

УДК 534.3+611.539

## ГЕНЕРАЦІЯ ЗВУКУ ТЕЧІЯМИ В КАНАЛАХ З ЛОКАЛЬНИМИ НЕРЕГУЛЯРНІСТЯМИ ГЕОМЕТРІЇ

А. О. БОРИСЮК

*Інститут гідромеханіки НАН України, Київ*

*Одержано 25.06.2007*

Підсумовано результати останніх теоретичних, експериментальних та чисельних досліджень течій і пульсацій пристінного тиску в околах локальних нерегулярностей геометрії (звужень) каналів, а також згенерованих ними акустичних полів.

Подытожены результаты последних теоретических, экспериментальных и численных исследований течений и пульсации пристеночного давления в окрестностях локальных нерегулярностей геометрии (сужений) каналов, а также генерируемых ими акустических полей.

The paper deals with summarizing of results of the recent theoretical, experimental and numerical studies concerning the flows and wall pressure fluctuation fields in the vicinity of local irregularities of channels' geometry (narrowings), as well as acoustic fields generated by them.

### ВСТУП

Дослідження течій у каналах актуальне для автомобіле- та літакобудування, нафтогазової промисловості, архітектури, комунального господарства, медицини тощо. Значний інтерес тут становлять збурення течій і поява акустичних ефектів у місцях локальних нерегулярностей геометрії каналів, таких як налипання на стінках, зварювальні шви, стенози. Дійсно, згенерований при цьому звуковий сигнал містить дані про параметри каналу й середовища у зоні виникнення шумів, а отже існує можливість створення неінвазивних методів знаходження нерегулярностей за аналізом акустичного поля [1–4].

Розроблення таких методів може проводитись лише за наявності теорій, які, адекватно описуючи механізми генерації звуку і його проходження від джерела до приймача, встановлювали б кількісний зв'язок між характеристиками акустичного поля та параметрами течії, каналу і нерегулярності його геометрії. У свою чергу, створення таких теорій передбачає існування достовірної інформації про структуру та властивості гідродинамічних і акустичних полів у каналах з геометричними неоднорідностями, а також про фактори, що їх визначають [2, 3, 5–8].

Як показує аналіз наукової літератури, вивчення гідродинамічних полів за звуженнями в каналах та супутніх акустичних полів, згенерованих збуреною звуженням течією, приділялася значна увага. Зокрема, дослідження просторової структури гідродинамічних полів виявили існування областей збуреної за звуженням течії та її стабіліза-

ції й переходу до стану, який був перед звуженням [2–8]. На початку ж області збурення, як правило, спостерігається відрив потоку у вигляді струменя і зворотний рух (між струменем і стінкою каналу). При цьому швидкість течії на осі каналу в зоні збурення залишається практично такою ж, як і в горловині звуження [2–4, 6, 9–11].

Поле пульсацій тиску  $p_t$  у цій зоні характеризується різким зростанням амплітуд, а максимального значення  $p_t$  досягає перед точкою приєднання струменя [2–6, 9–12]. Існують також оцінки для верхніх меж довжин областей відривної та збуреної течій, відстані від звуження каналу до точки максимуму  $p_t$  і значення тиску в ній [2–5, 9, 11–13]. Проте відповідні оцінки різних авторів відрізняються між собою не лише для різних, але навіть для однієї і тієї ж форми звуження.

Вивчення спектральних характеристик полів пульсацій швидкості й тиску за звуженнями каналів [2, 3, 6, 9–14] дозволило одержати лише загальний вигляд цих характеристик і з'ясувати якісну залежність їхніх рівнів від числа Рейнольдса течії і ступеня звуження. Локальні ж особливості спектральних кривих (нахил, максимуми) та їхній зв'язок із вихровими утвореннями у збуреній за звуженням течії, а також змінюваність кривих з відстанню від звуження не вивчалися взагалі, або ж їм не приділялось належної уваги. Окрім цього, не було досліджено вплив форми й геометричних параметрів звуження (площі мінімального поперечного перерізу, довжини, ступеня відхилення форми від осьової симетрії тощо), а також механічних властивостей стінки каналу і витратних характеристик течії на просторово-спектральні ха-

рактики поля  $p_t$ .

Зазначимо, що дослідження акустичних полів у каналах з геометричними неоднорідностями у вигляді локальних звужень призвели до створення кількох теорій генерації звуку обмеженою областю збуреної течії у нескінченному прямому жорсткостінному каналі [15–17]. Усі вони будувалися на основі теорії аеродинамічного звуку Лайтхіла [18–20], а тому мають схожий характер. Так, область збурення скрізь моделюється рівномірно розподіленими в ній об'ємними квадрупольними джерелами звуку, характеристики яких вважаються відомими. Випадок же нерівномірного розподілу джерел у цих теоріях не розглядається. Не враховується також вплив стінки каналу, яка, згідно з результатами Керла [21, 22], зумовлює появу поверхневих диполів.

Ще одним суттєвим недоліком зазначених праць було те, що в них здебільшого ігнорувався взаємозв'язок між гідродинамічним і акустичним полями у каналах зі звуженнями і вони вивчалися практично незалежно одне від одного. Робіт же, в яких розв'язується зв'язана задача генерації звуку течією, існує дуже мало (див., наприклад, [22, 23]), а одержані в них дані – малоінформативні. Усе це стимулювало проведення відповідних досліджень з одержання нових якісних та кількісних даних про структуру і властивості таких фізичних полів. Ці питання значною мірою були вирішені у працях [6–8, 10, 24–32], опублікованих протягом останнього десятиліття.

Ця стаття має на меті узагальнити й систематизувати основні згадані результати. Вона складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку літератури і додатку. У першому розділі підсумовуються результати експериментальних досліджень [6–8, 26, 27, 29] полів течії та пульсацій пристінного тиску за звуженнями каналів. Другий розділ присвячено теорії генерації звуку обмеженою областю збуреної течії в каналі, розроблений у [28, 32]. У третьому розділі проаналізовано створений в [10, 31] аналітично-чисельний метод розв'язування зв'язаних задач акустичного випромінювання течій у каналах зі звуженнями. Далі сформульовані висновки, наведено списки цитованої літератури та прийнятих позначень.

## 1. ПОЛЯ ТЕЧІЇ І ПУЛЬСАЦІЙ ПРИСТІННОГО ТИСКУ ЗА ЗВУЖЕННЯМИ КАНАЛІВ

Цей розділ присвячено дослідженню особливостей полів течії та пульсацій пристінного тиску  $p_t$  у каналі за звуженням. У ньому підсумовуються результати праць [6–8, 26, 27, 29], у яких експери-

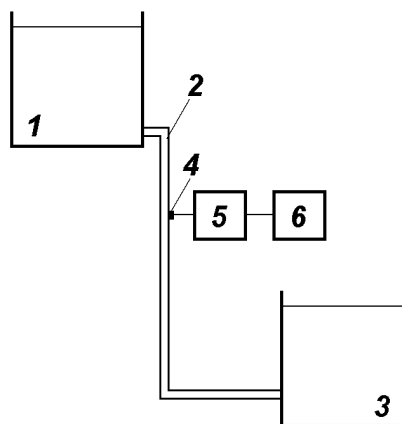


Рис. 1. Загальна схема експериментальної установки:

1 – зливний резервуар; 2 – силіконова трубка;  
3 – приймальний резервуар; 4 – датчик тиску;  
5 – підсилювач; 6 – частотний аналізатор

ментально вивчався вплив форми і геометричних параметрів звуження, а також механічних властивостей стінки каналу і витратних характеристик незбуреного потоку на зазначені поля. Одержані висновки підтверджуються відповідними теоретичними й чисельними даними [10, 24, 25, 30, 31] (див. кінець третього розділу).

Для проведення експериментів було розроблено методику і створено відповідне обладнання, схематично зображене на рис. 1 і 2 відповідно. Залежно від поставленої мети, базова конфігурація робочої ділянки експерименту змінювалася за рахунок додавання до неї нових і/або модифікації вже існуючих елементів [26, 27, 29]. Вивчення поля  $p_t$  проводилося в термінах двох його найбільш уживаних статистичних характеристик [2–5, 9, 11–14]: середньоквадратичного значення  $p_{rms} = \sqrt{\langle p_t^2 \rangle}$  (де у загальному випадку дужки  $\langle \dots \rangle$  означають операцію осереднення за множиною реалізацій) і частотний спектр  $P$ , зв'язаний з тиском  $p_t$  співвідношенням [22]

$$\langle p_t^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega,$$

$$P(f) = 4\pi P(\omega).$$

### 1.1. Вплив ступеня і довжини звуження, а також витратних характеристик незбуреного звуженням потоку

Вибір зображеної на рис. 2 конфігурації робочої ділянки експерименту (жорсткостінний канал кругового поперечного перерізу з осесиметричним

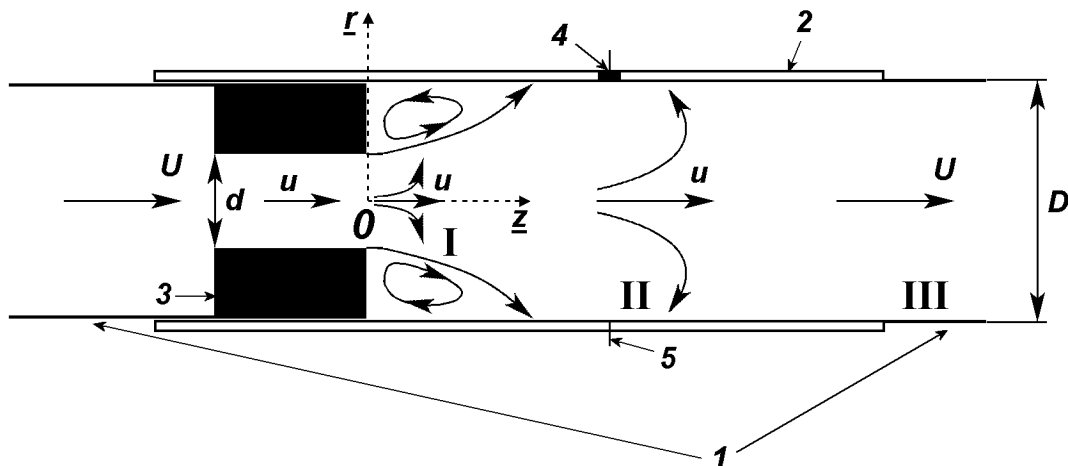


Рис. 2. Базова конфігурація робочої ділянки експерименту з концентричною вставкою:  
 1 – силіконова трубка; 2 – плексигласова трубка; 3 – вставка; 4 – датчик тиску; 5 – голка для введення фарби;  
 I – область відривної течії; II – область приєднаної, але ще збуреної течії;  
 III – область стабілізації й переходу течії до режиму, який був перед звуженням

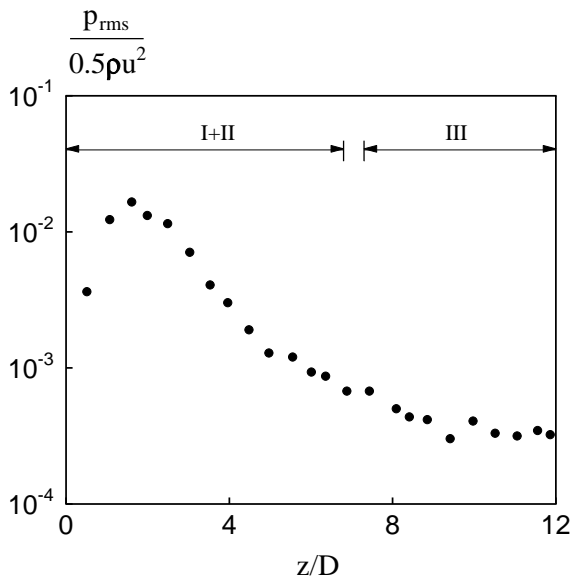


Рис. 3. Осевий розподіл тиску  $p_{rms}$  у жорсткостінному каналі за осесиметричним звуженням ступінчастої форми ( $d=9$  мм,  $S=75$  %,  $U=0.25$  м/с,  $Re_D=4500$ )

звуженням ступінчастої форми) у якості базової був зумовлений [6–8]:

- необхідністю з’ясування впливу лише ступеня  $S=(1-d^2/D^2) \times 100$  % і довжини  $l$  звуження, а також витратних характеристик незбуреного звуженням потоку на поля течії і пульсацій пристінного тиску  $p_t$  за звуженням;

- можливістю подальшого вивчення на цій ділянці ролі інших параметрів каналу і звуження шляхом відповідної її модифікації і співставлення відповідних даних для модифікованої й базової конфігурацій.

У результаті проведених досліджень виявлено осьову симетрію полів течії і тиску  $p_t$  (у першому наближенні), а також встановлено, що звуження каналу збурює течію, спричиняючи різке зростання  $p_t$  в скінченній області за ним (рис. 3) [6]. Тут існують області відривної I та приєднаної II течії, а також III стабілізації й переходу до попереднього незбуреного стану III (див. також рис. 2). Довжини областей I, I+II і I+II+III не перевищують трьох, семи і дванадцяти діаметрів каналу відповідно:

$$L_I < 3D, \quad L_{I+II} < 7D, \quad L_{I+II+III} < 12D. \quad (1)$$

Осьовий розподіл тиску  $p_{rms}$  в області збурення характеризується максимумом у точці  $z=L_{max}$ , яка завжди знаходиться перед точкою приєднання струменя у межах  $z/D \approx 1.3 \div 2.6$  [6].

Кількісні оцінки для відстані  $L_{max}$  і тиску  $p_{rms}$  у точці  $z=L_{max}$  мають такий вигляд [6]:

$$\frac{L_{max}}{d} \approx 0.127 Re_d^{0.26} (D/d)^{1.25}, \quad (2)$$

$$\frac{(p_{rms})_{max}}{0.5 \rho u^2} \frac{D}{d} \approx 0.054 \quad \text{для} \quad Re_d = \frac{ud}{\nu} > 8500 \quad (3)$$

(тут  $(p_{rms})_{max} = p_{rms}|_{z=L_{max}}$ ,  $u=U(D/d)^2$ ). Їх аналіз показує, що при збільшенні/зменшенні числа

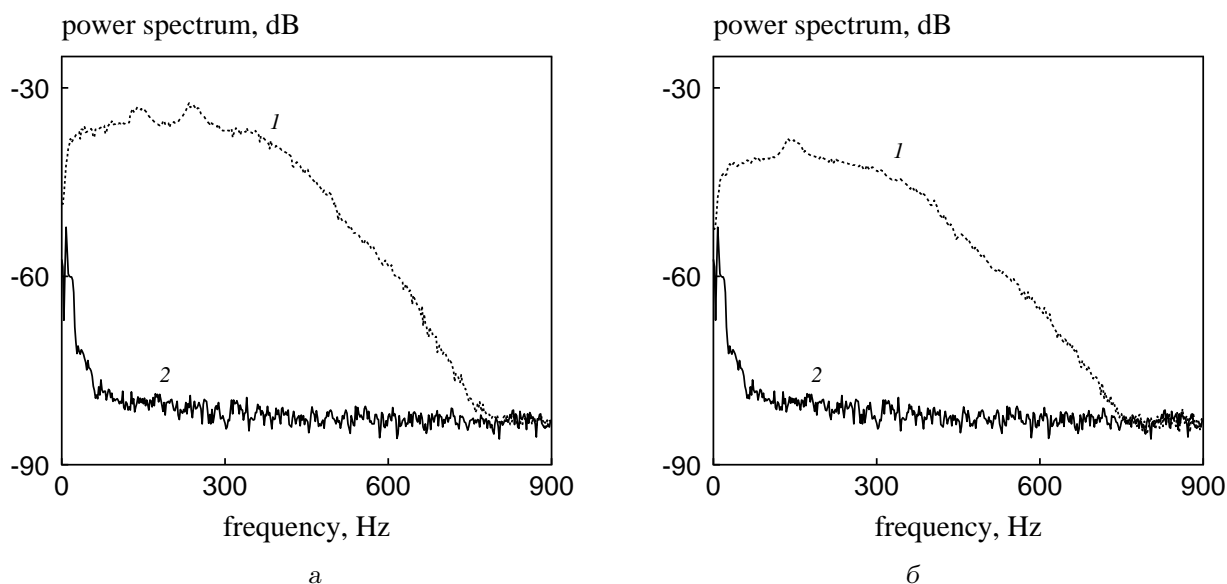


Рис. 4. Спектр пульсацій гідродинамічного тиску  $P$  у точках  $z=L_{\max}$  (а) і  $z=4D$  (б) за локальним звуженням ступінчастої форми у жорсткостінному каналі на швидкості  $U=0.35$  м/с ( $Re_D=6300$ ) [6]:

1 – звуження ( $d=10$  мм,  $S=69\%$ ,  $l=20$  мм); 2 – навколишній шум

Рейнольдса струменя  $Re_d$  і/або ступеня звуження точка максимуму  $p_{rms}$  зміщується вниз/вгору за течією, а сам тиск у цій точці  $(p_{rms})_{\max}$  збільшується/зменшується. При цьому, починаючи з  $Re_d \approx 8500$ ,  $p_{rms}$  приблизно пропорційний динамічному тиску струменя  $\rho u^2/2$  і відношенню діаметрів  $d/D$  звуженої та незвуженої ділянок каналу. Ці оцінки є універсальнішими за відомі в літературі аналоги, оскільки, як показано далі, мало змінюються при зміні жорсткості стінки каналу, появі ексцентриситету і згладжуванні форми звуження. Зауважимо, що відповідні оцінки попередників відрізняються між собою не лише для різних, але навіть для однієї й тієї ж форми звуження [2–5, 9, 11–13].

Спектр  $P$  (рис. 4) у областях відривної I та приєднаної II течії (див. рис. 2) виявляється подібним до частотного спектра пульсацій пристінного тиску у повністю розвиненій турбулентній течії в жорсткостінній трубі [6, 22, 33]. Особливість же спектра  $P$  полягає у наявності низькочастотних максимумів тиску (останні спричиняють появу відповідних піків у спектрі акустичної енергії, згенерованої збуреною звуженням течією [7, 8, 10, 30], див. розділ 3). Аналіз структури течії та розподілу її енергії по вихорах за звуженням показує, що ці максимуми визначаються відповідними великомасштабними вихровими утвореннями у областях I і II, а їхні частоти – частотами

таких утворень [6–8]. Так, для області I – типові вихори розмірів порядку  $d/2$ , які рухаються у струмені зі швидкостями, близькими до  $u$  і характеризуються частотами порядку

$$f_{ch}^{(1)} = \frac{2u}{d}, \quad (4)$$

та вихори масштабів порядку товщини звуження  $h=(D-d)/2$  у зоні зворотного руху між струменем і стінкою каналу. Вони мають частоти порядку

$$f_{ch}^{(2)} = \frac{u_c}{h} \quad (5)$$

(тут  $u_c \sim 0.45 \div 0.6u$  – швидкість конвекції на зовнішній межі струменя [6, 8, 14]). В області ж II існують вихрові структури, розміри та швидкості руху яких близькі відповідно до  $D/2$  та  $U$ , а частоти – до

$$f_{ch}^{(3)} = \frac{2U}{D}. \quad (6)$$

Дослідження варіацій тиску  $p_{rms}$  і спектра  $P$ , зумовлених зміною ступеня звуження  $S$ , показують, що [6]:

- тиск  $p_{rms}$  і рівні спектра  $P$  загалом зростають/спадають зі збільшенням/зменшенням  $S$ ;
- положення максимумів спектра  $P$  змінюється при зміні  $S$  відповідно до змін частот (4)–(6);

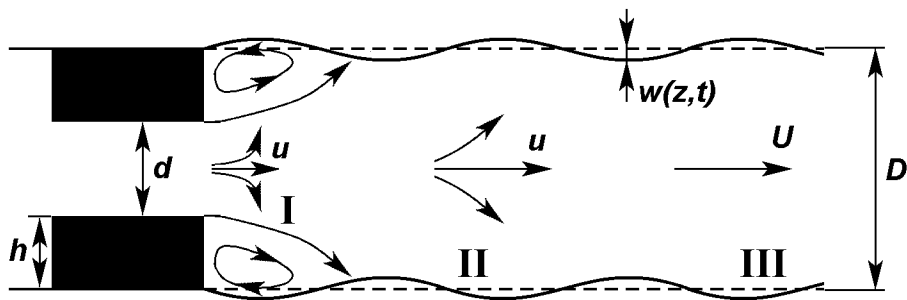


Рис. 5. Схематичне зображення великомасштабних вихорів у областях течії I і II в еластичному каналі

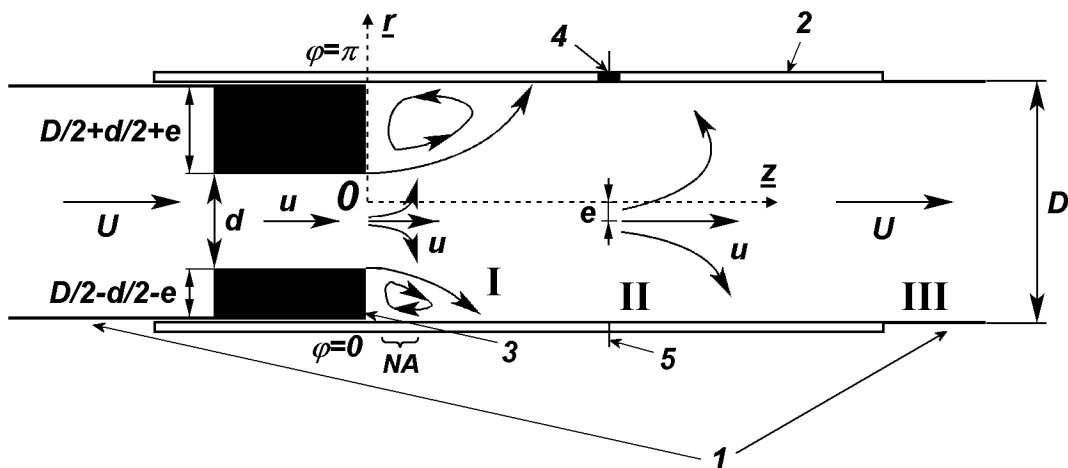


Рис. 6. Схема робочої ділянки експерименту у разі звуження з ексцентричною вставкою (позначення ті ж самі, що й на рис. 2)

- форма кривої  $P$  при зміні  $S$  залишається практично тою ж самою.

Окрім цього, спектр  $P$  виявляється приблизно удвічі чутливішим за тиск  $p_{rms}$  до змін ступеня звуження. Якісно схожі варіації у характеристиках поля  $p_t$  (включаючи й різну їхню чутливість) відбуваються і при зміні числа Рейнольдса  $Re_D = UD/\nu$  [6]. Водночас, зміна довжини звуження  $l$  спричиняє на тиск  $p_{rms}$  і рівні спектра  $P$  значно слабший, але обернений ефект: суттєве збільшення  $l$  зумовлює незначне зниження рівнів і навпаки. Форма ж спектра і положення всіх його максимумів залишаються практично незмінними. При віддаленні від звуження і переході з області I до області II загалом спостерігається зводиться до спадання спектральних рівнів і зменшення кількості низькочастотних максимумів (див. рис. 4).

## 1.2. Вплив жорсткості стінки каналу

Для з'ясування впливу жорсткості стінки каналу на поля течії й пульсацій пристінного тиску  $p_t$  за звуженням замість жорсткого на робочій ділянці експерименту використовувались еластичні канали. У результаті було встановлено [29], що значне зменшення стінки каналу спричиняє виникнення її коливань під дією тиску  $p_t$  (рис. 5). Це призводить до зміни структури потоку поблизу стінки у областях зворотного руху та приєднаної течії, а також до варіації розмірів відповідних великомасштабних вихорів на величину порядку  $w$ :

$$h \rightarrow h + w, \quad \frac{D}{2} \rightarrow \frac{D}{2} + w,$$

де  $w$  – прогин стінки. Як наслідок, змінюються частоти (5) і (6):

$$f_{ch}^{(2)} \rightarrow \frac{u_c}{h + w}, \quad f_{ch}^{(3)} \rightarrow \frac{u}{D/2 + w},$$

а відповідні максимуми  $P$  зміщуються.

Окрім цього, через трансформацію енергії поля  $p_t$  від його високочастотних до низькочастотних складових, дещо зростають тиск  $p_{rms}$  і рівні спектра  $P$  в області низьких частот. При цьому значно чутливішим до змін жорсткості стінки каналу виявляється  $p_{rms}$  [29]. Інші ж величини, які характеризують поля течії і тиску  $p_t$  за звуженням, при зменшенні жорсткості стінки залишаються практично незмінними. Мало змінюються також положення точки максимуму тиску і саме значення тиску в ній [29]:

$$\frac{L_{\max}}{d} \approx \alpha \text{Re}_d^{0.26} (D/d)^{1.25},$$

$$\frac{(p_{rms})_{\max}}{0.5\rho u^2} = K \quad \text{для} \quad \text{Re}_d \Rightarrow 9000$$

(тут  $\alpha \sim 0.119 \div 0.124$  і  $K \sim 0.059 \div 0.066$  – слабозмінювані функції властивостей стінки каналу, коефіцієнта калібрування вимірювальної системи тощо).

### 1.3. Вплив форми звуження

Для вивчення впливу форми звуження на досліджувані гідродинамічні поля на робочій ділянці експерименту, окрім концентричного ступінчатого, використовувались осесиметричні звуження більш згладжених форм [27] і ступінчаті звуження з ексцентриситетом  $e$  [26] (ексцентриситет є одним з основних параметрів, які характеризують ступінь відхилення форми від осової симетрії). Одержані при цьому дані співставлялися з відповідними величинами для осесиметричного ступінчатого звуження. У результаті було встановлено [26], що наявність ексцентриситету призводить до втрати течією і полем  $p_t$  осової симетрії в області  $NA$  безпосередньо за звуженням (рис. 6). Поза нею залежності полів течії й тиску  $p_t$  від кутової координати  $\phi$  швидко спадають і в області стабілізації течії III ці поля знову стають (у першому наближенні) осесиметричними. Водночас, область найбільш збуреної течії I+II стає трохи довшим у порівнянні з випадком осесиметричного ступінчатого звуження (див. оцінки (1)):

$$L_{I+II} < 7.5D,$$

а поздовжній розмір усієї області збурення I+II+III практично не змінюється:

$$L_{I+II+III} < 12D.$$

А. О. Борисюк

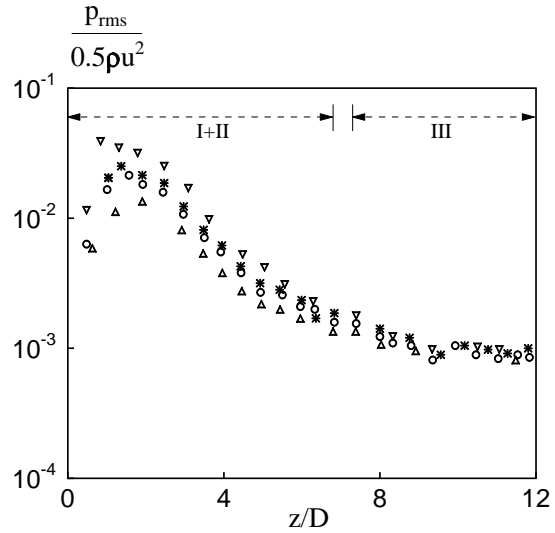


Рис. 7. Осевий розподіл тиску  $p_{rms}$  за вставкою ( $d=9$  мм,  $S=75\%$ ,  $U=0.25$  м/с,  $\text{Re}_D=4500$ ):

○ –  $e=0$ ; ▽ –  $e=2$  мм,  $\phi=0$ ;  
\* –  $e=2$  мм,  $\phi=\pi/3$  (для  $\phi=5\pi/3$  – аналогічно);  
△ –  $e=2$  мм,  $\phi=\pi$

Довжина області  $NA$  не перевищує приблизно шести з половиною діаметрів каналу:

$$L_{NA} < 6.5D.$$

Основа змінюваність тиску  $p_{rms}$  за ексцентричним звуженням у перерізі  $\phi = \text{const}$  загалом схожа на відповідну тенденцію для експерименту з осесиметричним звуженням того ж ступеня і довжини, а також при однаковому значенні числа Рейнольдса (рис. 7). Проте тепер як  $p_{rms}$ , так і  $z = L_{\max}$  залежать ще й від товщини звуження  $h(e, \phi) = \sqrt{D^2/4 + e^2} - De \cos \phi - d/2$ . Чим більшою/меншою  $e$   $h$  у перерізі  $\phi = \text{const}$ , тим меншою/більшою  $e$  там енергія течії біля стінки каналу і, відповідно, меншим/більшим  $e$  тиск  $p_{rms}$  у цьому перерізі. Точка ж  $z = L_{\max}$  при цьому розташовується далі від звуження чи ближче до нього.

Кількісні залежності відстані  $L_{\max}$  і тиску  $(p_{rms})_{\max}$  від параметрів експерименту при появі ексцентриситету звуження змінюються мало (порівняй з виразами (2) і (3)) [26]:

$$\frac{L_{\max}}{d} \approx \alpha(e, \phi) \text{Re}_d^{0.26} (D/d)^{1.25},$$

$$\frac{(p_{rms})_{\max}}{0.5\rho u^2} = K(e, \phi) \quad \text{для} \quad \text{Re}_d \Rightarrow 8650.$$

При появі ексцентриситету  $e \neq 0$  спектр  $P$  у області  $NA$  стає залежним від координати  $\phi$

9

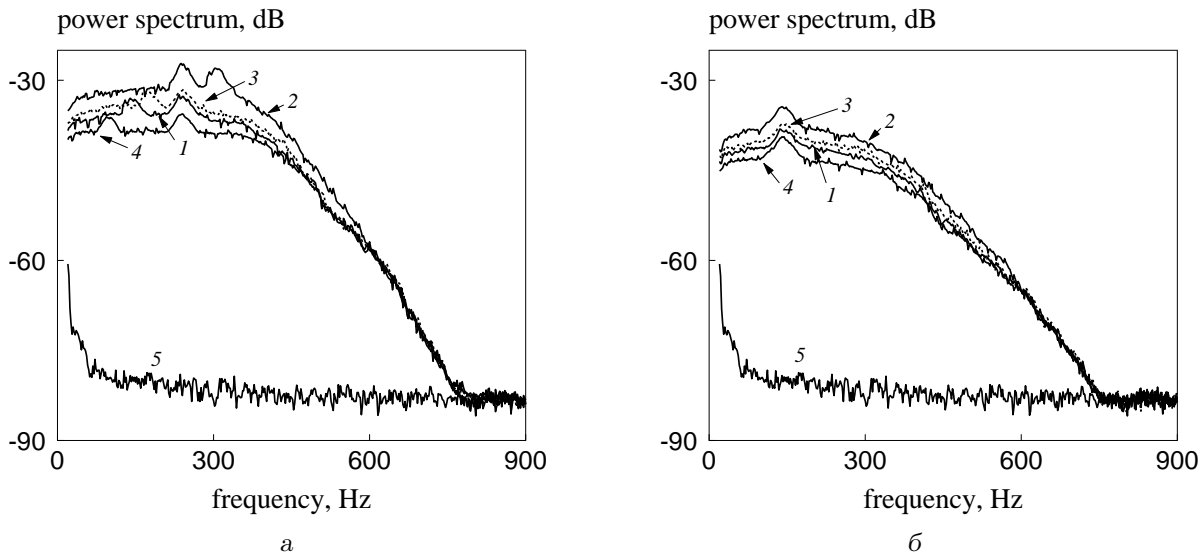


Рис. 8. Частотний спектр за вставкою  $d=10$  мм,  $S=69\%$  при швидкості  $U=0.35$  м/с,  $Re_D=6300$ :

а -  $z=L_{\max}$ , б -  $z=4D$ ;  
 1 -  $e=0$ ; 2 -  $e=2$  мм,  $\phi=0$ ; 3 -  $e=2$  мм,  $\phi=\pi/3$  (для  $\phi=5\pi/3$  - аналогічно);  
 4 -  $e=2$  мм,  $\phi=\pi$ ; 5 - оточуючий шум

(рис. 8) [26]. При цьому в кожному перерізі  $z=\text{const}$  його рівні загалом зростають/спадають зі зменшенням/збільшенням товщини звуження  $h$ . До того ж, внаслідок зміни структури потоку у областях зворотного руху та приєднаної течії при появі ексцентриситету, а також зміни розмірів відповідних великомасштабних вихорів (порівняй рис. 2 і 6), змінюються положення і/або форма максимумів спектра  $P$  в околах частот їх формування (5) і (6). Так, максимум в околі частоти (5) переміщається у положення

$$f_{ch}^{(2)} \rightarrow \frac{u_c}{h(e, \phi)},$$

а максимум частоти (6) стає трохи ширшим і визначається вже частотами порядку від  $u/(D/2+e)$  до  $u/(D/2-e)$ :

$$f_{ch}^{(3)} \rightarrow \frac{u}{D'/2}, \quad D/2 - e < D'/2 < D/2 + e.$$

Згладжування форми звуження (при незмінності його ступеня  $S$  і довжини  $l$ , а також числа  $Re_D$ ) приводить до зменшення ступеня збуреності течії за ним, а відтак, до загального зменшення тиску  $p_{rms}$  і рівнів спектра  $P$ . При цьому спектр  $P$  залишається набагато чутливішим до згладжування форми, ніж тиск  $p_{rms}$ . Положення ж точки максимуму тиску  $p_{rms}$  і значення  $(p_{rms})_{\max}$  у ній, кількість і положення низькочастотних максимумів у спектрі  $P$ , а також оцінки (1) для верхніх меж дов-

жин областей течії за звуженням і т. п. залишаються практично незмінними [27].

## 2. ГЕНЕРАЦІЯ ЗВУКУ ОБМЕЖЕНОЮ ОБЛАСТЮ ЗБУРЕНОЇ ТЕЧІЇ В КАНАЛІ

Як уже зазначено, існуючі теорії генерації звуку обмеженою областю збуреної течії в каналі [15–17] мають два суттєвих недоліки – у них не враховується вплив стінки каналу, яка зумовлює появу поверхневих диполів, і не береться до уваги ймовірна нерівномірність розподілу джерел звуку у зайнятих ними областях. У працях [28, 32] було розроблено відповідну теорію і встановлено кількісні зв'язки між характеристиками згенерованого акустичного поля та параметрами каналу й течії в ньому. Зокрема, розглянуто випадки, коли в акустичному полі домінують внески об'ємних квадруполів або поверхневих диполів. При цьому інтерес становили такі потоки й форми звужень каналів, при яких область збуреної за звуженням течії займають рівномірно розподілені великі або малі вихори. Для цих випадків було одержано відповідні спрощені вирази для акустичної енергії й проведено їх оцінки для характерних масштабів у області збурення. Нижче ми підсумуємо ці результати.

### 2.1. Теорія

Розглядається нескінченний прямий жорсткостінний канал кругового поперечного перерізу ра-

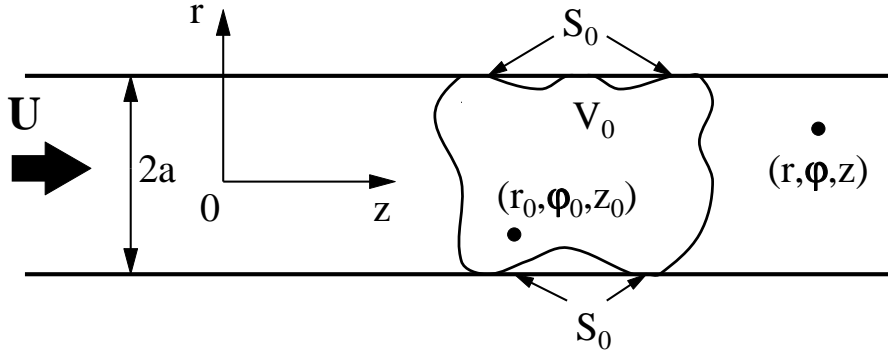


Рис. 9. Область збуреної течії: геометрія задачі

діусом  $a$ , в якому з осередненою осью швидкістю  $U$  тече рідина густиною  $\rho$  і в'язкістю  $\nu$  (рис. 9). Течія характеризується малим числом Маха  $M = U/c_0 \ll 1$  ( $c_0$  – швидкість звуку в незбуреній рідині). У скінченній області  $V_0$  течія збурена. Ця область створює в каналі акустичне поле, яке необхідно дослідити і встановити кількісний зв'язок між його характеристиками та параметрами каналу й потоку.

Згідно з теорією Лайтхіла [18–20], без втрати загальності вважається, що в'язкість рідини відіграє суттєву роль лише для області збурення, а згенерований звук поширюється в ідеальному стисливому середовищі. За цих умов шукане акустичне поле описується рівнянням Лайтхіла, в якому права частина містить як об'ємні квадрупольні  $\partial^2 T_{ij}/\partial y_i \partial y_j$ , так і зумовлені наявністю стінки каналу поверхневі дипольні  $\partial F_i/\partial y_i$  джерела [28]:

$$\frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho_a = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_i}, \quad (7)$$

$$0 < r < a, \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad |z| < \infty.$$

Граничними умовами є відсутність радіальної швидкості на стінці

$$\left. \frac{\partial p_a}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (8)$$

і умова випромінювання в нескінченність [28].

У рівняннях (7), (8) введено такі позначення:  $\rho_a$  і  $p_a$  – акустичні флуктуації густини й тиску, які зв'язані співвідношенням  $p_a = c_0^2 \rho_a$ ;  $T_{ij} \approx \rho u_i u_j$  та  $F_i = n_j (\tau_{ij} + p \delta_{ij})$  – напруження Лайтхіла та  $i$ -та компонента прикладених до стінки каналу сил ( $T_{ij}$  та  $F_i$  зникають відповідно за межами об'єму  $V_0$  і поверхні  $S_0$ , котра його обмежує);  $n_j$  –  $j$ -та компонента зовнішньої нормалі до стінки;  $\tau_{ij} = (2/3) \mu \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - 2 \mu \varepsilon_{ij}$  – дотичні напружен-

ня;  $\varepsilon_{ij} = (1/2)(\partial u_i/\partial y_j + \partial u_j/\partial y_i)$  – швидкості деформації;  $u_i$  –  $i$ -та компонента швидкості рідини;  $\mu = \rho \nu$  – її динамічна в'язкість;  $p$  – тиск;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Тут і далі передбачається підсумовування по індексах, що повторюються.

Сформульована задача розв'язується методом функцій Гріна. Її розв'язок для акустичних флуктуацій густини  $\rho_a$  має такий вигляд [28]:

$$\begin{aligned} \rho_a(\vec{r}, t) = & \int_0^\infty dt_0 \iiint_{V_0} \left( \frac{\partial^2 T_{ij}(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} \times \right. \\ & \times G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) dV_0(\vec{r}_0) + \\ & \left. + \int_0^\infty dt_0 \iint_{S_0} \frac{\partial F_i(\vec{r}_{0a}, t_0)}{\partial y_i} \times \right. \\ & \left. \times G(\vec{r}, t; \vec{r}_{0a}, t_0) dS_0(\vec{r}_{0a}), \right. \end{aligned}$$

де  $G$  – функція Гріна хвильового рівняння для зображеного на рис. 9 каналу. Вона записується у вигляді ряду по його акустичних модах  $\Psi_{nm} = \{\Psi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(2)}\}$  [28]:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = & -\frac{i}{4\pi c_0^2} \times \\ & \times \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \phi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \Psi_{nm}^{(j)}(r, \phi) \times \\ & \times \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ik_{nm}(z-z_0)}}{k_{nm}} e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega, \end{aligned}$$



$$\Psi_{nm}^{(1)}(r, \phi) = J_n(\alpha_{nm}r) \cos(n\phi),$$

$$\Psi_{nm}^{(2)}(r, \phi) = J_n(\alpha_{nm}r) \sin(n\phi),$$

$$\alpha_{nm} = \frac{\zeta_{nm}}{a}, \quad J'_n(\zeta_{nm}) = 0,$$

$$k_{nm} = \sqrt{k_0^2 - \alpha_{nm}^2}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c_0}.$$

Акустична енергія  $P_a$ , згенерована на частоті  $\omega$  нерівномірно розподіленими в об'ємі  $V_0$  квадрупольними і на поверхні  $S_0$  дипольними джерелами, дається таким виразом [28]:

$$\begin{aligned} P_a(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{nm}(\omega) = \\ &= \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4 \|\Psi_{nm}^{(q)}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \times \\ &\times \left[ \iiint_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \iiint_{V_0} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}'_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k \partial y'_l} \times \right. \\ &\quad \times \Psi_{nm}^{(q)}(r_0, \phi_0) \Psi_{nm}^{(q)}(r'_0, \phi'_0) \times \\ &\quad \times e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} (z'_0 - z_0)} dV_0(\vec{r}'_0) + \\ &\quad + \iint_{S_0} dS_0(\vec{r}_{0a}) \iint_{S_0} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\vec{r}_{0a}, \vec{r}'_{0a}, \omega)}{\partial y_i \partial y'_k} \times \\ &\quad \times \Psi_{nm}^{(q)}(a, \phi_0) \Psi_{nm}^{(q)}(a, \phi'_0) \times \\ &\quad \times e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} (z'_0 - z_0)} dS_0(\vec{r}'_{0a}) + \\ &\quad \left. + 2\text{Re} \left( \iiint_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \iint_{S_0} \frac{\partial^3 S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}'_{0a}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k} \times \right. \right. \\ &\quad \times \Psi_{nm}^{(q)}(r_0, \phi_0) \Psi_{nm}^{(q)}(a, \phi'_0) \times \\ &\quad \left. \left. \times e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} (z'_0 - z_0)} dS_0(\vec{r}'_{0a}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут

$$S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}'_0, \omega) \delta(\omega - \omega') = \langle \tilde{T}_{ij}^*(\vec{r}_0, \omega) \tilde{T}_{kl}(\vec{r}'_0, \omega') \rangle,$$

$$S_{ik}^F(\vec{r}_{0a}, \vec{r}'_{0a}, \omega) \delta(\omega - \omega') = \langle \tilde{F}_i^*(\vec{r}_{0a}, \omega) \tilde{F}_k(\vec{r}'_{0a}, \omega') \rangle,$$

$$S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}'_{0a}, \omega) \delta(\omega - \omega') = \langle \tilde{T}_{ij}^*(\vec{r}_0, \omega) \tilde{F}_k(\vec{r}'_{0a}, \omega') \rangle.$$

Якщо джерела звуку в зайнятих ними областях розташовані рівномірно, формула (9) спрощується

за рахунок спрощення виразів для спектрів  $S_{ijkl}^T$ ,  $S_{ik}^F$  і  $S_{ijk}^{TF}$ , які стають функціями лише відстані між джерелами і частоти [28]:

$$S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}'_0, \omega) = S_{ijkl}^T(\vec{\xi}, \omega),$$

$$S_{ik}^F(\vec{r}_{0a}, \vec{r}'_{0a}, \omega) = S_{ik}^F(\xi_{aa}, \omega),$$

$$S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}'_{0a}, \omega) = S_{ijk}^{TF}(\vec{\xi}_a, \omega),$$

де  $\vec{\xi} = \vec{r}'_0 - \vec{r}_0$ ,  $\xi_{aa} = \vec{r}'_{0a} - \vec{r}_{0a}$ ,  $\vec{\xi}_a = \vec{r}'_{0a} - \vec{r}_0$ .

Аналіз співвідношення (9) показує, що енергія  $P_a$  не залежить від осової координати  $z$ , а отже не спадає зі збільшенням відстані від джерел (це природно для жорсткості каналу, де немає втрат енергії). Крім того, вона дорівнює сумі енергій  $P_{nm}$  акустичних мод каналу. Енергія ж окремої моди  $P_{nm}$  складається з трьох доданків. Перший з них являє собою звукову енергію, згенеровану об'ємними квадрупольними, другий – енергію, випромінєну поверхневими дипольними, а третій зумовлений взаємодією квадрупольних і дипольних. Відносний внесок кожного з доданків у  $P_{nm}$  (а відтак, і в  $P_a$ ) залежить від числа Маха  $M$ . Якщо воно таке, що у згенерованому звуковому полі домінує внесок квадрупольних, то у виразі для  $P_{nm}$  залишається лише перший доданок. Коли ж домінують диполі, визначальним є другий доданок (умови, за яких можливе виникнення таких ситуацій на практиці, викладені в [32]).

При домінуванні в акустичному полі у каналі внесків різних типів джерел проявляється низка цікавих фізичних ефектів. Розглянемо їх.

## 2.2. Випадок домінування квадрупольних

У разі домінування внеску об'ємних квадрупольних, розташованих рівномірно в області збуреної течії  $V_0$ , вираз (9) для енергії  $P_a$  зводиться до [32]

$$\begin{aligned} P_a(\omega) &= \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4 \|\Psi_{nm}^{(q)}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \times \\ &\quad \times \iiint_{V_0} \Psi_{nm}^{(q)}(r_0, \phi_0) dV_0(\vec{r}_0) \times \\ &\quad \times \int_{z_{0i}-z_0}^{z_{0e}-z_0} e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} \xi_z} d\xi_z \times \\ &\quad \times \int_{-r_0}^{a-r_0} (r_0 + \xi_r) d\xi_r \int_{-\phi_0}^{2\pi-\phi_0} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{\xi}, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \times \\ &\quad \times \Psi_{nm}^{(q)}(r_0 + \xi_r, \phi_0 + \xi_\phi) d\xi_\phi \end{aligned} \quad (10)$$

(тут  $z_{0i}$  та  $z_{0e}$  – початкова та кінцева осьові координати області  $V_0$ ;  $\xi_z = z'_0 - z_0$ ,  $\xi_r = r'_0 - r_0$  і  $\xi_\phi = \phi'_0 - \phi_0$  – осьова, радіальна й кутова відстані між квадрупольними джерелами відповідно).

При аналізі співвідношення (10) інтерес становлять ситуації, коли область  $V_0$  займають великі або малі вихори [32].

### 2.2.1. Великі вихори

Нехай у області збуреної течії  $V_0$  домінують настільки великі вихори, що рух повністю корельований у поперечному перерізі каналу. Тоді вираз (10) значно спрощується [32]:

$$P_a(\omega) = P_{01}^{(1)}(\omega) = \frac{|V_0|}{4k_0\rho_0\omega} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 S_{zzzz}^T(\xi_z, \omega)}{\partial \xi_z^4} e^{-\text{sign}(z-z_0)ik_0\xi_z} d\xi_z \quad (11)$$

(тут  $|V_0|$  – об'єм області  $V_0$ ). Аналіз співвідношення (11) засвідчує, що у розглянутому випадку акустичне поле створюють лише поздовжні квадруполі  $\partial^2 T_{zz}/\partial z_0^2$ , осі яких паралельні до осі каналу. При цьому згенерований звук поширюється у вигляді плоскої хвилі зі швидкістю  $c_0$ .

Повна акустична енергія

$$\Pi_a = \int_{-\infty}^{\infty} P_a(\omega) d\omega,$$

випромінена цими джерелами, має вигляд [32]

$$\Pi_a = \frac{|V_0|}{4\rho_0 c_0^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 K_{zzzz}^T(\xi_z, \tau)}{\partial \tau^2} d\xi_z, \quad (12)$$

де  $K_{zzzz}^T(\xi_z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{zzzz}^T(\xi_z, \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega$  – кореляція напружень Лайтхіла  $T_{zz}$ , а  $\tau = \xi_z/c_0$  – час проходження звуковою хвилею осьової відстані  $\xi_z$  між квадрупольними.

Введемо в області  $V_0$  масштаби для довжини  $L_t = \alpha a$ , частоти  $f_t = \beta U/a$  і швидкості  $\gamma_t = u_t/U$  (де  $\alpha$  і  $\beta$  – коефіцієнти масштабів  $L_t$  і  $f_t$  відповідно, а  $u_t$  – характерна швидкість рідини в області  $V_0$ ). Проведення розмірного аналізу виразу (12) показує, що при домінуванні в області збуреної течії великих вихорів енергія акустичного випромінювання квадруполів у каналі пропорційна третьому степеневі числа Маха, а не п'ятому, як очікувалось

би з теорії генерації звуку вільною турбулентністю [18–20, 22, 32, 33]:

$$\Pi_a \sim \frac{|V_0|}{4a} \rho_0 U^3 M^3 \alpha \beta^2 \gamma_t^4, \quad \alpha \sim 1, \quad \beta \sim 1.$$

Така зміна характеру випромінювання квадрупольних джерел пояснюється впливом стінки каналу [32].

### 2.2.2. Малі вихори

При домінуванні в області збуреної течії  $V_0$  вихорів, малих у порівнянні з радіусом каналу, цікаво розглянути випадки низьких та високих частот. Низькими тут вважаються частоти, менші за всі критичні частоти каналу  $\omega_{nm} = c_0 \alpha_{nm}$ , окрім першої:  $0 < \omega < \omega_{nm}$ ,  $(n, m) \neq (0, 1)$ . Частоти, для яких всі акустичні моди каналу однорідні, є високими:  $\omega > \omega_{nm}$ ,  $n \geq 0$ ,  $m \geq 1$ ) [32].

У першому випадку співвідношення (10) набуває вигляду [32]

$$P_a(\omega) = P_{01}^{(1)}(\omega) \approx \frac{|V_0| \alpha^2}{\pi k_0 \rho_0 \omega} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{\xi}, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi_r = \xi_{r^*}, \xi_\phi = \xi_{\phi^*}} \times e^{-\text{sign}(z-z_0)ik_0\xi_z} d\xi_z, \quad \alpha \ll 1, \quad (13)$$

де  $\xi_{r^*}$  і  $\xi_{\phi^*}$  – точки з відрізків  $[0, \lambda_r]$  і  $[0, \lambda_\phi]$  відповідно, а  $\lambda_r$  і  $\lambda_\phi$  – довжини кореляцій у радіальному й азимутальному напрямках.

Аналіз виразу (13) і його співставлення з виразом (11) показує, що при домінуванні в області  $V_0$  малих вихорів згенерована квадрупольними на низьких частотах акустична енергія поширюється у вигляді плоскої хвилі зі швидкістю  $c_0$ . Проте, хоча тут внесок в акустичне поле роблять всі (а не лише поздовжні осьові) квадруполі, вона є малою величиною порядку  $\alpha^2$  ( $\alpha \ll 1$ ) від звукової енергії, згенерованої квадрупольними при домінуванні великих вихорів [32].

Оцінка для повної акустичної енергії  $\Pi_a$  виглядає наступним чином [32]:

$$\Pi_a \sim \frac{|V_0|}{\pi a} \rho_0 U^3 M^3 \alpha^3 \beta^2 \gamma_t^4, \quad (14)$$

$$M^3 \alpha^2 \sim M^5, \quad M \ll 1, \quad \alpha \ll 1.$$

Бачимо, що, як і у вільному просторі, інтенсивність акустичного випромінювання малих вихорів у каналі на низьких частотах визначається фактично п'ятим степенем числа Маха. Це свідчить про

відсутність істотного впливу стінки каналу на процес генерації звуку малими вихорами у вказаному діапазоні частот. Цей вплив проявляється лише у тонкому шарі безпосередньо біля стінки, товщина якого має порядок довжини кореляції в радіальному напрямку  $\lambda_r$  [32].

У разі високих частот внесок у відповідну область спектра  $P_a$  роблять усі квадруполі [32]:

$$P_a(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|V_0|}{2\pi a^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{\xi}, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} J_0(\alpha_{nm} \xi_r) \times \cos(n\xi_\phi) e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} \xi_z} \xi_r d\xi_r d\xi_\phi d\xi_z. \quad (15)$$

При цьому, на відміну від випадків великих вихорів та малих вихорів і низьких частот, звукове поле формує не лише перша, але всі акустичні моди каналу.

Інтегрування співвідношення (15) по частоті і введення в одержаний вираз масштабів збуреної течії  $L_t$ ,  $f_t$  і  $\gamma_t$  дає оцінку для енергії  $\Pi_a$  [32]:

$$\Pi_a \sim \frac{|V_0|}{\pi a} \rho_0 U^3 M^5 \alpha^3 \beta^4 \gamma_t^4, \quad \alpha \ll 1. \quad (16)$$

Йї аналіз показує, що у випадку малих вихорів і високих частот інтенсивність акустичного випромінювання квадруполів у каналі визначається п'ятим степенем числа Маха. Оскільки це відповідає оцінці акустичного випромінювання квадруполів у вільному просторі [18–20, 22, 33, 34], то можна твердити про незначний вплив стінки каналу на процес генерації звуку малими вихорами в ньому на високих частотах.

Співставлення ж оцінок (16) і (14), а також ураховання пропорційності

$$M^3 \alpha^2 \sim M^5, \quad M \ll 1, \quad \alpha \ll 1$$

вказує на те, що при домінуванні в області збуреної течії  $V_0$  малих вихорів згенерована квадрупольна енергія буде малою величиною порядку  $\alpha^2 \beta^2$  від енергії, згенерованої цими ж квадрупольними на низьких частотах [32].

### 2.3. Випадок домінування диполів

При домінуванні внеску диполів, розташованих рівномірно на поверхні  $S_0$ , вираз (9) для спектра

акустичної енергії  $P_a$  набуває вигляду [32]

$$P_a(\omega) = \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^2 J_n^2(\alpha_{nm} a)}{4 \|\Psi_{nm}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \times \int_0^{2\pi} \int_{z_{0i}}^{z_{0e}} b_q(n\phi_0) d\phi_0 dz_0 \times \int_{-\phi_0}^{2\pi-\phi_0} \int_{z_{0i}-z_0}^{z_{0e}-z_0} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\xi_\phi, \xi_z, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \times b_q(n(\phi_0 + \xi_\phi)) e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} \xi_z} d\xi_\phi d\xi_z, \quad (17)$$

де  $b_1(n\phi_0) = \cos(n\phi_0)$ ,  $b_2(n\phi_0) = \sin(n\phi_0)$ ,  $\partial S_{ik}^F / \partial \xi_r = 0$ .

Як і у підрозділі 2.2, розглянемо тут ситуації, коли область збуреної течії зайнято великомасштабними або дрібномасштабними вихоровими утвореннями.

#### 2.3.1. Великі вихори

Коли область  $V_0$  займають настільки великі вихрові утворення, що диполі повністю корельовані по колу  $r_0 = a$ , співвідношення (17) зводиться до [32]

$$P_a(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|S_0|}{2a k_{0m} \rho_0 \omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 S_{zz}^F(\xi_z, \omega)}{\partial \xi_z^2} \times e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{0m} \xi_z} d\xi_z, \quad (18)$$

(тут  $|S_0|$  – площа поверхні  $S_0$ ). Бачимо, що при домінуванні великих вихорів внесок в акустичне поле у каналі роблять лише осьові диполі  $\partial F_z / \partial z_0$ . При цьому основна частина їхнього внеску припадає на першу акустичну моду каналу  $\Psi_{01}^{(1)} = 1$ . Йї відповідає плоска звукова хвиля, котра поширюється зі швидкістю  $c_0$ .

Повна акустична енергія  $\Pi_a$ , згенерована дипольними  $\partial F_z / \partial z_0$ , дається виразом [32]

$$\Pi_a \approx \frac{|S_0|}{2a \rho_0 c_0} \int_{-\infty}^{\infty} K_{zz}^F(\xi_z, \tau) d\xi_z$$

(тут  $K_{zz}^F(\xi_z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{zz}^F(\xi_z, \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega$  – кореляція сил  $F_z$ , а  $\tau = \xi_z / c_0$  – час проходження звуковою хвилею осьової відстані  $\xi_z$  між дипольними джерелами). Цей вираз пропорційний третьому степеневі числа Маха [32]:

$$\Pi_a \sim \frac{|S_0|}{2} \rho_0 U^3 M^3 \alpha \gamma_t^4, \quad \alpha \sim 1. \quad (19)$$

Маємо класичну кубічну залежність інтенсивності акустичного випромінювання диполів від числа Маха [21, 22, 33, 34].

### 2.3.2. Малі вихори

Якщо область збурення  $V_0$  зайнята в основному вихорами, малими у порівнянні з радіусом каналу, то межі інтегрування по  $\xi_\phi$  та  $\xi_z$  у формулі (17) можна розширити від  $-\infty$  до  $\infty$  і розглянути випадки низьких та високих частот [32].

У першому випадку співвідношення (17) переписується наступним чином [32]:

$$P_a(\omega) \approx \frac{|S_0|\alpha}{2\pi a k_0 \rho_0 \omega} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\xi_\phi, \xi_z, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \Big|_{\xi_\phi = \xi_{\phi^*}} \times e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_0 \xi_z} d\xi_z, \quad \alpha \ll 1. \quad (20)$$

де  $\xi_{\phi^*}$  – точка з відрізка  $[0, \lambda_\phi]$ ;  $\lambda_\phi$  – довжина кореляції в азимутальному напрямку.

Аналіз виразу (20) засвідчує, що при домінуванні малих вихорів внесок у низькочастотну область спектра  $P_a$  роблять всі диполі. Згенерована ними на частоті  $\omega$  звукова енергія поширюється у вигляді плоскої хвилі зі швидкістю  $c_0$  і є малою величиною порядку  $\alpha/\pi$  ( $\alpha \ll 1$ ) від звукової енергії (18), згенерованої диполями у разі домінування великих вихорів.

Оцінка для повної акустичної енергії  $\Pi_a$  фактично дається виразом (19), помноженим на  $\alpha/\pi$  [32]:

$$\Pi_a \sim \frac{|S_0|}{2\pi} \rho_0 U^3 M^3 \alpha^2 \gamma_t^4, \quad \alpha \ll 1. \quad (21)$$

Знову отримуємо класичну кубічну залежність від числа Маха [21, 22, 33, 34].

У випадку високих частот формула (17) набуває вигляду [32]

$$P_a(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|S_0|}{4\pi a \varepsilon_n k_{nm} \rho_0 \omega} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\xi_\phi, \xi_z, \omega)}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \cos(n\xi_\phi) \times e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} \xi_z} d\xi_\phi d\xi_z, \quad (22)$$

де

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{n}{\alpha_{nm} a} \right)^2 \right], & n \geq 1. \end{cases}$$

А. О. Борисюк

Аналіз співвідношення (22) показує, що у разі домінування в області  $V_0$  малих вихорів внесок у високочастотну область спектра  $P_a$  роблять усі диполі. При цьому звукове поле формується усіма акустичними модами каналу. Підстановка цієї формули в інтеграл для енергії  $\Pi_a$  і введення в одержаний вираз масштабів збуреної течії  $L_t, f_t$  і  $\gamma_t$  дозволяє одержати оцінку для  $\Pi_a$  [32]:

$$\Pi_a \sim \frac{|S_0|}{2\pi} \rho_0 U^3 M^3 \alpha^3 \beta \gamma_t^4, \quad \alpha \ll 1. \quad (23)$$

Бачимо, що і у випадку малих вихорів та високих частот згенерована диполями акустична енергія у каналі визначається третім степенем числа Маха. Проте вона є малою величиною порядку  $\alpha\beta$  ( $\alpha \ll 1$ ) порівняно з енергією диполів для малих вихорів та низьких частот (співстав оцінки (23) і (21)).

### 3. ГЕНЕРАЦІЯ ЗВУКУ ТЕЧІЄЮ В КАНАЛІ З ЛОКАЛЬНИМ ЗВУЖЕННЯМ

У вступі відзначалося, що, будучи взаємозв'язаними, гідродинамічні й акустичні поля у каналах зі звуженнями вивчалися в основному незалежно одне від одного. Тому існує потреба в розробленні підходів до спільного вивчення зазначених полів з метою одержання повнішої й достовірнішої інформації про їхню структуру та властивості.

Один з таких підходів запропоновано у працях [10, 31] на прикладі зв'язаної задачі генерації звуку течією в каналі з локальним осесиметричним звуженням. При цьому знайдені гідродинамічні параметри використовуються для опису джерел звуку. Для визначення поля течії й акустичного поля застосовуються методи функцій Гріна і власних функцій, а також розроблена в [28, 32] теорія (див. описується у попередній розділ). Одержані на основі цього підходу результати добре узгоджуються з відомими літературними даними.

Розглянемо нескінченний прямий жорсткостінний канал кругового поперечного перерізу радіусом  $a$  з осесиметричним звуженням довжиною  $l$ , яке описується функцією  $r_s(z) = a - \delta_s \cos(\pi z/l)$ ,  $|z| < l/2$  (рис. 10). У каналі з осередненою осью швидкістю  $U$  тече рідина, яка має густину  $\rho$  і в'язкість  $\nu$ . Число Маха вважаємо малим:  $M \ll 1$ . Звуження збурює течію і вона створює в каналі звукове поле. Необхідно дослідити залежність гідродинамічних і акустичних характеристик від параметрів звуження, каналу і незбуреного потоку.

Згідно з теорією Лайтхіла [18–20] без втрати загальності вважається, що в'язкість рідини відіграє суттєву роль лише в області збурення, а згенерований звук поширюється в ідеальному стисливому

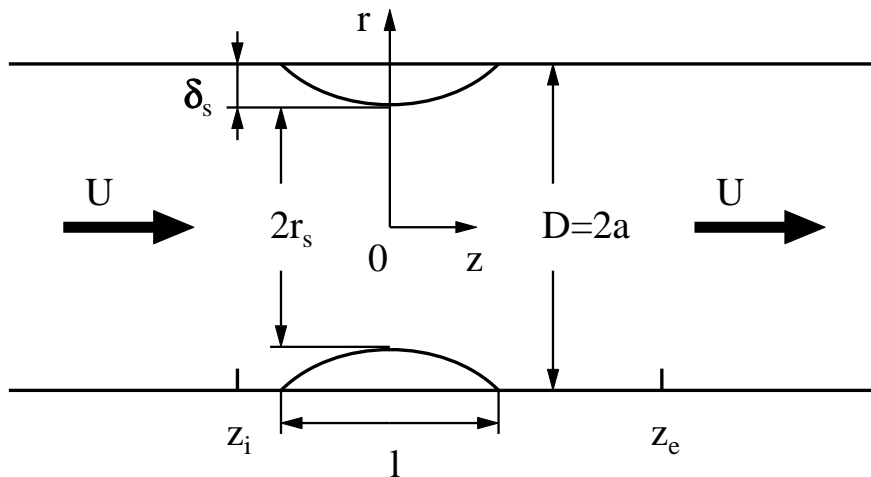


Рис. 10. Осесиметричне звуження: геометрія задачі

середовищі. За цих умов сформульована задача розбивається на гідродинамічну й акустичну частини, зв'язані між собою через квадрупольні та дипольні джерела звуку [31].

Гідродинамічна частина задачі описується рівняннями нерозривності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial y_i} = 0 \quad (24)$$

та кількості руху

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial y_i}(\rho u_i u_j + p_{ij}) = 0. \quad (25)$$

За граничні умови виберемо наявність параболічного профілю швидкості перед і за областю збуреної звуженням течії, а також рівність нулеві швидкості течії на стінці каналу. Початкові ж умови полягають у відсутності руху рідини в момент часу  $t=0$  [31].

Акустична частина задачі описується рівнянням (7). Граничними умовами є рівність нулеві нормальної компоненти акустичної швидкості на стінці каналу (8) і умова випромінювання на нескінченність. Початкову умову складає відсутність акустичного випромінювання в момент часу  $t=0$  [31].

Відповідно до сформульованих початково-граничних задач, розв'язування розбивається на дві частини. Спочатку досліджується поле збуреної звуженням течії. Потім воно використовується для опису квадрупольних і дипольних джерел звуку при знаходженні акустичного поля у каналі [10, 31].

При дослідженні збуреної течії вважається, що вона осесиметрична, а рідина нестислива [10, 31]. За таких умов вводяться функція течії  $\Psi$  і завихореність  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \\ u_z &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\vec{\Omega} = \vec{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).$$

Це дозволяє звести рівняння (24), (25) до системи двох зв'язаних диференціальних рівнянь відносно функцій  $\Psi$  та  $\Omega$  [31]:

$$\begin{aligned} \nabla_{(r,z)}^2 \Psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= r \Omega, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(u_r \Omega)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z \Omega)}{\partial z} &= \\ &= \nu \left( \nabla_{(r,z)}^2 \Omega - \frac{\Omega}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

з відповідними початковими і граничними умовами

$$\begin{aligned} \Psi|_{t=0} &= 0, & \Omega|_{t=0} &= 0, \\ \Psi|_{z=z_i, z_e} &= U r^2 \left( \frac{r^2}{2a^2} - 1 \right), \\ \Omega|_{z=z_i, z_e} &= \frac{4Ur}{a^2}, \\ \Psi|_{r=R(z)} &= \Psi|_{r=a} = -\frac{Ua^2}{2}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=R(z)} &= 0, & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} \Big|_{r=R(z)} &= 0, \\ \Omega|_{r=R(z)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n^2}, \\ \Psi|_{r=0} &= 0, & \Omega|_{r=0} &= 0. \end{aligned}$$

Задача (27), (28) розв'язується чисельно по часу в контрольному об'ємі

$$z_i \leq z \leq z_e, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq R(z),$$

$$R(z) = \begin{cases} r_s(z), & |z| < l/2, \\ a, & |z| \geq l/2, \end{cases}$$

який співпадає з областю збуреної звуженням течії. Далі зі співвідношень (26) визначається розподіл швидкостей  $u_r$  і  $u_z$  у ньому.

Одержане поле швидкості дозволяє знайти тиск  $p$  у збуреній за звуженням течії ( $l/2 \leq z \leq z_e$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq r \leq a$ ). Для цього рівняння (25) перепишується у вигляді рівняння Пуассона [31]:

$$\begin{aligned} \nabla_{(r,z)}^2 p(r, z, t) &= -s(r, z, t), \\ s(r, z, t) &= \frac{\rho_0}{r} \times \\ &\times \left[ \frac{\partial^2 (ru_r^2)}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2 (ru_r u_z)}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 (ru_z^2)}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Інші маніпуляції зі співвідношенням (25) дають граничну умову для рівняння (29) [31]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho_0 \left[ \nu \nabla_{(r,z)}^2 u_r - \frac{\partial u_r}{\partial t} \right], \\ r &= a, \quad l/2 \leq z \leq z_e. \end{aligned} \quad (30)$$

Гранична задача (29), (30) розв'язується методом функцій Гріна [31, 35]

$$\begin{aligned} p(r, z, t) &= \\ &= \iiint_{V_0} G_p(r, \phi, z; r_0, \phi_0, z_0) s(r_0, z_0, t) dV_0 + \\ &+ \iint_{S_0} G_p(r, \phi, z; a, \phi_0, z_0) \frac{\partial p(a, z_0, t)}{\partial r_0} dS_0, \\ dV_0 &= r_0 dr_0 d\phi_0 dz_0, \quad dS_0 = a d\phi_0 dz_0, \end{aligned}$$

де функція Гріна  $G_p$  будується у вигляді ряду по власних функціях каналу  $\Phi_{nm} = \{\Phi_{nm}^{(1)}, \Phi_{nm}^{(2)}\}$ :

$$\begin{aligned} G_p(r, \phi, z; r_0, \phi_0, z_0) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_{nm}^{(j)}(r_0, \phi_0)}{\|\Phi_{nm}^{(j)}\|^2} \Phi_{nm}^{(j)}(r, \phi) \times \\ &\times \frac{e^{-\beta_{nm}|z-z_0|}}{\beta_{nm}}, \end{aligned}$$

$$\Phi_{nm}^{(1)}(r, \phi) = J_n(\beta_{nm} r) \cos(n\phi),$$

$$\Phi_{nm}^{(2)}(r, \phi) = J_n(\beta_{nm} r) \cos(n\phi),$$

$$\beta_{nm} = \frac{\zeta_{nm}}{a}; \quad J'_n(\zeta_{nm}) = 0.$$

Тоді шуканий тиск  $p$  дається виразом [31]

$$\begin{aligned} p(r, z, t) &= \frac{1}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_{0m} r)}{J_0^2(\beta_{0m} a)} \frac{1}{\beta_{0m}} \times \\ &\times \left[ \int_{l/2}^{z_e} e^{-\beta_{0m}|z-z_0|} dz_0 \int_0^a J_0(\beta_{0m} r_0) \times \right. \\ &\times s(r_0, z_0, t) r_0 dr_0 + a J_0(\beta_{0m} a) \times \\ &\times \left. \int_{l/2}^{z_e} \frac{\partial p(r_0, z_0, t)}{\partial r_0} \Big|_{r_0=a} e^{-\beta_{0m}|z-z_0|} dz_0 \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

При знаходженні акустичного поля в каналі зроблено кілька спрощувальних припущень [10, 31].

- По-перше, воно вважалось осесиметричним.

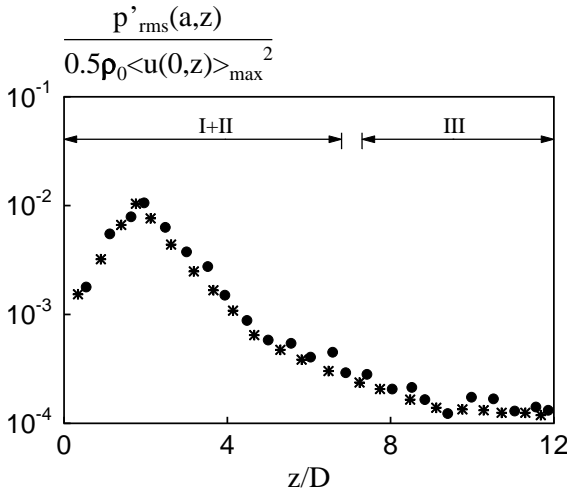


Рис. 11. Осевий розподіл тиску  $p_{rms}$  на стінці каналу  $r=a$  у збуреній за звуженням течії при  $Re_D = 1980$  ( $U=0.11$  м/с),  $S=96\%$  ( $\delta_s=4a/5$ ),  $l=4a$  [31]:  
\* – розрахунок, ● – експеримент

- По-друге, до уваги брались лише найінтенсивніші джерела звуку, які розташовані за звуженням ( $l/2 \leq z \leq z_e$ ), і займають значно більший/більшу об'єм/площу порівняно зі значно слабшими джерелами, розташованими перед звуженням ( $z_i \leq z \leq -l/2$ ) і в ньому ( $-l/2 < z < l/2$ ).
- По-третє, у досліджуваному випадку малих чисел Маха джерела звуку апроксимувались параметрами нестисливої рідини:

$$T_{ij} \approx \rho_0 U_i U_j,$$

$$F_i \approx n_j \left( P \delta_{ij} - \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial y_j} + \frac{\partial U_j}{\partial y_i} \right) \right),$$

де  $(U_1, U_2, U_3) = (u_r, u_\phi, u_z)$  і  $P = p(r, z, t)$  – компоненти швидкості і тиск, які визначаються зі співвідношень (26) і (31) відповідно ( $U_2 = u_\phi = 0$ ).

Далі застосовувалась описана у розділі 2 теорія, яка дозволяє встановити кількісні зв'язки між характеристиками акустичного поля та параметрами течії, каналу і звуження. Зокрема, вираз для згенерованої на частоті  $\omega$  акустичної енергії  $P_a$  має

вигляд [10, 31]

$$P_a(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m(\omega) = \frac{\pi}{a^2 \rho_0 \omega} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{J_0^2(\alpha_{0m} a)} \times$$

$$\times \frac{1}{k_{0m}} \left[ \int_{0}^a \int_{l/2}^{z_e} J_0(\alpha_{0m} r_0) r_0 dr_0 dz_0 \times \right.$$

$$\times \int_{0}^a \int_{l/2}^{z_e} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(r_0, z_0, r'_0, z'_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k \partial y'_l} \times$$

$$\times J_0(\alpha_{0m} r'_0) e^{-ik_{0m}(z'_0 - z_0)} r'_0 dr'_0 dz'_0 +$$

$$+ a^2 J_0^2(\alpha_{0m} a) \int_{l/2}^{z_e} dz_0 \int_{l/2}^{z_e} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(a, z_0, a, z'_0, \omega)}{\partial y_i \partial y'_k} \times$$

$$\times e^{-ik_{0m}(z'_0 - z_0)} dz'_0 + 2a J_0(\alpha_{0m} a) \times$$

$$\times \text{Re} \left( \int_{0}^a \int_{l/2}^{z_e} J_0(\alpha_{0m} r_0) r_0 dr_0 dz_0 \times \right.$$

$$\left. \times \int_{l/2}^{z_e} \frac{\partial^3 S_{ijk}^{TF}(r_0, z_0, a, z'_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k} e^{-ik_{0m}(z'_0 - z_0)} dz'_0 \right) \Big],$$

а наближена кількісна оцінка для спектра (32) записується наступним чином [7, 8, 25, 30]:

$$P_a \approx K_a \left( \frac{D}{d_{\min}} \right)^8 \text{Re}_D^{4.4} =$$

$$= K_a \left( \frac{D}{2(a - \delta_s)} \right)^8 \text{Re}_D^{4.4}. \tag{33}$$

Оцінка (32) говорить про те, що інтенсивність згенерованого локально звуженим каналом шуму приблизно пропорційна четвертому степеневі числа Рейнольдса  $Re_D$  і восьмому степеневі відношення діаметрів незвуженої та максимально звуженої ділянок каналу.

Записуючи на основі виразу (33) відношення інтенсивностей шуму, згенерованого двома звуженнями різного ступеня, одержуємо оцінку

$$\frac{P_a^{(1)}}{P_a^{(2)}} \approx \left( \frac{d_{2\min}}{d_{1\min}} \right)^8.$$

Її аналіз показує, що менш як дворазове зменшення площі поперечного перерізу звуження ( $d_{2\min}^2/d_{1\min}^2 \approx 1.78$ ) викликає збільшення інтенсивності згенерованого звуженим каналом шуму на порядок.

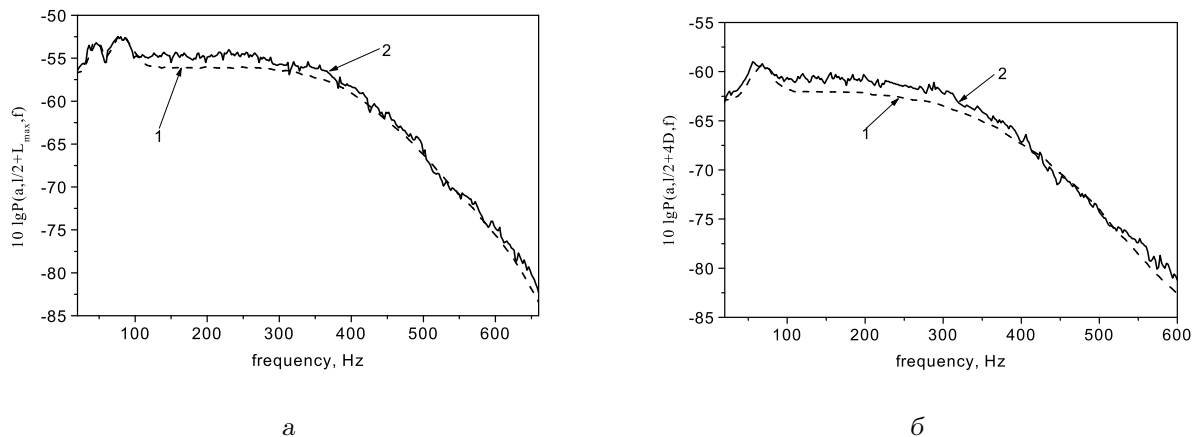


Рис. 12. Частотний спектр пульсацій гідродинамічного тиску на стінці каналу  $r=a$  у точках  $z-l/2=L_{\max}$  (а) і  $z-l/2=4D$  (б) за локальним звуженням при  $Re_D=1800$  ( $U=0.1$  м/с),  $S=69\%$  ( $\delta_s=4a/9$ ),  $l=2a$  [31]:  
1 – розрахунок, 2 – експеримент

Проведені на основі одержаних співвідношень розрахунки характеристик збуреної звуженням течії й акустичного поля добре узгоджуються з відповідними дослідними даними [31]. Зокрема, це стосується наведених у першому розділі даних щодо областей течії I–III за звуженням каналу та осьового розподілу тиску  $p_{rms}$  в них (рис. 11), локальних особливостей спектра  $P$  та їхнього зв'язку з вихровими утвореннями (рис. 12) тощо. Окрім іншого, в розрахованих кореляційно-спектральних характеристиках акустичного поля виявляються характерні акустичні ознаки наявності звуження в каналі, знайдені й експериментальним шляхом [7,8]. Так, спостерігаються загальне зростання рівнів спектра акустичної енергії й поява у ньому додаткових максимумів (нових частотних компонент), які визначаються частотами формування великомасштабних вихорів у області I+II (рис. 13). Така кореляція результатів розрахунку з відповідними дослідними даними дає підстави говорити про успішну апробацію розроблених методу й теорії та можливість їхнього подальшого застосування для розв'язання відповідних задач гідромеханіки й акустики [31].

## ВИСНОВКИ

1. Створено та обґрунтовано теоретично й експериментально математичну модель генерації і проходження звуку у каналах з локально нерегулярною геометрією, яка дозволяє встановлювати необхідні зв'язки між характеристиками гідродинамічних і акустичних полів у каналах, а також проводити їхні кількісні оцінки

для типових значень параметрів течії, каналу й нерегулярності його геометрії.

## 2. У рамках створеної моделі

- досліджено вплив форми й геометричних параметрів нерегулярності геометрії каналу, механічних властивостей його стінки й витратних характеристик течії на поле пульсацій тиску за нерегулярністю, а також на акустичне поле у каналі; одержані відповідні співвідношення та кількісні оцінки для кореляційно-спектральних характеристик цих полів;
- у характеристиках акустичного поля та поля пульсацій пристінного тиску виявлено ознаки, які вказують на наявність локальної нерегулярності геометрії в каналі; встановлено їхній зв'язок з параметрами течії, каналу й нерегулярності;
- встановлено, що спектральні характеристики акустичного поля та поля пульсацій пристінного тиску значно чутливіші за їх просторові характеристики до локальних змін геометрії каналу, механічних властивостей його стінки й витратних характеристик течії.

3. Розроблено теорію генерації звуку обмеженою областю збуреної течії у нескінченному прямому жорсткостінному каналі, яка враховує наявність диполів на його стінці і найбільш імовірний нерівномірний характер розподілу квадрупольних і дипольних джерел звуку у



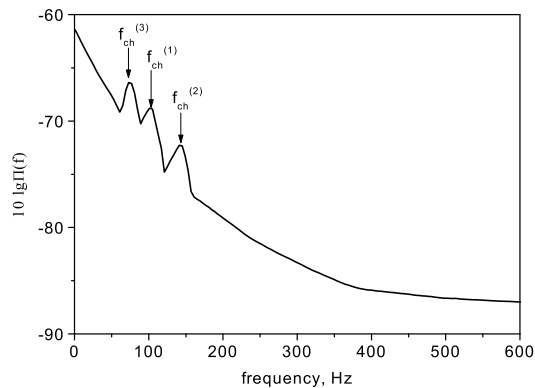


Рис. 13. Спектр  $P_a(f)$  акустичної енергії, згенерованої збуреною за звуженням течією при  $Re_D = 1575$  ( $U = 0.35$  м/с),  $S = 44\%$  ( $\delta_s = a/4$ ),  $l = 2a$  [31]

зайнятих ними областях. На цій основі одержані вирази й оцінки, які кількісно описують співвідношення між внесками різних джерел в акустичне поле для випадків нерівномірного та рівномірного їх розподілу, а також для типових значень параметрів каналу і потоку та характерних масштабів у області збурення.

4. Розроблено аналітично-чисельний метод розв'язання зв'язаних задач акустичного випромінювання течій у каналах з локальними звуженнями. У ньому для знаходження поля течії використовуються методи функцій Гріна і власних функцій, а для визначення акустичного поля – оригінальна теорія.
5. Розв'язано задачу генерації звуку стаціонарною течією у нескінченному прямому жорсткостинному каналі кругового поперечного перерізу з локальним осесиметричним звуженням і одержано аналітичні вирази для розрахунку гідродинамічних і акустичних характеристик течії. Для типових значень параметрів течії, каналу і звуження ці результати добре узгоджуються з відповідними експериментальними даними.
1. Lees R. S., Dewey C. F., Jr. Phonoangiography: A new noninvasive diagnostic method for studying arterial disease // Proc. Nat. Acad. Sci.– 1970.– **67**.– P. 935–942.
2. Young D. F. Fluid mechanics of arterial stenosis // J. Biomech. Engng.– 1979.– **101**.– P. 157–175.
3. Миролюбов С. Г. Гидродинамика стеноза // Современ. пробл. биомех.– 1983.– **1**.– С. 73–136.

4. Berger S. A., Jou L.-D. Flows in stenotic vessels // Ann. Rev. Fluid Mech.– 2000.– **32**.– P. 347–382.
5. Clark C. The fluid mechanics of aortic stenosis. 1. Theory and steady flow experiments // J. Biomech.– 1976.– **9**.– P. 521–528.
6. Борисюк А. О. Експериментальне дослідження пристінного тиску в трубі за стенозом // Акуст. вісн.– 2002.– **5**, N 1.– С. 13–21.
7. Борисюк А. А. Моделирование генерации шума стенозом в сосуде // Акуст. вісн.– 2000.– **3**, N 2.– С. 3–18.
8. Borisyuk A. O. Experimental study of noise produced by steady flow through a simulated vascular stenosis // J. Sound Vib.– 2002.– **256**.– P. 475–498.
9. Clark C. Turbulent wall pressure measurements in a model of aortic stenosis // J. Biomech.– 1977.– **10**.– P. 461–472.
10. Борисюк А. О. Дослідження поля течії і акустичного поля у жорсткостинному каналі кругового поперечного перерізу з локальним осесиметричним звуженням. Частина 2. Чисельні результати // Акуст. вісн.– 2004.– **7**, N 3.– С. 28–38.
11. Fredberg J. J. Origin and character of vascular murmurs: Model studies // J. Acoust. Soc. Amer.– 1977.– **61**.– P. 1077–1085.
12. Tobin R. J., Chang I. D. Wall pressure spectra scaling downstream of stenoses in steady tube flow // J. Biomech.– 1976.– **9**.– P. 633–640.
13. Kim B., Corcoran W. K. Experimental measurement of turbulence spectra distal to stenosis // J. Biomech.– 1974.– **7**.– P. 335–342.
14. Abdallah S. A., Hwang N. H. C. Arterial stenosis murmurs: An analysis of flow and pressure fields // J. Acoust. Soc. Amer.– 1988.– **83**, N 1.– P. 318–334.
15. Davies H. G., Ffowcs Williams J. E. Aerodynamic sound generation in a pipe // J. Fluid Mech.– 1968.– **32**, N 4.– P. 765–778.
16. Doak P. E. Excitation, transmission and radiation of sound from source distributions in hard-walled ducts of finite length. (1): The effects of duct cross-section geometry and source distribution space-time pattern // J. Sound Vib.– 1973.– **31**.– P. 1–72.
17. Michalke A. On the propagation of sound generated in a pipe of circular cross-section with uniform mean flow // J. Sound Vib.– 1989.– **134**.– P. 203–234.
18. Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. 1. General theory // Proc. Roy. Soc. London.– 1952.– **A211**.– P. 564–587.
19. Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. 2. Turbulence as a source of sound // Proc. Roy. Soc. London.– 1954.– **A221**.– P. 1–32.
20. Lighthill M. J. Sound generated aerodynamically // Proc. Roy. Soc. London.– 1962.– **A267**.– P. 147–182.
21. Curle N. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound // Proc. Roy. Soc. London.– 1955.– **A231**.– P. 505–514.
22. Blake W. K. Mechanics of flow-induced sound and vibration: in 2 vols.– New York: Academic Press, 1986.– 974 p.
23. Hardin J. C., Pope D. S. Sound generation by a stenosis in a pipe // AIAA J.– 1992.– **30**.– P. 312–317.
24. Borisyuk A. O. Modelling of the acoustic properties of a larger human blood vessel // Акуст. вісн.– 1998.– **1**, N 3.– С. 3–13.

25. *Borisyuk A. O.* Noise field in the human chest due to turbulent flow in a larger blood vessel // *Flow, Turbul. Combust.*– 1999.– **61**.– P. 269–284.
26. *Борисюк А. О.* Експериментальне дослідження пристінного тиску в трубі за циліндричною вставкою з ексцентриситетом // *Акуст. вісн.*– 2002.– **5**, N 2.– С. 3–12.
27. *Борисюк А. О.* Експериментальне дослідження пульсацій пристінного тиску в трубі за локальними осесиметричними звуженнями різних форм // *Доп. НАН України.*– 2003.– N 10.– С. 45–51.
28. *Борисюк А. О.* Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Частина 1. Загальна теорія // *Акуст. вісн.*– 2003.– **6**, N 3.– С. 3–9.
29. *Борисюк А. О.* Експериментальне дослідження пульсацій пристінного тиску в еластичній трубі за локальним осесиметричним звуженням // *Акуст. вісн.*– 2003.– **6**, N 4.– С. 19–26.
30. *Borisyuk A. O.* Model study of noise field in the human chest due to turbulent flow in a larger blood vessel // *J. Fluids Struct.*– 2003.– **17**.– P. 1095–1110.
31. *Борисюк А. О.* Дослідження поля течії і акустичного поля у жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу з локальним осесиметричним звуженням. Частина 1. Теорія // *Акуст. вісн.*– 2004.– **7**, N 1.– С. 19–29.
32. *Борисюк А. О.* Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Частина 2. Частинні випадки // *Акуст. вісн.*– 2004.– **7**, N 4.– С. 10–20.
33. *Howe M. S.* Acoustics of fluid-structure interaction.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.– 560 p.
34. *Dowling A. P., Ffowcs Williams J. E.* Sound and sources of sound.– New York: Ellis Horwood, 1983.– 238 p.
35. *Morse P. M., Feshbach H.* Methods of theoretical physics: vol. 1.– New York: McGraw-Hill, 1953.– 997 p.

## ДОДАТОК. УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$(r, \phi, z)$	– циліндричні координати;	$\delta_s$	– калльного звуження каналу;
$a, D$	– радіус і діаметр поперечного перерізу каналу;	$V_0$	– параметр форми локального звуження каналу;
$d(z)$	– діаметр локального звуження каналу;	$S_0$	– область збуреної течії;
$d_{\min}$	– мінімальний діаметр локального звуження каналу;	$\rho$	– поверхня, що оточує область $V_0$ ;
$S$	– ступінь локального звуження каналу;	$\rho_0$	– густина рідини;
$l$	– довжина локального звуження каналу;	$\rho_a$	– густина незбуреної рідини;
$r_s$	– функція, яка описує геометрію локального звуження каналу;	$\nu$	– акустичні флуктуації густини;
		$\mu$	– кінематична в'язкість рідини;
		$U$	– динамічна в'язкість рідини;
		$u$	– осереднена осьова швидкість незбуреної звуженням течії;
		$Re_D$	– осереднена осьова швидкість течії у звуженні;
		$Re_d$	– число Рейнольдса незбуреної звуженням течії;
		$u_i, u_r, u_z$	– число Рейнольдса струменя;
		$U_i$	– компоненти швидкості течії;
		$p_{ij}$	– компоненти швидкості нестисливої рідини;
		$\tau_{ij}$	– напруження;
		$T_{ij}$	– дотичні напруження;
		$p_t$	– напруження Лайтхіла;
		$p_{rms}$	– пульсації тиску на стінці;
		$p_a$	– середньоквадратичне значення тиску $p_t$ ;
		$\Omega$	– акустичні флуктуації тиску;
		$\Psi$	– завихореність;
		$z_i, z_0$	– функція течії;
		$c_0$	– вхідний та вихідний перерізи контрольного об'єму;
		$k_0$	– швидкість звуку в незбуреному середовищі;
		$\alpha_{nm}, \beta_{nm}$	– акустичне хвильове число;
		$k_{nm}$	– радіальні хвильові числа;
		$L_{\max}$	– осьові хвильові числа;
		$(p_{rms})_{\max}$	– відстань від локального звуження каналу до точки максимуму тиску $p_{rms}$ ;
		$\Phi_{nm}$	– максимальний тиск $p_{rms}$ ;
		$\Psi_{nm}$	– власні функції каналу;
		$G_p, G$	– акустичні моди каналу;
		$P$	– функції Гріна;
		$P_a$	– частотний спектр пульсацій тиску $p_t$ ;
		$P_a$	– частотний спектр акустичної енергії;
		$P_a$	– повна акустична енергія.