, учитывается посредством введения комплексных модулей сдвига $\mu = G(1+i\delta_s)$ и всестороннего сжатия $\overline{K}_b = K_b(1+i\delta_l)$ [107, 116]. Здесь мнимые части обоих модулей определяются через логарифмические декременты затухания для поперечной и быстрой продольной волн соответственно. В общем случае величины μ, K_b и δ_s, δ_l – частотно зависимые нелинейные функции амплитуд напряжений [98]. Потери в жидкости учитываются через комплексную объемную вязкость.

Второй механизм затухания формируется за счет относительного движения фаз и определяется силой межфазного взаимодействия. Затухание, обусловленное движением жидкости по порам относительно упругого скелета, определяется сдвиговой вязкостью жидкости, проницаемостью и поправочным множителем $F(\omega)$, учитывающим частотную зависимость вязкого сопротивления потоку жидкости. Все эти характеристики были описаны выше.

Экспериментально установлено, что в песках на низких частотах преобладают потери в скелете грунта, а на высоких добавляются вязкие потери, связанные с движением внутрипоровой жидкости. Влияние потерь за счет движения жидкости в области низких частот увеличивается с ростом жесткости грунта. Это относится, например, к песчаникам. В глинах, обладающих малой жесткостью и низкой проницаемостью, потери в скелете доминируют почти во всем частотном диапазоне. В целом затухание в песках значительно больше, чем в песчаниках и глине. В песчаниках вклады диссипации за счет трения поровой жидкости и вязкости скелета имеют один порядок.

Кроме рассмотренных механизмов затухания, учитывается также термомеханическое затухание [48, 53, 56, 82], рассеивание на микротрещинах [81], рассеивание за счет шероховатости поверхности пор [75]. В ряде работ принимались во внимание микротечения [65] и макроскопические неоднородности фаз [47]. Учет указанных механизмов затухания приводит к увеличению общего затухания в области высоких частот, когда длина волны становится сопоставимой с размерами пор.

В рамках теории Био рассматривается полностью насыщенная жидкостью среда. В настоящее время появилось значительное количество работ для частично насыщенных сред. Не останавливаясь на их анализе, отметим только некоторые из подобных публикаций [10, 68, 84].

1.4. Теория эффективных модулей

В области низких частот, когда движение жидкости относительно упругого скелета имеет пренебрежимо малое влияние на распространение волн, двухфазную среду можно рассматривать как однофазную. При таком подходе структурно неоднородная среда заменяется некой однородной средой, а реальная гетерогенность среды сказывается только на величинах упругих коэффициентов, значения которых определяются из опытов. В [9] для случая равенства скоростей каждой из фаз двухфазная среда заменялась эквивалентной однофазной с обобщенными параметрами. Показано, что так можно поступать в области низких частот для малых величин коэффициента фильтрации. Аналогичный подход использовался в исследованиях [13, 17], где приравнивались не скорости фаз, а фазовые напряжения (тогда фазы оказываются равноправными). Для гетерогенной пороупругости существуют несколько теорий эффективных модулей. Две из них описаны в работе [34].

1.5. Теория пористых сред

Теория пористых сред основана на положениях континуальной теории смесей с применением концепции объемных частей, что требует введения в теорию смесей дополнительных замыкающих уравнений. При этом используются допущения о несмешивающихся взаимопроникающих континуумах с внутренней структурой. Каждый континуум относится к своей фазе (компоненте) и заполняет один и тот же объем, занятый средой в целом. Вводится представительный объем, в который входят все рассматриваемые континуумы, и в каждой точке которого одновременно находятся все фазы. Представительный объем выбирается таким образом, чтобы его размеры значительно превышали как молекулярно-кинетические размеры каждой из фаз, так и характерные структурные масштабы (например, радиус цилиндрических пор). В то же время, представительный объем должен быть значительно меньше макроразмеров (для волновых задач – длины волны). Для каждого из составляющих континуумов в каждой точке обычным образом определяются характеристики среды – плотности, скорости и т. д., интерпретируемые как среднестатистические величины реальных значений. Такое описание пористой среды является полностью макроскопическим и позволяет рассматривать макроскопические процессы в пористой среде в целом в рамках представлений сплошной среды через совокупность взаимопроникающих и взаимодействующих фаз. Протекание микропроцессов учитывается в континуальных уравнениях с помощью некоторых определяющих параметров, отражающих взаимодействие фаз.

В работе [44] рассматривалась эквивалентность теории Био и теории пористых сред. Было отмечено, что "теория Био является специальным случаем теории смесей с постоянными объемными частями". Bowen назвал этот случай "замороженными объемными частями". Для перехода от теории смесей к теории Био следует параметр Q в уравнении (17) приравнять нулю [101, 113] – это означает, что взаимодействие между двумя фазами не учитывается. Вопрос о возможности существования параметра Q, который фактически связывает напряжения в упругой и жидкой фазах, подробно рассматривался в работах Wilmanski и его учеников. В них было показано, что при линеаризации уравнений состояния для случая сжимаемого скелета и сжимаемой жидкости параметр Q необходимо учитывать. Вывод же о том, что $Q=0$, стал следствием того, что в работе [44] рассматривалась несжимаемая поровая жидкость. Переход от теории пористых сред к теории Био рассматривался многими авторами. Кроме уже упомянутых работ, отметим также [54, 55, 67].

Хотя две сравниваемые теории во многом весьма подобны, качественные различия обнаруживаются в том, как моделируется взаимодействие между фазами. В обоих случаях рассматривают упругий скелет и сжимаемую вязкую жидкость, полностью заполняющую поровое пространство; пористость вводится как отношение объема сообщающихся между собой пор к общему объему; связанная пористость учитывается в свойствах скелета.

В теории пористых сред существует много подходов, которые используются для получения основных уравнений, описывающих насыщенную пористо-упругую среду. Не останавливаясь на их многообразии, рассмотрим только некоторые. Так, в рамках упомянутого подхода, используя методы механики сплошной среды, основные уравнения находят из законов сохранения массы, количества движения, момента количества движения, энергии и энтропии. Законы сохранения массы, количества движения и момента количества движения записываются в лагранжевых координатах для каждой фазы и для среды в целом. Во всех цитируемых работах они одинаковы [16, 53, 92, 101, 113].

Особенности появляются при использовании законов сохранения энергии и энтропии. Здесь следует выделить два класса различий. Один из них связан с записью свободной энергии Гельмгольца на основе законов термодинамики. При этом варьируются как независимые параметры состояния, так и их количество. Второй класс различий связан с расшифровкой сил межфазного взаимодействия.

Как уже отмечалось, в рамках теории Био для линейных изотермических процессов энергия деформации и кинетическая энергия зависят от двух переменных – вектора перемещения упругого скелета $\boldsymbol{u}$ и вектора перемещения жидкости $\boldsymbol{U}$ [38]. Учитываются две силы межфазного взаимодействия – вязкая и инерционная.

В работе [101] используются только два независимых параметра (вектор перемещения скелета и давление в жидкости), причем делается допущение, что свободная энергия Гельмгольца не зависит от объемных частей. В [53] также выбраны два независимых параметра и уравнения состояния после линеаризации имеют вид (2). Однако, в отличие от работ Био, здесь учитываются три типа сил межфазного взаимодействия (см. [53, (3.49), с. 47]). К вязкой силе, обусловленной течением жидкости по порам упругого скелета и инерционной силе, обусловленной различием в ускорениях фаз, добавляется еще один фактор:

$$f_3 = p_f \operatorname{grad} \phi.$$

Эта сила обусловлена связью напряжений в скелете и давления в жидкости за счет изменения объемов фаз (при изменении пористости меняется площадь, на которую воздействует среднее давление в жидкости). В работе [16, (4.4.7), с. 231] сила межфазного взаимодействия также включает три составляющие. Здесь F_μ – вязкая сила; F_m – "сила, связанная с мелкомасштабными пульсациями давлений из-за ускорения фаз друг относительно друга" (инерционная), и $f_3 = p_f \operatorname{grad} \phi$ – "сила, связанная с действием среднего давления из-за расширения трубки тока" жидкой фазы. В [53] силы f_3 в линеаризированных уравнениях движения в перемещениях нет, а в [101] также отмечается, что при линеаризации основных уравнений член $\operatorname{grad} \phi$ исчезает. В то же время, в отличие от упомянутых исследований, в [16] сила f_3 учитывается и для замыкания системы вводится дополнительное уравнение для изменения пористости.

В цикле работ Wilmanski в уравнения также добавляется градиент пористости [113]. Здесь в качестве дополнительного замыкающего уравнения используется балансовое уравнение для пористости. Так, для линейной модели при изотермическом процессе уравнения состояния представлены в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}\big((H-2\mu)e - C\zeta\big) - N(\phi-\phi_0), \\ p_f &= -Ce + M\zeta - N(\phi-\phi_0). \end{aligned} \tag{21}$$

Эти соотношения отличаются от формулы (2) наличием дополнительного слагаемого. При этом отмечается, что "численные значения коэффициента N значительно меньше, чем Q" [113]. Фактически, слагаемым $N(\phi-\phi_0)$ можно пренебречь. Подчеркнем еще раз, что в уравнениях (21) сохранен коэффициент связи $Q = \phi C - \phi^2 M$.

В [41] показано, что двух независимых переменных (вектор смещения в скелете и поровое давление жидкости) достаточно для описания пороупругой среды. Здесь же обсуждалась возможность использования трех независимых переменных.

В цитируемых работах в рамках теории пористых сред были получены линеаризированные уравнения состояния и движения. При этом выполнялось предположение о малости возмущений, которое для пористой среды включает в себя ряд гипотез [53], перечисленных ниже.

1. Гипотеза малых деформаций. При таком предположении тензоры деформаций в эйлеровых и лагранжевых координатах совпадают.
2. Гипотеза малых перемещений скелета $|\boldsymbol{u}|/l \ll 1$. Здесь l – диаметр пор.
3. Гипотеза малых изменений пористости $(\phi - \phi_0)/\phi_0 \ll 1$.
4. Гипотеза малых изменений плотности поровой жидкости $(\rho - \rho_0)/\rho_0 \ll 1$, что позволяет заменить ρ на ρ_0.
5. Гипотеза линейной пороупругости скелета с нулевыми начальными напряжениями в скелете и давлением в жидкости.
6. Гипотеза линейного поведения жидкости, что означает $K_f = \text{const}$.

Выполнение этих гипотез позволяет полностью линеаризовать уравнения в рамках теории пористых сред. В этом случае полученные соотношения совпадают с уравнениями Био [95]. Подчеркнем еще раз, что хотя уравнения теории Био и пористых сред и совпадают по форме, в основе их построения лежат разные представления [21].

2. АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Анализ волновых процессов на основе теории Био является основной задачей данной статьи. Если применимость модели Био к описанию насыщенной пористо-упругой среды в общем случае вызывает дискуссию, то ее эффективность и надежность для исследования акустических волн малой амплитуды бесспорна. В современной литературе уделялось внимание различным аспектам распространения волн в пористой среде. Остановимся только на некоторых из них.

По аналогии с однофазной средой, разложим векторы смещения в жидкости и в упругом скелете на скалярный и векторный потенциалы:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \nabla\phi_s + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}_s, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}_s = 0, \quad \operatorname{rot}\phi_s = 0, \\ \boldsymbol{v} &= \nabla\phi_f + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}_f, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}_f = 0, \quad \operatorname{rot}\phi_f = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением гармонических процессов. Скалярный потенциал допускает представление [38]:

$$\phi_s = \phi_0 + \phi_1. \tag{23}$$

Функции ϕ_j определяются как решения уравнений Гельмгольца

$$\Delta\phi_j + k_j^2\phi_j = 0, \qquad k_j^2 = \frac{\omega^2}{c^2} z_j, \qquad j = 0,\, 1. \quad (24)$$

Величины z_j – корни квадратного уравнения

$$A_1 z_j^2 - B_1 z_j + C_1 = 0, \qquad j = 0,\, 1 \quad (25)$$

с коэффициентами

$$A_1 = q_{22}q_{11} - q_{12}^2, \qquad C_1 = \Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2 + i\Gamma,$$

$$B_1 = q_{11}\Gamma_{22} + q_{22}\Gamma_{11} - 2q_{12}\Gamma_{12} + i\Gamma.$$

Здесь введены обозначения

$$q_{11} = \frac{H - 2C\phi + M\phi^2}{H}; \qquad q_{22} = \frac{M\phi^2}{H};$$

$$q_{12} = \frac{C\phi - M\phi^2}{H}; \qquad c^2 = \frac{H}{\rho};$$

$$\rho_{11} = (1-\phi)\rho_s - \rho_{12}; \qquad \rho_{22} = \phi\rho_f - \rho_{12};$$

$$\rho = (1-\phi)\rho_s + \phi\rho_f;$$

$$\Gamma_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{\rho}; \qquad \Gamma = \frac{\phi^2\rho_f\nu_f}{K_{pr}\rho\omega}.$$

Для потенциала ϕ_f справедливо уравнение

$$\phi_f = M_0\phi_0 + M_1\phi_1$$

с коэффициентами

$$M_j = \frac{\Gamma_{11}q_{22} - \Gamma_{12}q_{12} - A_1 s_j + (q_{22}+q_{12})i\Gamma}{\Gamma_{22}q_{12} - \Gamma_{12}q_{22} + (q_{22}+q_{12})i\Gamma}, \quad j = 0,\, 1. \quad (26)$$

Приведенные соотношения описывают быструю и медленную продольные волны в двухфазной неограниченной среде, распространяющиеся независимо друг от друга. Быстрая продольная волна распространяется с фазовой скоростью $c_1 = c/\sqrt{z_1}$, а медленная продольная – со скоростью $c_0 = c/\sqrt{z_0}$. Если эффектами трения поровой жидкости можно пренебречь ($\nu_f = 0$), то быстрая продольная волна соответствует синфазному движению скелета и жидкости, а медленная продольная – противофазному. Если выполняется дополнительное условие, гласящее что связь между упругой и жидкой фазами слабая ($\Gamma_{12} = 0$, $q_{12} = 0$), то $z_1 = \Gamma_{11}/q_{11}$, $z_0 = \Gamma_{22}/q_{22}$ и фазовые скорости быстрой и медленной продольной волн равны $c_1 = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho_{11}}$ и $c_0 = \sqrt{\phi^2 M/\rho_{22}}$ соответственно, $\lambda = H - 2\mu$ [12, 19]. При этом $M_1 = 0$, $M_0 \to \infty$, обе волны не обладают дисперсией. Пренебрегая эффектами вязкости поровой жидкости, можно выделить еще один частный случай движения, когда смещения в упругой и жидкой фазах одинаковы ($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$), т. е. нет относительного движения фаз. Такой тип движения наблюдается при выполнении условий динамической совместимости [2, 38]

$$\frac{H - C\phi}{\rho_{11} + \rho_{12}} = \frac{C\phi}{\rho_{22} + \rho_{12}}.$$

Как уже отмечалось, в этом частном случае двухфазная среда может быть заменена однофазной с приведенными коэффициентами [9, 13].

В случаях большой вязкости или низкой частоты,

$$\Gamma = \frac{\phi^2\rho_f\nu_f}{K_{pr}\rho\omega} \gg 1, \quad (27)$$

из уравнения (25) следует [12]

$$z_1 = 1 - \frac{i\rho\omega}{b_0}\Bigl(q_{11}q_{22} - q_{12}^2 - q_{11}\Gamma_{22} - {}$$

$${} - q_{22}\Gamma_{11} + \Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2\Bigr),$$

$$z_0 = i\frac{\Gamma}{q_{11}q_{22} - q_{12}^2}.$$

Фазовая скорость быстрой продольной волны в низкочастотном пределе стремится к величине $c = \sqrt{H/\rho}$, а коэффициент затухания пропорционален квадрату частоты. Фазовая скорость медленной продольной волны стремится к $c\sqrt{\omega/\omega_r}$ [15], а коэффициент затухания пропорционален квадратному корню из частоты, т. е. при низких частотах медленная продольная волна практически исчезает [12]. В области высоких частот затухание быстрой и медленной продольных волн пропорционально квадратному корню из частоты [39].

Векторные потенциалы для скелета и поровой жидкости удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\Delta\boldsymbol{\psi}_s + k_2^2\boldsymbol{\psi}_s = 0,$$
$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} = \frac{\omega^2\rho}{\mu}[\Gamma_{11} + M_2\Gamma_{12} + (1 - M_2)i\Gamma] \quad (28)$$

и соотношению

$$\boldsymbol{\psi}_f = M_2\boldsymbol{\psi}_s, \qquad M_2 = \frac{-\Gamma_{12} + i\Gamma}{\Gamma_{22} + i\Gamma}. \quad (29)$$

Таким образом, в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде распространяется поперечная волна. При отсутствии затухания в этой волне вращение жидкости и упругого скелета происходит в одном и том же направлении. Вращение упругого скелета вызывает вращение жидкости, приводящее к уменьшению эффекта присоединенной массы, т. е. к увеличению фазовой скорости. В области низких частот фазовая скорость поперечной волны стремится к скорости поперечных волн в упругой среде, коэффициент затухания пропорционален квадрату частоты. В области высоких частот затухание поперечной волны пропорционально квадратному корню из частоты.

Таким образом, выражения (24), (28) показывают, что в упругой пористой среде, заполненной вязкой жидкостью, могут распространяться три типа волн – быстрая и медленная продольные (ϕ_0, ϕ_1) и поперечная ($\boldsymbol{\psi} \equiv \boldsymbol{\psi}_s$). При учете диссипативных процессов постоянные распространения этих волн зависят как от характеристик среды, так и от частоты колебаний ω, т. е. волны в упругой пористой среде, насыщенной вязкой жидкостью обладают дисперсией. Если эффектами вязкости пренебречь ($\nu_f = 0$), то все три волны будут незатухающими и бездисперсионными [23, 116]. Анализу характера затухания трех типов волн в бесконечной пористо-упругой насыщенной жидкостью среде посвящено значительное количество экспериментальных и теоретических исследований. Частотная зависимость затухания рассматривалась в [12,14,38,91]. Затухание и фазовые скорости трех типов волн с учетом частотных зависимостей параметров среды исследовались в работах [2, 3, 11, 15, 23, 30, 33, 100]. Экспериментальному определению фазовых скоростей и затухания посвящены статьи [78, 79, 83, 90, 104].

2.1. Граничные условия

Уравнения (24), (28) описывают волновые движения в однородной пористо-упругой среде, насыщенной вязкой жидкостью. Для корректной постановки граничной задачи математической физики их необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

Начальные условия для уравнений (24), (28) формулируются так же, как и для классического волнового уравнения. В начальный момент времени $t = 0$ во всем объеме, занимаемом пористоупругим телом, задаются смещения и скорости всех частиц упругой и жидкой фаз.

Формулирование понятия о границе пористоупругого тела и постановка условий на ней чрезвычайно важны как с точки зрения усложнения волновой картины, так и с точки зрения трактовки экспериментальных результатов. Фактически, введение граничных поверхностей и постановка условий на них является вопросом о взаимодействии различных тел между собой. Типы допустимых граничных условий тесно связаны с доказательством теорем о существовании и единственности решения.

Условия, обеспечивающие единственность решения граничных задач динамической теории пористоупругости на границах раздела двухфазных сред, впервые приведены в работах Deresiew [59 – 62]. Он показал, что на границе насыщенной пористо-упругой среды должны выполняться условия непрерывности следующих характеристик поля:

$$\sigma^s_{nn} + \sigma^f,\ \dot{u}_n,\ \sigma^s_{n\alpha},\ \dot{u}_\alpha,\ p_f,\ \dot{w}_n. \qquad (30)$$

Здесь индекс n соответствует направлению нормали.

При выполнении условий непрерывности характеристик (30) возможны следующие случаи.

1. Поры двух сред связаны и жидкость свободно перетекает из одной среды в другую (открытая граница, проницаемая граница).

2. Частично открытая граница (например, при введении пористой мембраны между двумя средами). В этом случае

$$p^{(1)}_f - p^{(2)}_f = k\dot{w}_i, \qquad (31)$$

где k – коэффициент сопротивления.

3. Закрытая (непроницаемая) граница. На поверхности раздела находится непроницаемая мембрана. Тогда $k \to \infty$, $\dot{w}_n = 0$ и перетоки жидкости на границе отсутствуют, т. е. нет связи между пустотами в двух средах.

Для открытой границы $k = 0$ и для записи граничных условий используют весь набор соотношений (30). При $k \to \infty$ величины p_f не определяют. Видно, что в общем случае давление в жидкости может не являться непрерывной величиной на границе раздела. Таким образом, достаточными граничными условиями при контакте двух пористо-упругих сред оказывается непрерывность величин (30) с учетом (31), причем дополнительно должен быть определен коэффициент k. Отметим, что запись граничных условий в виде непрерывности величин (30), полученные Deresiewicz, впоследствии использовались при решении граничных задач многими авторами.

Исходя из требования непрерывности величин (30), запишем граничные условия для контакта двух пористо-упругой сред:

$$
\begin{gathered}
(\sigma_n^s + \sigma^f)^{(1)} = (\sigma_n^s + \sigma^f)^{(2)}, \\
\sigma_{n\alpha(1)}^s = \sigma_{n\alpha(2)}^s, \qquad \phi_1 p_f^{(1)} = \phi_2 p_f^{(2)}, \\
u_{\alpha(1)} = u_{\alpha(2)}, \qquad u_{n(1)}^s = u_{n(2)}^s, \\
\phi_1(v_n^{(1)} - u_n^{(1)}) = \phi_2(v_n^{(2)} - u_n^{(2)}).
\end{gathered} \tag{32}
$$

Такие соотношения использовались, например, в [74] при исследовании отражения и прохождения волн на границе раздела двух пористо-упругих сред для случая нормального падения.

Следует отметить серию работ, в которых исследуется отражение объемных волн на границе раздела двух пористо-упругих сред, когда одна из них обладает двойной пористостью. В этом случае граничные условия имеют иной вид и процесс рассеивания волн на границе значительно сложнее (см., например, [118]).

Для контакта пористо-упругого (индекс 1) и упругого тел (индекс 2) справедливо

$$
\begin{gathered}
(\sigma_n^s + \sigma^f)^{(1)} = \sigma_n^{(2)}, \qquad \sigma_{n\alpha}^{s(1)} = \sigma_{n\alpha}^{(2)}, \\
u_{n(1)} = u_{n(2)}, \qquad u_{\alpha(1)} = u_{\alpha(2)}, \\
(v_n^{(1)} - u_n^{(1)}) = 0.
\end{gathered} \tag{33}
$$

В работе [74] контакт пористо-упругой и упругой сред был рассмотрен как предельный случай контакта двух пористо-упругих сред. Асимптотические выражения для коэффициентов отражения и прохождения при нормальном падении волн на такой границе раздела получены в [102] с учетом вязкости жидкости. При этом были обнаружены качественные различия при отражении – прохождении волн на границе для малых и больших величин извилистости. В этой работе также подчеркивалась, что хотя измерять медленную продольную волну в реальных условиях сложно, однако ее наличие оказывает значительное влияние на амплитуду и затухание быстрой продольной и поперечной волн.

Для контакта пористо-упругого тела (индекс 1) и жидкости (индекс 2)

$$
\begin{gathered}
(\sigma_n^s + \sigma^f)^{(1)} = -p_f^{(2)}, \qquad \sigma_{n\alpha}^{s(1)} = 0, \\
(1-\phi)\dot{u}_{n(1)} + \phi \dot{v}_{n(1)} = \dot{v}_{n(1)}.
\end{gathered} \tag{34}
$$

Процесс отражения – прохождения волн на границе пористо-упругой и жидкой сред рассматривался в работах [23, 58, 107, 115].

В [107] на основе теории Био был проведен анализ особенностей отражения волн, падающих из жидкости на границу раздела жидкость – пористо-упругое полупространство. При этом учитывались как потери в скелете, так и вязкость поровой жидкости. Заметим, однако, что в этой работе рассматривался только случай отражения от открытых на границе пор. Кроме того, не проводился анализ распределения энергии падающей волны между отраженными волнами различных типов. В [115] было проанализировано отражение волн на границе жидкости и пористо-упругого полупространства для общего типа граничных условий (открытые или закрытые на границе поры) при наклонном падении волны. Рассмотрено падение волны как из жидкости, так и из поросто-упругого полупространства. При этом диссипативные эффекты в средах не учитывались. В [58] получены асимптотические выражения для коэффициентов отражения и прохождения на границе раздела пористо-упругой и жидкой сред при условии, что скелет абсолютно жесткий. Экспериментальные данные об отражении волн на границе жидкости и пористо-упругой среды, приведеные в [51], хорошо согласуются с теоретическими. Ниже мы отдельно рассмотрим вопрос о наличии поверхностных волн на границе раздела пористо-упругой и жидкой сред.

Если поверхность пористо-упругого тела свободна, то возможны два типа граничных условий [59, 62].

1. Поры на границе открыты (проницаемая граница):

$$\sigma_n^s = 0, \qquad \sigma_{n\alpha}^s = 0, \qquad \sigma^f = 0. \tag{35}$$

2. Поры на границе закрыты (непроницаемая граница):

$$\sigma_n^s, \sigma^f = 0, \qquad \sigma_{n\alpha}^s = 0, \qquad \dot{u}_n - \dot{v}_n = 0. \tag{36}$$

Отражение волн на свободной границе рассматривалось в работах [6, 12]. В [6] проведен анализ процесса отражения объемных волн от свободной границы пористо-упругого полупространства. Показано, что при отражении волн от проницаемой и непроницаемой границ существуют значительные различия, носящие как количественный, так и качественный характер для отраженной медленной продольной волны. Так, при падении на границу поперечной или медленной продольной волн существую критические углы, ниже которых отраженная волна становится неоднородной.

Как и для упругого полупространства, при отражении поперечной волны, падающей под углом $\gamma = 45°$, наблюдается полное сохранения типа движения. Для таких углов падения быстрая продольная волна всегда неоднородна, а медленная продольная волна может быть как распространяющейся, так и неоднородной, в зависимости от параметров среды.

При падении на свободную границу медленной продольной волны (если ее фазовая скорость – наименьшая), в области закритических углов падения для быстрой продольной и поперечной волн, существует квази-поверхностная волна. В ней частицы движутся по эллипсам, а амплитуда смещений максимальна вблизи свободной поверхности. Отметим, однако, что за счет существования распространяющейся медленной продольной волны квази-поверхностная волна переносит энергию в глубину. На анализе поверхностных волн на свободной границе также остановимся отдельно.

2.2. Энергетический анализ

Исследование волновых процессов было бы неполным без изучения энергетических характеристик. Для их анализа исследуется распределение между распространяющимися волнами потока мощности, вносимого в среду. Компоненты вектора плотности потока мощности в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде определяются соотношением [6, 107, 115]

$$P_i = -\sigma^s_{ij} u_j - \sigma^f \delta_{ij} v_j .$$

Для гармонических процессов, как правило, рассматривают средний за период $T = 2\pi/\omega$ поток мощности:

$$\widetilde{P}_i = \frac{1}{T}\int\limits_0^T P_i dt =$$
$$= -\frac{i\omega}{4}\left(\sigma^s_{ij}\, u^*_j - \sigma^{s*}_{ij} u_j + \sigma^f \delta_{ij} v^*_j - \sigma^{f*} \delta_{ij} v_j\right).$$

Знак $*$ означает комплексное сопряжение. Распределение энергии падающей волны между тремя типами отраженных волн на границе раздела пористо-упругого полупространства и жидкости проведено в [115], а на свободной границе – в [6]. В обеих работа показано, что существуют условия при которых, медленная продольная волна наиболее энергетически выражена.

В пористо-упругой среде, без учета затухания для вертикальной компоненты среднего за период вектора потока мощности, справедлив принцип суперпозиции по энергии, который заключается в том, что энергия, которая приносится на границу падающей волной (или создается нагрузкой на поверхности), равна энергии, которую переносят в глубину отраженные волны. Неоднородная волна энергию в глубину не переносит. Вдоль границы полупространства принцип суперпозиции по энергии не работает.

2.3. Поверхностные волны

На основе теории Био изучались поверхностные волны на свободной границе пористо-упругого полупространства и на границе раздела пористо-упругого полупространства и жидкости. Поверхностная волна в идеально упругом полупространстве со свободной границей называется волной Рэлея. Она распространяется вдоль границы и убывает в глубь среды. Скорость волны Рэлея меньше скорости поперечных волн. Для пористо-упругого полупространства со свободной границей при отсутствии затухания в среде поверхностной (и, по аналогии с упругой средой, Рэлеевской) будем называть волну, образованную взаимодействием всех трех неоднородных волн. Волна, распространяющаяся на границе идеально упругого полупространства и жидкости, называется волной Стоунли. Ее скорость меньше скоростей объемных волн в обеих средах. Поверхностная волна на границе пористо-упругого и жидкого полупространств (также при отсутствии затухания в среде) формируется тремя неоднородными волнами в пористо-упругой среде и неоднородной волной в жидкости. Будем называть ее волной Стоунли. Поверхностные волны Рэлея и Стоунли распространяются без дисперсии и не затухают вдоль направления распространения.

Под псевдоповерхностной волной[3] понимается волна, распространяющаяся вдоль границы, однако образованная взаимодействием на ней не только неоднородных, но и распространяющихся волн. Так, на границе упругого полупространства и жидкости будет распространяться псевдоволна Рэлея, если скорость звука в жидкости меньше, чем скорость волны Рэлея на свободной границе упругого полупространства. Псевдоповерхностная волна в данном случае образована двумя неоднородными волнами в упругом полупространстве и распространяющейся волной в жидкости. Она переносит энергии в глубину жидкого полупространства, т. е. при распространении псевдоповерхностной волны происходит переизлучение

[3] В зарубежной литературе – “leaky wave”, дословно “вытекающая волна” .

энергии из твердого полупространства в жидкое. Такая волна затухает вдоль направления распространения. Псевдоповерхностные волны могут существовать только в определенной конечной области вблизи источника, преобразуясь в дальнем поле в объемные [5]. Подчеркнем, что псевдоповерхностная волна существует в среде без диссипации (фактически, ее постоянная распространения – это комплексный корень дисперсионного уравнения). Затухание же псевдоповерхностной волны вдоль направления распространения обусловлено переизлучением энергии из одной среды в другую.

В пористо-упругой среде, в отличие от упругой, существуют два типа продольных волн. Вследствие этого поверхностные волны на границе пористо-упругого полупространства имеют особенности, не характерные для поверхностных волн в однофазных средах. Кроме того, в пористо-упругой среде необходимо учитывать затухание, порождаемое течением вязкой жидкости по порам упругого скелета, что также обуславливает ряд специфичных свойств поверхностных волн в ней. Кратко остановимся на этих особенностях.

Поверхностные волны на свободной границе пористо-упругого полупространства рассматривались в ряде публикаций. Одной из первых была работа [80], в которой показано существование поверхностной волны, образованной взаимодействием неоднородной поперечной волны и только одной из продольных волн (медленной или быстрой) на свободной границе пористо-упругого полупространства. В [108] обнаружена поверхностная волна на свободной границе с учетом всех трех волн, которые могут распространяться в пористо-упругой среде. Однако при этом не учитывалось затухание, а поверхностная волна была найдена только для одного соотношения параметров среды. В статье [7] показано, что в пористо-упругом насыщенном жидкостью полупространстве со свободной проницаемой или непроницаемой границей без учета диссипативных эффектов в зависимости от параметров среды может существовать поверхностная или квазиповерхностная волна. Если скорость поперечной волны в бесконечной пористо-упругой среде самая низкая, то поверхностная волна формируется тремя неоднородными волнами, распространяющимися вдоль свободной границы и затухающими в глубину. При этом скорость поверхностной волны в случае проницаемой границы будет больше, чем в случае непроницаемой границы. Независимо от того, проницаема граница или нет, скорость поверхностной волны меньше скорости поперечной волны и ее с точностью до 10 % можно оценить как скорость волны Рэлея в эквивалентной однофазной среде.

Если медленная продольная волна в пористо-упругой среде без затухания – самая медленная, то возможны две ситуации. Для определенного диапазона параметров среды (скорости медленной продольной и поперечной волн близки) существует поверхностная волна. Для большинства же сред, для которых $c_0 > c_2$, поверхностной волны как волны, не переносящей энергии в глубину, нет. Существует квазиповерхностная волна, образованная неоднородными поперечной и быстрой продольной волнами. В то же время, медленная продольная волна остается распространяющейся и переносит энергию в глубину.

При учете затухания, обусловленного движением вязкой жидкости по поровому пространству, волновая картина существенно изменяется в зависимости от того, проницаема граница или нет. Для проницаемой границы существует одна поверхностная волна, слабо затухающая вдоль направления распространения. Ее фазовая скорость незначительно увеличивается с частотой и стремится к скорости поверхностной волны в эквивалентной однофазной среде. Затухание волны увеличивается с частотой и определяется вязкостными характеристиками поровой жидкости. Основная часть энергии, которую переносит данная волна, сосредоточена в упругом скелете.

Для непроницаемой границы существуют две поверхностные волны. Одна из них распространяется с фазовой скоростью, близкой к скорости поверхностной волны в полупространстве с проницаемой границей. Скорость второй волны в высокочастотном пределе стремится к скорости медленной продольной волны. Характер затухания двух поверхностных волн в пористо-упругом полупространстве с непроницаемой границей существенно различен: одна из них затухает слабо, а вторая – сильно. Кинематика частиц в слабо затухающей поверхностной волне аналогична поверхностной волне в упругом полупространстве. Основная часть энергии, которую переносит эта волна, сосредоточена в упругом скелете. Глубина проникновения волны уменьшается с частотой. Для быстро затухающей волны характерно увеличение глубины проникновения с ростом частоты. Основная часть энергии, переносимая этой волной, сосредоточена в жидкой фазе.

Поверхностные волны на границе раздела пористо-упругого полупространства и жидкости изучались в работах [8, 22, 66, 71, 114]. В [71] показана возможность существования на границе насыщенного жидкостью пористо-упругого полупространства и жидкости одной, двух или трех поверхностных волн (в зависимости от упругих характеристик пористого скелета и жидкости). Первая из них – действительная (“true”) поверхностная волна, распространяющаяся со скоростью, меньшей, чем скорости всех объемных волн; вторая – волна псевдо-Стоунли, скорость которой больше, чем скорость наименьшей объемной волны, но больше скоростей остальных волн; третья – волна псевдо-Рэлея, скорость которой меньше скорости поперечной волны. В цитируемой работе рассматривался высокочастотный диапазон, в котором объемные волны становятся практически незатухающими и среду можно рассматривать как недиссипативную. На более низких частотах такое приближение неправомерно. Экспериментальное подтверждение результатов работы [71] приведено в [88]. В [29] изучались поверхностные волны на границе раздела пористо-упругого полупространства, насыщенного воздухом, и воздуха. Здесь учитывалось затухание в среде, обусловленное взаимодействием фаз. Для контакта пористо-упругого полупространства и воздуха обнаружены три поверхностные волны. При этом самая медленная поверхностная волна не является “действительной” (“true”) и обладает наибольшим затуханием; вторая – псевдо-рэлеевская волна; а третья, самая быстрая поверхностная волна, распространяется со скоростью, немного меньшей скорости быстрой продольной волны, и затухает слабее всех. В [27] предсказана и экспериментально найдена поверхностная волна рэлеевского типа на границе раздела пористо-упругой среды и воздуха.

Большой цикл исследований, посвященных поверхностным волнам в пористых средах, выполнен Wilmanski и его сотрудниками [22, 66, 114]. Общим для этих работ является то, что пористая среда рассматривается в рамках теории смесей. Для свободного пористо-упругого полупространства здесь найдены два типа поверхностных волн. Однако при этом рассматривался только случай непроницаемой границы.

В [8] исследовались частотные зависимости скорости и затухания поверхностных волн на границе раздела жидкого и пористо-упругого полупространств. В зависимости от параметров контактирующих сред и условий на границе (открытые или закрытые поры) существуют одна, две или три поверхностные волны. Это волна Стоунли со скоростью, меньшей, чем скорости всех объемных волн; волна псевдо-Стоунли со скоростью, большей, чем скорость медленной продольной волны, но меньше, чем скорость звука в жидкости; и волна псевдо-Рэелея со скоростью, близкой к скорости изгибных волн в пористо-упругой среде.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Краткий анализ использования теории Био для описания распространения волн малой амплитуды в насыщенной пористо-упругой среде показывает, что полученные на ее основе результаты качественно и количественно согласуются с экспериментальными данными и теоретическими расчетами в рамках более строгих подходов, применение которых требует значительно более сложных вычислений. Более того, теории пористо-упругих сред, учитывающие связь микроструктурных и макроструктурных параметров, требуют определения физических постоянных, характеризующих отдельные фазы, а эти постоянные, как правило, неизвестны. В рамках же теории Био входящие в определяющие уравнения константы находятся из макроэкспериментов и достаточно полно описаны в литературе. Однако следует отметить, что их экспериментальное определение и предложенные связи между микропараметрами фаз с макропараметрами среды до настоящего времени остаются предметом дискуссии. Данное замечание в первую очередь следует отнести к структурным коэффициентам и локальным характеристикам среды.

Наиболее важные волновые эффекты (затухание волн, фазовые скорости, типы поверхностных волн), найденные в рамках теории Био, согласуются с экспериментальными данными.

1. *Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д.* Нефтегазовая гидромеханика.– Москва–Ижевск: Инст. компьют. исслед, 2003.– 480 с.
2. *Био М. А.* Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей.– 1963.– **6**, N 82.– С. 103–134.
3. *Био М. А.* Обобщенная теория распространения акустических волн в диссипативных пористых средах // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей.– 1963.– **6**, N 82.– С. 135–155.
4. *Био М. А.* Теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей.– 1957.– **1**, N 35.– С. 140–147.
5. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах.– М.: Наука, 1981.– 278 с.
6. *Городецкая Н. С.* Отражение волн от свободной границы пористо-упругого насыщенного жидкостью полупространства // Акуст. вісн.– 2002.– **5**, N 4.– С. 5–14.
7. *Городецкая Н. С.* Волны на границе пористо-упругого полупространства. I. Свободная граница // Акуст. вісн.– 2005.– **8**, N 1-2.– С. 28–41.
8. *Губайдуллин А. А., Юолдырева О. Ю.* Распространение волн вдоль границы насыщенной пористой среды и жидкости // Акуст. ж.– 2006.– **52**, N 2.– С. 201–211.

9. *Динамика* сплошных сред в расчетах гидротехнических сооружений / Под ред. В. М. Ляхтера и Ю. С. Яковлева.– М.: Энергия, 1976.– 392 с.

10. *Дунин С. З., Михайлов Д. Н., Николаевский В. Н.* Продольные волны в частично насыщенных пористых средах. Влияние газовых пузырьков // Прикл. мат. мех.– 2006.– **70**, N 2.– С. 282–294.

11. *Заславский Ю. М.* Об эффективности возбуждения быстрой и медленной волн Био в водо- и газонасыщенных средах // Техническая акустика.– 2002.– N 2.– С. 13.1–13.12.

12. *Косачевский Л. Я.* О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах // Прикл. мат. мех.– 1959.– **23**, N 6.– С. 1115–1123.

13. *Ляхов Г. М.* Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах.– М.: Наука, 1982.– 288 с.

14. *Ляховицкий Ф. М., Рапопорт Л. И* Применение теории Френкеля – Био для вычисления скорости и поглощения упругих волн в насыщенных пористых средах // Прикл. геофиз.– 1972.– **66**.– С. 52–64.

15. *Михайлов Д. Н.* Различие продольных волн Френкеля – Био в водонасыщенной и газонасыщенной пористых средах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа.– 2006.– N 1.– С. 121–130.

16. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред.– М.: Наука, 1978.– 336 с.

17. *Рахматулин Х. А.* Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикл. мат. мех.– 1956.– **20**, N 2.– С. 18–26.

18. *Столл Р. Д.* Акустические волны в водонасыщенных осадках // Акустика морских осадков.– М., 1977.– С. 28–46.

19. *Трофимчук А. Н., Гомилко А. М., Савицкий О. А.* Динамика пористоупругих насыщенных жидкостью сред.– К.: Наук. думка, 2003.– 230 с.

20. *Френкель Я. И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз.– 1944.– **8**, N 4.– С. 133–149.

21. *Хорошун Л. П.* К теории насыщенных пористых сред // Прикл. мех.– 1976.– **12**, N 12.– С. 35–41.

22. *Albers B.* Modelling of surface waves in poroelastic saturated materials by means of a two component continuum. – Lecture notes // WIAS-Preprint.– 2004.– N 952.– P. 1–44.

23. *Albert D. G.* A comparison between wave propagation in water-saturated and air-saturated porous materials // J. Appl. Phys.– 1993.– **73**, N 1.– P. 28–36.

24. *Allard J. F.* Propagation of sound in porous media: Modelling sound absorbing materials.– London: Chapman and Hall, 1993.– 284 p.

25. *Allard J. F., Aknine A., Depollier C.* Acoustical properties of partially reticulated foams with high and medium flow resistance // J. Acoust. Soc. Amer.– 1986.– **79**, N 6.– P. 1734–1740.

26. *Allard J. F., Champoux Y.* New empirical equations for sound propagation in rigid frame fibrous materials // J. Acoust. Soc. Amer.– 1992.– **91**, N 6.– P. 3346–3353.

27. *Allard J. F., Jansens G., Vermeir G., Lauriks W.* Frame-borne surface waves in air-saturated porous media // J. Acoust. Soc. Amer.– 2002.– **111**, N 2.– P. 690–696.

28. *Attenborough K.* Acoustical characteristics of rigid fibrous absorbents and granular materials // J. Acoust. Soc. Amer.– 1983.– **73**, N 3.– P. 785–799.

29. *Attenborough K., Chen Yu* Surface waves at an interface between air and an air-filled poroelastic ground // J. Acoust. Soc. Amer.– 1990.– **87**, N 3.– P. 1010–1016.

30. *Badiey M., Cheng A. H.-D., Mu Y.* From geology to geoacoustics: Evaluation of Biot – Stoll sound speed and attenuation for shallow water acoustics // J. Acoust. Soc. Amer.– 1998.– **103**, N 1.– P. 309–320.

31. *Bedford A., Drumheller D. S.* A variational theory of porous media // Int. J. Solid Struct.– 1979.– **15**.– P. 967–980.

32. *Berge P. A., Wang H. F., Bonner B. P.* Pore-pressure buildup coefficient in synthetic and natural sandstones // Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Geomech. Abstr.– 1993.– **30**.– P. 1135–1141.

33. *Berryman J. G.* Scale-up in poroelastic systems and applications to reservoirs // 16th ASCE Engng Mech. Conf.– Seattle: Univ. Washington, 2003.– P. 1–8.

34. *Berryman J. G.* Comparison of upscaling methods in poroelasticity and its generalizations // J. Engng Mech.– 2005.– **131**, N 9.– P. 928–936.

35. *Berryman J. G., Wang H. F.* The elastic coefficients of double-porosity models for fluid transport in jointed rock // J. Geophys. Resch.– 1995.– **100**.– P. 24611–246246.

36. *Berryman J. G., Wang H. F.* Elastic wave propagation and attenuation in double-porosity dual-permability medium // Int. J. Rock Mech. Min. Sci.– 2000.– **37**.– P. 63–78.

37. *Biot M. A.* General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys.– 1941.– **12**.– P. 155–164.

38. *Biot M. A.* Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. Part I. Low frequency range // J. Acoust. Soc. Amer.– 1956.– **28**, N 2.– P. 168–178.

39. *Biot M. A.* Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. Part II. Higher frequency range // J. Acoust. Soc. Amer.– 1956.– **28**, N 2.– P. 179–191.

40. *Biot M. A., Willis D. G.* The elastic coefficients of the theory of consolidation // J. Appl. Mech.– 1956.– **24**.– P. 594–601.

41. *Bonnet G.* Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range // J. Acoust. Soc. Amer.– 1987.– **82**, N 5.– P. 1758–1762.

42. *Bonnet G., Auriault J.-L.* Dynamics of saturated and deformable porous media: homogenization theory and determination of the solid-liquid coupling coefficients // Physics of finely divided matter / Eds N. Boccara, M. Daoud.– Berlin: Springer, 1985.– P. 306–316.

43. *Bouteca M. J., Gueguen Y.* Mechanicfl properties of rock: Pore pressure and scale effects // Oil Gas Sci. Technolo. – Rev. IFP.– 1999.– **54**, N 6.– P. 703–714.

44. *Bowen R. M.* Compressible porous media models by use of the theory of mixture // Int. J. Engng Sci.– 1982.– **20**.– P. 697–735.

45. *Brown R. J. S., Korringa J.* On the dependence of the elastic propertied of a porous rock on the compressibility of the pore fluid // Geophys.– 1975.– **40**.– P. 608–616.

46. *Carsione J. M.* Wave propagation in anisotropic saturated porous media: Plane wave theory and numerical simulation // J. Acoust. Soc. Amer.– 1996.– **99**, N 5.– P. 2655–2666.

47. *Chaban I. A.* Sound attenuation in semidents and rock // Acous. Phys.– 1993.– **39**, N 2.– P. 190–193.

48. *Champoux. Y, Allard J. F.* Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media // J. Appl. Phys.– 1991.– **70**.– P. 1975–1979.

49. *Chandler R. N., Johnson D. L.* The equivalence of quasistatic flow in fluid-saturated porous media and Biot's slow wave in the limit of zero frequency // J. Appl. Phys.– 1981.– **52**, N 5.– P. 3391–3395.

50. *Chotiros N. P.* Biot model of sound propagation in water-saturated sand // J. Acoust. Soc. Amer.– 1995.– **97**, N 1.– P. 199–214.

51. *Chotiros N. P., Lyons A. P., Pace N. G.* Normal incidence reflection loss from sandy semident // J. Acoust. Soc. Amer.– 2002.– **112**, N 5, Pt 1.– P. 1831–1840.

52. *Courtney R. C.,Mayer L.* Acoustical properties of fine-grained sediments from Emerald Basin: Toward an inversion for physical properties using the Biot – Stoll model // J. Acoust. Soc. Amer.– 1993.– **93**, N 6.– P. 3193–3201.

53. *Coussy O.* Poromechanics.– New York: John Wiley & Sons, 2004.– 298 p.

54. *De Boer R.* Highlights in the historical development of the porous media theory: Toward a consistent macroscopic theory // Appl. Mech. Rev. ASME.– 1996.– **49**, N 4.– P. 201–262.

55. *De Boer R.* Theory of porous media. Highlights in historical development and current state.– Berlin: Springer, 2000.

56. *De la Cruz V., Spanos T. J. T* Thermomechanical coupling during seismic wave propagation in a porous medium // J. Geophys. Resch.– 1989.– **94**.– P. 637–642.

57. *Dell'Isola F., Guarascio M., Hutter K.* A variational approach for the deformation of a saturated porous solid. A second-gradient theory extending Terzaghi's effective stress principle // Arch. Appl. Mech.– 2000.– **70**.– P. 323–337.

58. *Denneman A. I. M., Drijkoningen G. G., Smeulders D. M. J., Wapenaar K.* Reflection and transmission of waves at a fluid/porous-medium interface // Geophys.– 2002.– **67**, N 1.– P. 282–291.

59. *Deresiewicz H.* The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous plate. I. Reflection of plane waves at a free plane boundary (no-dissipative case) // Bull. Seism. Soc. Amer.– 1960.– **50**, N 4.– P. 599–607.

60. *Deresiewicz H.* The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid. IV. Surface waves in a half-space // Bull. Seism. Soc. Amer.– 1962.– **52**, N 3.– P. 627–638.

61. *Deresiewicz H.* The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid. VII. Surface waves in a half-space on the presence of a liquid layer // Bull. Seism. Soc. Amer.– 1964.– **54**, N 1.– P. 425–430.

62. *Deresiewicz H., Rice J. T.* The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid. III. Reflection of plane waves at a free plane boundary (general case) // Bull. Seism. Soc. Amer.– 1962.– **52**, N 3.– P. 595–625.

63. *Deresiewicz H., Skalak R.* On uniqueness in dynamic poroelasticity // Bull. Seism. Soc. Amer.– 1963.– **53**, N 4.– P. 783–788.

64. *Domenico S. N.* Elastic properties of unconsolidated sand reservoirs // Geophys.– 1977.– **42**.– P. 1339–1368.

65. *Dvorkin J.,Holen-Hoeksema R., Nur A.* The squirt-flow mechanism: Macroscopic description // Geophys.– 1994.– **59**.– P. 428-428.

66. *Edelman I., Wilmanski K.* Asymptotic analysis of surface waves at vacuum/porous medium and liquid/porous medium interfaces // Cont. Mech. Thermodyn.– 2002.– **14** N 1.– P. 25–44.

67. *Ehlers W., Kubik J.* On finite dynamic equation for fluid-saturated porous media // Acta Mech.– 1994.– **105**.– P. 101–117.

68. *Emerson M., Foray P.* Laboratory P wave measurements in dry and saturated sand // Acta Geotech.– 2006.– N 1.– P. 167–177.

69. *Fatt I.* The Biot-Willis elastic coefficients for a sandstone // J. Appl. Mech.– 1959.– **26**, N 2.– P. 296–297.

70. *Fellan Z. E. A., Depollier C.* On the propagation of acoustic pulses in porous rigid media: A time-domain approach // J. Comput. Acoust.– 2001.– **96**, N 3.– P. 1163–1173.

71. *Feng S., Johnson D. L.* High-frequency acoustic properties of a fluid/porous solid interface. I. New surface mode // J. Acoust. Soc. Amer.– 1983.– **74**, N 3.– P. 906–914.

72. *Fillunger P.* Der Auftrieb von Talsperren, Teil I–III // Osterr. Wochenschrift fur den offentlicen Baudients.– 1913.– **7**.– S. 510–532.

73. *Gassmann F.* Elastic waves through a parking of spheres // Geophys.– 1951.– **16**.– P. 673–685.

74. *Geerstma J., Smit D. C.* Some aspect of elastic wave propagation in fluid-saturated porous solid // Geophys.– 1961.– **26**, N 2.– P. 169–181.

75. *Gist G. A.* Fluid effects on velocity and attenuation in sandstones // J. Acoust. Soc. Amer.– 1994.– **96**, N 2, Pt. 1.– P. 1158–1173.

76. *Johnson D. L.* Equaivalence between fourthsound in liquid He II at low temperature and the Biot slow wave in consolidated porous media // Appl. Phys. Lett.– 1980.– **37**.– P. 1065–1067.

77. *Johnson D. L., Koplin J., Dashen R.* Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media // J. Fluid Mech.– 1987.– **179**.– P. 379–402.

78. *Johnson D. L., Plona T. J.* Acoustic slow waves and the consolidation // J. Acoust. Soc. Amer.– 1982.– **72**, N 2.– P. 556–565.

79. *Johnson D. L.,Plona T. J.* Probing porous media with first and second sound. II. Acoustic properties of water-saturated porous media // J. Appl. Phys.– 1994.– **76**, N 1.– P. 115–125.

80. Jones J. P. Rayleigh waves in a porous, elastic, saturated solid J. Acoust. Soc. Amer1961**33**, N 7959–962

81. *Jungman A., Quentin G., Adler A., Xue Q.* Elastic property measurements in fluid-filled porous materials // J. Appl. Phys.– 1988.– **66**, N 11.– P. 5179–5184.

82. *Kaczmarec M., Kochanski J., Kubik J.* Ultrasonic waves in saturated porous materials. Discussion of modeling and experimental results // J. Theor. Appl. Mech.– 1998.– **36**, N 3.– P. 597–618.

83. *Kelder O.,Smeulders D. M. J.* Observation of the Biot slow wave in water-saturated Nivelsteiner sandstone // Geophys.– 1997.– **62**, N 6.– P. 1794–1796.

84. *King M. S., Marsden J. R., Dennis J. W.* Biot dispersion for P- and S- wave velocities in partially and fully saturated sandstones // Geophys. Resch.– 2000.– **48**.– P. 1075–1089.

85. *Korringa J.* On the Biot – Gassmann equations for the elastic moduli of porous rocks: Comment // J. Acoust. Soc. Amer.– 1981.– **70**, N 6.– P. 1752–1753.

86. *Kumpel H. J.* Poroelasticity: Parameters reviewed // Geophys. J. Int.– 1991.– **105**.– P. 783–799.

87. *Lee W. M.* Modified Biot – Gassmann theory for calculating elastic velocities for unconsolidated and consolidated sediments // Marine Geophys. Resch.– 2002.– **23**.– P. 403–412.

88. *Mayer M. J., Nagy P. B., Adler L., Bonner B. P., Streit R.* Excitation of surface waves of different modes at fluid – porous solid interface // J. Acoust. Soc. Amer.– 1986.– **79**, N 2.– P. 249–252.

89. *Murphy W. F. III* Acoustic measures og partial gas saturation in tight sandstone // J. Geophys. Resch.– 1984.– **89**.– P. 11549–11559.

90. *Nagy P. B.,Adler L., Bonnet B. P.* Slow wave propagation in air-filled porous materials and natural rocks // Appl. Phys. Lett.– 1990.– **56**, N 25.– P. 2504–2506.

91. *Nikolaevskij V. N.* Mechanics of porous and fractured media.– Singapore: World Scientific Publishers, 1990.– 472 p.

92. *Nikolaevskij V. N.* Biot – Frenkel poromechanics in Russia (Review) // J. Engng Mech.– 2005.– **131**, N 9.– P. 888–897.

93. *Oqushwitz P. R.* Applicability of the Biot theory // J. Acoust. Soc. Amer.– 1985.– **77**, N 2.– P. 429–464.

94. *Plona T. J.* Observation of second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies // Appl. Phys. Lett.– 1980.– **36**, N 4.– P. 259–261.

95. *Prevost J. H.* Wave propagation in fluid-saturated porous media: An efficient finite element procedure // Soil Dyn. Earthquake Engng.– 1985.– **4**, N 4.– P. 183–202.

96. *Pride S. R., Garambois S.* The role of Biot slow waves in electroseismic wave phenomena // J. Acoust. Soc. Amer.– 1985.– **111**, N 2.– P. 697–706.

97. *Rao M. V. M. S., Prasanna Lakhmi K. J.* Shear-wave propagation in rock and other lossy media: An experimental study // Current Sci.– 2003.– **8**, N 8.– P. 1221–1225.

98. *Rasolofosaon P. N. J.* Plane acoustic waves in linear viscoelastic porous media: Energy, particle displacement and physical interpretation // J. Acoust. Soc. Amer.– 1991.– **89**, N 4, Pt 1.– P. 1532–1551.

99. *Salem H. S.* Determination of the acoustics coupling factor of Biot's theory of elasticity, using in situ seismic measurements // Energy Sources.– 2001.– **23**.– P. 917–936.

100. *Salin D., Schon W.* Acoustics of water saturated packed glass spheres // J. Phys. Lett.– 1981.– **42**.– P. 477–480.

101. *Schanz M., Diebels S.* A comparative study of Biot's theory and the linear theory of porous media for wave propagation problem // Acta Mech.– 2003.– **161**.– P. 213–235.

102. *Silin D. B., Korneev V. A., Goloshubin G. M., Patzek T. W.* Low frequancy asymptotic analysis of seismic reflection from a fluid-saturated medium // Transp. Por. Media.– 2006.– **62**.– P. 283–305.

103. *Simmons G., Wilkens R., Caruso L., Wissler T., Miller F.* Physical propertied and microstructures of a set of sandstones // Ann. Rept Schlumberger – Doll Resch Center.– VI-16.– 1983.

104. *Smeulders D. J.* Experimental evidence for slow compressional waves // J. Engng Mech.– 2005.– **131**, N 9.– P. 908–917.

105. *Stinson M. R., Champoux Y.* Propagation of sound and the assignment of shape factors in mode porous materials having simple pore geometries // J. Acoust. Soc. Amer.– 1992.– **91**, N 2.– P. 685–695.

106. *Stoll R. D., Bryan G. M.* Wave attenuation in saturated sediments // J. Acoust. Soc. Amer.– 1970.– **47**, N 5, Pt 2.– P. 1440–1447.

107. *Stoll R. D., Kan T.-K.* Reflection of acoustic waves at water-sediment interface // J. Acoust. Soc. Amer.– 1981.– **70**, N 1.– P. 149–156.

108. *Tajuddin M.* Rayleigh waves in a poroelastic half-space // J. Acoust. Soc. Amer.– 1984.– **75**, N 3.– P. 682–684.

109. *Tolstoy I.* Acoustics, elasticity, and thermodynamics of porous media: Twenty-one papers by M. A. Biot.– New York: AIP Press, 1992.– 272 p.

110. *Von Terzaghi K.* Die Berechnung der Durchlassigkeit des Tones aus dem Verlauf der hydromechanischen Spannungserscheinungen // Sitzungsber. Akad.Wissensch. Math.-Naturwiss. Klasse.– 1923.– **132**.– S. 125–128.

111. *Walton K., Digby P. J.* Wave propagation though fluid saturated porous rocks // Trans. ASME.– 1987.– **54**.– P. 788–793.

112. *While J. E.* Computed seismic speed and attenuation in rocks with partial gas saturation // Geophys.– 1975.– **40**.– P. 224–232.

113. *Wilmanski K.* A few remarks on Biot's model and linear acoustics of poroelastic saturated materials // Solid Dynam. Earth. Engng.– 2006.– **26**.– P. 509–536.

114. *Wilmanski K.* Propagation of sound and surface waves in porous materials // WIAS-Preprint.– 2001.– N 684.– P. 1–12.

115. *Wu K., Xue Q., Adler L.* Reflection and transmission of elastic waves from a fluid – saturated porous solid boundary // J. Acoust. Soc. Amer.– 1990.– **87**, N 6.– P. 2349–2358.

116. *Yamamoto T.* Acoustic propagation in the ocean with a poro-elastic bottom // J. Acoust. Soc. Amer.– 1983.– **73**, N 5.– P. 1578–1596.

117. *Yavari B., Bedford A.* Comparison of numerical calculation of two Biot coefficients with analytical solutions // J. Acoust. Soc. Amer.– 1991.– **90**, N 2, Pt 1.– P. 985–990.

118. *Zhi-Jun Dai, Zhen-Bang Kuang, She-Xu Zhao* Reflection and transmission of elastic waves from the interface of a fluid-saturated porous solid and a double porosity solid // Transp. Por. Media.– 2006.– **65**.– P. 237–264.