

УДК 534.213:534.232.74

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРАХ. ЧАСТЬ 1. РАСЧЕТ АМПЛИТУДНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

О. Н. ПЕТРИЩЕВ

Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев

Получено 24.10.2006

Решена неоднородная граничная задача о возбуждении системой объемных и поверхностных нагрузок гармонических ультразвуковых волн в полых и сплошных изотропных цилиндрах кругового поперечного сечения. На основе полученных решений, представленных в форме разложений по нормальным волнам, построена математическая модель ультразвукового преобразователя электромагнитного типа. Исследованы особенности процесса возбуждения нормальных волн в металлических стержнях в широком диапазоне частот.

Розв'язано неоднорідну граничну задачу про збудження системою об'ємних і поверхневих навантажень гармонічних ультразвукових хвиль у порожнистих і суцільних ізотропних циліндрах кругового поперечного перерізу. На основі отриманих розв'язків, представлених у формі розкладів за нормальними хвилями, побудовано математичну модель ультразвукового перетворювача електромагнітного типу. Досліджені особливості процесу збудження нормальних хвиль у металевих стержнях у широкому діапазоні частот.

The paper deals with solving the non-uniform boundary problem on exciting the harmonic ultrasonic waves in the hollow and solid isotropic cylinders with the circular cross-section by a system of volume and surface loads. The mathematical model of the electromagnetic ultrasonic transducer has been developed on the basis of expansion in terms of the normal waves. The peculiarities of the normal wave excitation process in the metal rods have been studied in a wide frequency range.

ВВЕДЕНИЕ

Электромагнитный (бесконтактный) способ возбуждения ультразвуковых волн в металлических цилиндрах используется при неразрушающем тестировании стержней и труб [1], в ультразвуковых первичных преобразователях систем электрического измерения неэлектрических величин [2, 3], лабораторных макетах и установках по изучению материальных констант металлов [4, 5].

Неразрушающий контроль металлических изделий предполагает достоверную фиксацию самого факта присутствия или отсутствия дефекта. При этом, естественно, пытаются реализовать условия, при которых достоверно определяются дефекты минимальных размеров. Последнее становится возможным лишь при использовании высокочастотных (коротковолновых) излучателей и приемников ультразвуковых волн.

При разработке ультразвуковых трактов первичных преобразователей систем электрического измерения неэлектрических величин на первый план выходит точность первичного преобразова-

ния физической характеристики. В этой группе устройств измеряемая величина (сила, давление, момент сил, крутящий момент) трансформируется в перемещение, и строго пропорционально ему изменяется расстояние между излучателем и приемником ультразвуковых импульсов. В первом приближении можно говорить, что измеряемые механические величины (в том числе, линейные и угловые перемещения, скорости и ускорения) преобразуются в интервал, длительность которого равна времени, за которое ультразвуковой импульс пробегает расстояние между излучателем и приемником. Точность преобразования при этом определяется степенью линейности зависимости между временем распространения и расстоянием, пройденным ультразвуковым импульсом. В действительности время распространения ультразвукового импульсного сигнала достаточно сложным нелинейным образом зависит от пройденного им пути. Этот феномен был замечен еще при конструировании многоотводных линий задержки электрических сигналов [6]. Как проблема прикладного характера этот факт обсуждался

в статье [7]. Основными причинами того, что скорость распространения ультразвукового импульса (волнового пакета) зависит от величины пройденного им расстояния, являются частотная дисперсия скоростей распространения отдельных его спектральных составляющих и частотно-зависимое внутреннее трение, которое в той или иной степени присуще всем без исключения материалам. Уровень проявления дисперсионных искажений определяется шириной полосы частот, в пределах которой происходит эффективное возбуждение ультразвуковых волн, т. е. параметрами частотной характеристики ультразвукового излучателя.

Математическое моделирование ультразвуковых трактов лабораторных макетов для экспериментального исследования физико-механических параметров материалов практически не отличается по целевым установкам от теоретических исследований первичных преобразователей. Причина такого совпадения очевидна – основными информационными параметрами в ультразвуковых исследованиях материальных констант являются амплитудные значения, скорость распространения ультразвукового импульса и коэффициент затухания. Адекватная реальному объекту математическая модель ультразвукового преобразователя электромагнитного типа позволяет исключить из результатов измерения скоростей и коэффициентов затухания эффекты, вносимые измерительным прибором, т. е. ультразвуковым трактом, что резко увеличивает практическую и научную ценность экспериментальных данных.

Приведенных примеров вполне достаточно для вывода о практической значимости математических моделей ультразвуковых преобразователей вообще и, в частности, ультразвуковых преобразователей электромагнитного типа, применяющихся для бесконтактного возбуждения упругих волн в металлических стержнях.

Несмотря на то, что достаточно регулярно появляются публикации, в которых описываются практические применения преобразователей электромагнитного типа для возбуждения и приема упругих волн в металлических стержнях (см., например, [8–10]), можно утверждать, что в настоящее время отсутствуют аналитические конструкции, которые бы позволили выполнять расчет их частотных характеристик. В работе [11] показано, что теоретической основой для построения математических моделей преобразователей в режиме возбуждения ультразвуковых колебаний являются результаты решения соответствующей граничной задачи о возбуждении гармонических волн системой внешних сил, распределенных в объеме и

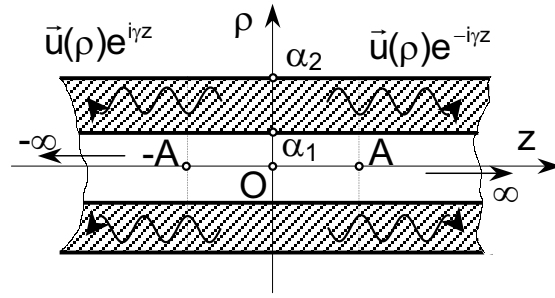


Рис. 1. К описанию нормальных волн в полой изотропном цилиндре

по поверхности некоторой области. Электромагнитный способ возбуждения ультразвуковых волн в цилиндрах стал практически значимым сравнительно недавно. Этим объясняется отсутствие публикаций, содержащих результаты решения данной граничной задачи. Незавершенность математических моделей ультразвуковых преобразователей электромагнитного типа и теоретической базы для их построения объясняет целевую установку данного исследования.

Целью статьи является решение задачи о возбуждении гармонических продольных волн в изотропных цилиндрах системой объемных и поверхностных нагрузок и построение на этой основе физически содержательной модели ультразвукового преобразователя электромагнитного типа.

1. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В БЕСКОНЕЧНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРАХ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Предположим, что полый изотропный цилиндр в области $-A \leq z \leq A$ (рис. 1) нагружен гармонически изменяющимися во времени по закону $e^{i\omega t}$ внешними силами ($i = \sqrt{-1}$; ω – круговая частота; t – время). Будем считать, что амплитуда гармонически изменяющегося во времени вектора объемной плотности \vec{f}^* внешних сил полностью определяется радиальной $f_\rho^*(\rho, z)$ и аксиальной $f_z^*(\rho, z)$ компонентами, которые не зависят от значений окружной координаты θ . На поверхностях $\rho = \alpha_k$ ($k=1, 2$) области нагружения $-A \leq z \leq A$ амплитудные значения внешних сил заданы поверхностными плотностями $\sigma_{\rho\beta}^*(\alpha_k, z)$ ($\beta = \rho, z, k=1, 2$), которые, подобно объемным нагрузкам, не зависят от окружной координаты ρ .

При выполнении последующих вычислений бу-

дем рассматривать левую и правую границы ($z = \mp A$) области нагружения не как фиксированное поперечное сечение, а как физическую бесконечность для расположенного в срединной части области источника внешних сил. Порядок величины параметра A определяется из условия существенной малости внешних сил в ближайшей окрестности плоскости $z = \mp A$ по сравнению с их значениями в центральной зоне области нагружения. Если в качестве источника деформаций металлического стержня используется переменное магнитное поле катушки, которая располагается на одной оси со стержнем, то на расстоянии трех длин катушки от плоскости зеркальной симметрии $z = 0$ напряженность переменного магнитного поля уменьшается более, чем на два порядка по сравнению с напряженностью в сечении $z = 0$. Поэтому величина A для этого источника имеет порядок трех длин катушки. На расстояниях свыше трех длин можно не учитывать возмущения деформированного состояния металлического стержня магнитным полем катушки и тем самым, фактически, декларировать, что источник возмущений находится бесконечно далеко от точки наблюдения.

В результате воздействия внешних силовых факторов $f_\beta^*(\rho, z)$ и $\sigma_{\rho\beta}^*(\alpha_k, z)$ ($\beta = \rho, z; k = 1, 2$) в металлическом стержне развиваются упругие смещения материальных частиц от положения равновесия. Вектор смещения $\vec{u}(\rho, z, t) = \vec{u}(\rho, z)e^{i\omega t}$ содержит компоненты $u_\rho(\rho, z)$ и $u_z(\rho, z)$, которые удовлетворяют уравнениям движения

$$(\lambda + 2G) \left(-\frac{1}{\rho^2} u_\rho + \frac{1}{\rho} u_{\rho,\rho} + u_{\rho,\rho\rho} + u_{z,z\rho} \right) - G(-u_{\rho,zz} + u_{z,z\rho}) + \rho_0 \omega^2 u_\rho = f_\rho^*(\rho, z), \quad (1)$$

$$(\lambda + 2G) \left(\frac{1}{\rho} u_{\rho,z} + u_{\rho,z\rho} + u_{z,zz} \right) - G \left(\frac{1}{\rho} u_{\rho,z} - \frac{1}{\rho} u_{z,\rho} + u_{\rho,\rho z} - u_{z,\rho\rho} \right) + \rho_0 \omega^2 u_z = f_z^*(\rho, z) \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\left[(\lambda + 2G) u_{\rho,\rho} + \lambda \left(\frac{1}{\rho} u_\rho + u_{z,z} \right) \right] \Big|_{\rho = \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{cases}} = \sigma_{\rho\rho}^*(\rho, z) \Big|_{\rho = \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{cases}}, \quad (3)$$

$$G(u_{z,\rho} + u_{\rho,z}) \Big|_{\rho = \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{cases}} = \sigma_{\rho z}^*(\rho, z) \Big|_{\rho = \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{cases}}. \quad (4)$$

В дифференциальных уравнениях (1)–(4), образующих неоднородную граничную задачу, приняты следующие обозначения: λ и G – модули упругости (константы Ламе); запятая в нижнем индексе означает дифференцирование выражения, стоящего до запятой, по координате, индекс которой проставлен после запятой; ρ_0 – плотность материала.

Прежде чем приступить к решению граничной задачи (1)–(4), определим собственные функции (нормальные волны) изотропного полого цилиндра. Если боковые поверхности цилиндра не контактируют с другими материальными объектами, то за пределами области нагружения могут существовать только те формы волновых движений, которые в объеме цилиндра удовлетворяют уравнениям (1) и (2) с нулевой правой частью, а на его поверхности – третьему закону Ньютона в дифференциальной форме, т. е. $\sigma_{\rho\rho}(\alpha_k, z) = \sigma_{\rho z}(\alpha_k, z) = 0$. Аналитическое описание нормальных волн наиболее эффективно реализуется путем представления вектора смещения через градиент скалярного и ротор векторного потенциалов. Руководствуясь изложенными в монографии [12] методиками и рекомендациями, можно записать следующие аналитические определения осесимметричных продольных волн в цилиндре:

$$u_\beta^0(\rho, z) = \begin{cases} U_\beta^{(-)}(\rho) e^{-i\gamma z}, & z > A, \\ U_\beta^{(+)}(\rho) e^{i\gamma z}, & z < -A. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\beta = \rho, z$; $u_\beta^0(\rho, z)$ – собственные функции или нормальные волны; $U_\beta^{(\pm)}(\rho)$ – распределение смещений по поперечному сечению цилиндра для волн, уходящих влево (знак плюс) и вправо (знак минус) от породившего их источника; γ – волновое число. Функции $U_\beta^{(\pm)}(\rho)$ определяются следующим образом:

$$U_\rho^{(\pm)}(\rho) = -\alpha A^{(\pm)} J_1(\alpha\rho) - \alpha B^{(\pm)} N_1(\alpha\rho) \pm \pm i\gamma C^{(\pm)} J_1(\beta\rho) \pm i\gamma D^{(\pm)} N_1(\beta\rho), \quad (6)$$

$$U_z^{(\pm)}(\rho) = \pm i\gamma A^{(\pm)} J_0(\alpha\rho) \pm i\gamma B^{(\pm)} N_0(\alpha\rho) - \beta C^{(\pm)} J_0(\beta\rho) - \beta D^{(\pm)} N^{(\pm)}(\beta\rho), \quad (7)$$

где $A^{(\pm)}$, $B^{(\pm)}$, $C^{(\pm)}$ и $D^{(\pm)}$ – константы; $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1; x = \alpha\rho, \beta\rho$) – функции Бесселя и Неймана; α и β – проекции волновых векторов \vec{k}_ℓ

и \vec{k}_s на радиальную ось; $|\vec{k}_\ell| = \omega/(v_\ell)$; $|\vec{k}_s| = \omega/v_s$; $v_\ell = \sqrt{(\lambda+2G)/\rho_0}$ и $v_s = \sqrt{G/\rho_0}$ – скорости невзаимодействующих между собой продольных и сдвиговых волн. При этом $\alpha^2 + \gamma^2 = k_\ell^2$ и $\beta^2 + \gamma^2 = k_s^2$.

Из граничных условий $\sigma_{\rho\rho}(\alpha_k, z) = \sigma_{\rho z}(\alpha_k, z) = 0$ следует, что на произвольно выбранной частоте ω в изотропном полем цилиндре существуют продольные осесимметричные смещения материальных частиц, определенные соотношениями (5)–(7), тогда и только тогда, когда волновые числа α , β и γ удовлетворяют условию

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} m_{11}^{(0)} & m_{12}^{(0)} & m_{13}^{(0)} & m_{14}^{(0)} \\ m_{21}^{(0)} & m_{22}^{(0)} & m_{23}^{(0)} & m_{24}^{(0)} \\ m_{31}^{(0)} & m_{32}^{(0)} & m_{33}^{(0)} & m_{34}^{(0)} \\ m_{41}^{(0)} & m_{42}^{(0)} & m_{43}^{(0)} & m_{44}^{(0)} \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

где

$$m_{j1}^{(0)} = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{2} J_0(\alpha\alpha_j) + \frac{\alpha}{\alpha_j} J_1(\alpha\alpha_j);$$

$$m_{j2}^{(0)} = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{2} N_0(\alpha\alpha_j) + \frac{\alpha}{\alpha_j} N_1(\alpha\alpha_j);$$

$$m_{j3}^{(0)} = i\gamma \left[-\frac{1}{\alpha_j} J_1(\beta\alpha_j) + \beta J_0(\beta\alpha_j) \right];$$

$$m_{j4}^{(0)} = i\gamma \left[-\frac{1}{\alpha_j} N_1(\beta\alpha_j) + \beta N_0(\beta\alpha_j) \right];$$

$$m_{q1}^{(0)} = -2i\gamma\alpha J_1(\alpha\alpha_j);$$

$$m_{q2}^{(0)} = -2i\gamma\alpha N_1(\alpha\alpha_j);$$

$$m_{q3}^{(0)} = -(\gamma^2 - \beta^2) J_1(\beta\alpha_j);$$

$$m_{q4}^{(0)} = -(\gamma^2 - \beta^2) N_1(\beta\alpha_j);$$

$$j = 1, 2; \quad q = j + 2.$$

Опираясь на условие существования продольных осесимметричных волн (8), можно установить аналитические связи между константами $A^{(\pm)}$, $B^{(\pm)}$, $C^{(\pm)}$ и $D^{(\pm)}$ и записать соотношения (6) и (7) с точностью до постоянного множителя $A^{(\pm)}$ (в дальнейшем будем называть его амплитудным множителем продольной волны) в следующем ви-

де:

$$U_\rho^{(\pm)}(\rho) = \alpha A_0^{(\pm)} \left[-J_1(\alpha\rho) - \frac{\Delta_{12}^{(0)}}{\Delta_{11}^{(0)}} N_1(\alpha\rho) + i \frac{\gamma \Delta_{13}^{(0)}}{\alpha \Delta_{11}^{(0)}} J_1(\beta\rho) + i \frac{\gamma \Delta_{14}^{(0)}}{\alpha \Delta_{11}^{(0)}} N_1(\beta\rho) \right], \quad (9)$$

$$U_z^{(\pm)}(\rho) = \pm i \gamma A_0^{(\pm)} \left[J_0(\alpha\rho) + \frac{\Delta_{12}^{(0)}}{\Delta_{11}^{(0)}} N_0(\alpha\rho) + i \frac{\beta \Delta_{13}^{(0)}}{\gamma \Delta_{11}^{(0)}} J_0(\beta\rho) + i \frac{\beta \Delta_{14}^{(0)}}{\gamma \Delta_{11}^{(0)}} N_0(\beta\rho) \right]. \quad (10)$$

Здесь $\Delta_{1p}^{(0)}$ ($p=1, \dots, 4$) – минор определителя (8), получаемый путем вычеркивания первой строки и p -го столбца. Для миноров определителя (8) справедливо следующее утверждение: если волновые числа α , β и γ удовлетворяют условию существования осесимметричной продольной волны в полем изотропном цилиндре (8), то имеют место комбинационные соотношения следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{12}^{(0)}}{\Delta_{11}^{(0)}} &= \frac{\Delta_{22}^{(0)}}{\Delta_{21}^{(0)}} = \frac{\Delta_{32}^{(0)}}{\Delta_{31}^{(0)}} = \frac{\Delta_{42}^{(0)}}{\Delta_{41}^{(0)}}, \\ \frac{\Delta_{13}^{(0)}}{\Delta_{11}^{(0)}} &= \frac{\Delta_{23}^{(0)}}{\Delta_{21}^{(0)}} = \frac{\Delta_{33}^{(0)}}{\Delta_{31}^{(0)}} = \frac{\Delta_{43}^{(0)}}{\Delta_{41}^{(0)}}, \\ \frac{\Delta_{14}^{(0)}}{\Delta_{11}^{(0)}} &= \frac{\Delta_{24}^{(0)}}{\Delta_{21}^{(0)}} = \frac{\Delta_{34}^{(0)}}{\Delta_{31}^{(0)}} = \frac{\Delta_{44}^{(0)}}{\Delta_{41}^{(0)}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Прямыми вычислениями можно показать, что

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \lim_{\alpha_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{13}^{(0)}}{\Delta_{11}^{(0)}} = -\frac{2i\gamma J_1(\alpha\alpha_2)}{(\gamma^2 - \beta^2) J_1(\beta\alpha_2)}, \\ \zeta_2 &= \lim_{\alpha_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{12}^{(0)}}{\Delta_{11}^{(0)}} = 0, \\ \zeta_3 &= \lim_{\alpha_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{14}^{(0)}}{\Delta_{11}^{(0)}} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя соотношения (12) в определения (9) и (10), получаем выражения для расчета смещений в сплошном изотропном цилиндре кругового поперечного сечения:

$$U_\rho^{(\pm)}(\rho) = \alpha A_0^{(\pm)} \times \left[-J_1(\alpha\rho) + \frac{2\gamma^2 J_1(\alpha\alpha_2)}{(\gamma^2 - \beta^2) J_1(\beta\alpha_2)} J_1(\beta\rho) \right], \quad (13)$$

$$U_z^{(\pm)}(\rho) = \pm i\gamma A_0^{(\pm)} \times \left[J_0(\alpha\rho) + \frac{2\alpha\beta J_1(\alpha\alpha_2)}{(\gamma^2 - \beta^2)J_1(\beta\alpha_2)} J_0(\beta\rho) \right]. \quad (14)$$

Компоненты вектора смещения $u_\beta(\rho, z)$ определяются соотношением (5). Условие существования продольных осесимметричных волн в сплошном цилиндре получается из условия (8) предельным переходом при $\alpha_1 \rightarrow 0$. После его выполнения можно записать, что волновые числа α , β и γ в сплошном цилиндре должны удовлетворять условию

$$\Delta_0(0) = \frac{2\alpha k_s^2}{\alpha_2} J_1(\alpha\alpha_2) J_1(\beta\alpha_2) - (\gamma^2 - \beta^2)^2 J_0(\alpha\alpha_2) J_1(\beta\alpha_2) - 4\gamma^2 \alpha \beta J_1(\alpha\alpha_2) J_0(\beta\alpha_2) = 0. \quad (15)$$

Известно, что дисперсионное уравнение (15) на любой частоте ω имеет бесконечное множество корней γ_m , из которых только несколько являются действительными, т. е. оказываются волновыми числами распространяющихся продольных волн [12]. Очевидно, что это положение справедливо и для корней дисперсионного уравнения (8).

На рис. 2, а показаны частотные спектры действительных корней уравнения (15), а на рис. 2, б–г – уравнения (8). Дополнительным параметром служит величина $\varepsilon = \alpha_1/\alpha_2$ – относительный радиус полости цилиндра. По оси абсцисс на рис. 2 отложены значения безразмерного волнового числа $\zeta = \gamma\alpha_2$, а по оси ординат – безразмерная частота $\Omega = k_s\alpha_2$. Штриховыми прямыми показаны пять асимптот: $\zeta_\ell = \Omega v_s/v_R$ и $\zeta_{\text{пл}} = \Omega v_s/v_{\text{пл}}$, где $v_{\text{ст}} = v_s\sqrt{2(1+\nu)}$ – стержневая скорость; v_R – скорость поверхностных волн Рэлея; $v_{\text{пл}} = v_s\sqrt{2/(1+\nu)}$ – пластинчатая скорость. Отчетливо видно, что с увеличением относительного радиуса полости происходит обеднение спектра волновых чисел, а вторая мода во все большем частотном диапазоне совпадает с асимптотой $\zeta_{\text{пл}}$. Начиная со значений $\varepsilon = 0.925$, в интервале частот $\Omega \leq 40$ остаются лишь две распространяющиеся продольные волны. Этот результат означает, что анализ напряженно-деформированного состояния в диапазоне частот $\Omega \leq 40$ в полых цилиндрах с относительным радиусом полости $\varepsilon \geq 0.925$ можно выполнять на основе приближенных теорий цилиндрических оболочек [13]. Специфические особенности частотно-зависимого поведения первых двух нормальных волн в полых цилиндрах исследованы в работе [14].

Общее решение граничной задачи (1)–(4), т. е.

компоненты вектора смещения $u_\beta(\rho, z)$, будем искать в виде суммы общего решения $u_\beta^0(\rho, z)$ однородной граничной задачи, соответствующей исходной задаче, и частного решения $u_\beta^*(\rho, z)$ неоднородной граничной задачи (1)–(4):

$$u_\beta(\rho, z) = u_\beta^0(\rho, z) + u_\beta^*(\rho, z), \quad \beta = \rho, z. \quad (16)$$

Предваряя последующие рассуждения, потребуем, чтобы искомые решения $u_\beta(\rho, z)$ удовлетворяли условиям физической реализуемости, т. е. предельным условиям

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} [u_\beta(\rho, z), u_{\beta,z}(\rho, z)] = 0. \quad (17)$$

Соотношение (17), декларирующее обращение в нуль смещений и деформаций при бесконечном удалении от источника возмущений, позволяет применить для решения граничной задачи (1)–(4) интегральное преобразование Фурье [15]. Определим прямое и обратное интегральное преобразование Фурье следующей парой соотношений:

$$V_\beta(\rho, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_\beta(\rho, z) e^{-i\gamma z} dz, \quad (18)$$

$$u_\beta(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} V_\beta(\rho, \gamma) e^{i\gamma z} d\gamma,$$

где γ – параметр интегрального преобразования, имеющий смысл волнового числа; $V_\beta(\rho, \gamma) = V_\beta^0(\rho, \gamma) + V_\beta^*(\rho, \gamma)$ – интегральный образ искомого решения (16). Сообразно определению (18), введем интегральные образы внешних нагрузок:

$$F_\beta^*(\rho, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^*(\rho, z) e^{-i\gamma z} dz, \quad (19)$$

$$\sigma_{\rho\beta}^*(\alpha_k, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{\rho\beta}^*(\alpha_k, z) e^{-i\gamma z} dz.$$

Воздействуя на систему дифференциальных уравнений (1) и (2) прямым интегральным преобразованием Фурье и учитывая при этом предельные условия (17), получаем следующую систему уравнений:

$$\rho^2 V_{\rho,\rho} + \rho V_{\rho,\rho} + \left[\left(k_\ell^2 - \gamma^2 \frac{k_\ell^2}{k_s^2} \right) \rho^2 - 1 \right] V_\rho + i\gamma\rho \left(1 - \frac{k_\ell^2}{k_s^2} \right) V_{z,\rho} = \frac{\rho^2}{\lambda + 2G} F_\rho^*(\rho, \gamma), \quad (20)$$

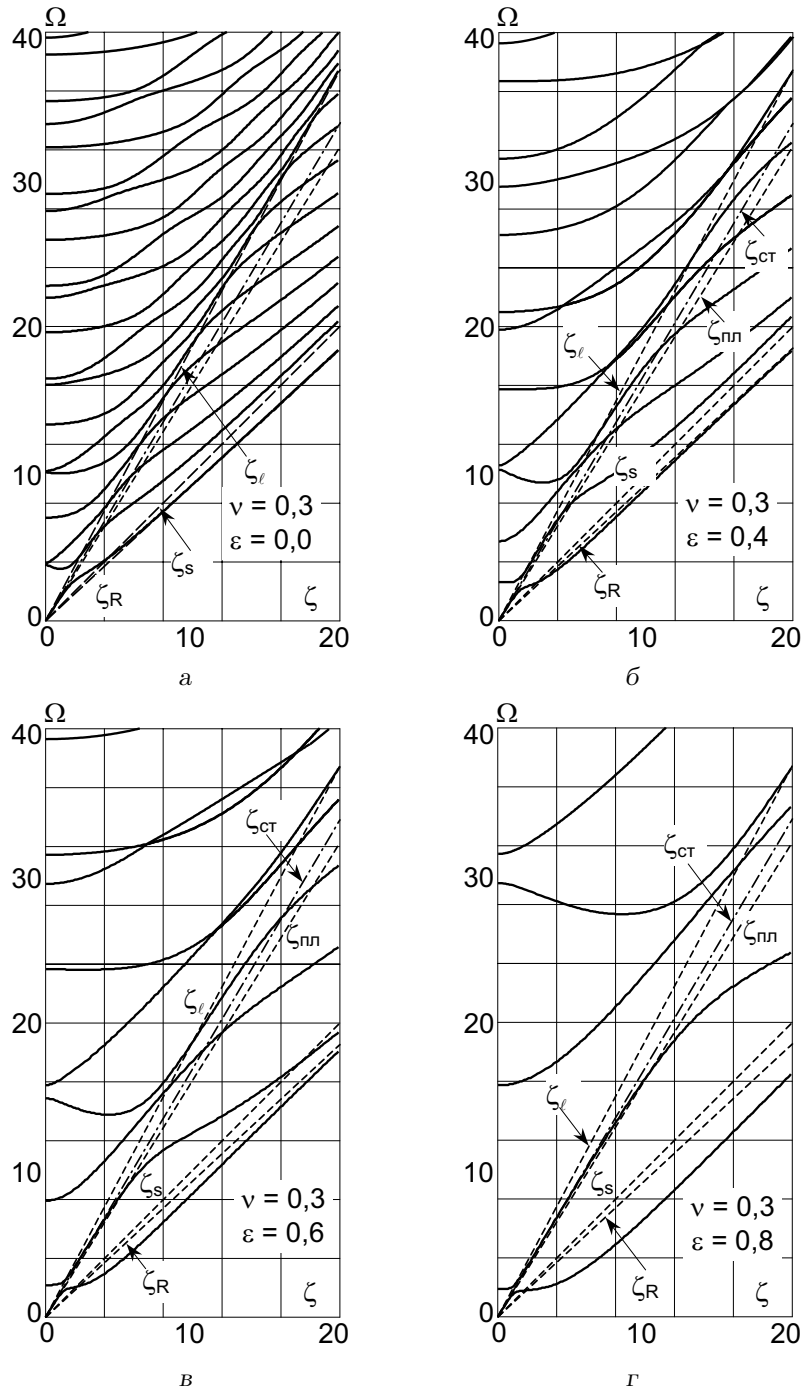


Рис. 2. Частотные спектры волновых чисел (коэффициент Пуассона материала $\nu=0.3$)

$$\begin{aligned}
 & i\gamma\rho\left(\frac{k_s^2}{k_\ell^2}-1\right)(V_\rho+\rho V_{\rho,\rho})+\rho^2V_{z,\rho\rho}+ \\
 & +\rho V_{z,\rho}+k_s^2\rho^2\left(1-\frac{\gamma^2}{k_\ell^2}\right)V_z=\frac{\rho^2}{G}F_z^*(\rho,\gamma).
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Прямой подстановкой выражений

$$\begin{aligned}
 V_\rho^0(\rho,\gamma) &= -\alpha AJ_1(\alpha\rho)-\alpha BN_1(\alpha\rho)+ \\
 & +i\gamma CJ_1(\beta\rho)+i\gamma DN_1(\beta\rho), \\
 V_z^0(\rho,\gamma) &= i\gamma AJ_0(\alpha\rho)+i\gamma BN_0(\alpha\rho)- \\
 & -\beta CJ_0(\beta\rho)-\beta DN_0(\beta\rho),
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

где $\alpha = \sqrt{k_t^2 - \gamma^2}$; $\beta = \sqrt{k_s^2 - \gamma^2}$; A, B, C и D – константы, можно показать, что соотношения (22) обращают уравнения (20) и (21) в тождества при $F_\rho^0(\rho, \gamma) = F_z^0(\rho, \gamma) = 0$.

Определим частное решение системы уравнений (20), (21) как

$$V_\rho^*(\rho, \gamma) = -\alpha A(\rho)J_1(\alpha\rho) - \alpha B(\rho)N_1(\alpha\rho) + i\gamma C(\rho)J_1(\beta\rho) + i\gamma D(\rho)N_1(\beta\rho), \quad (23)$$

$$V_z^*(\rho, \gamma) = i\gamma A(\rho)J_0(\alpha\rho) + i\gamma B(\rho)N_0(\alpha\rho) - \beta C(\rho)J_0(\beta\rho) - \beta D(\rho)N_0(\beta\rho),$$

где функции $A(\rho), B(\rho), C(\rho)$ и $D(\rho)$ удовлетворяют упрощающим последующие вычисления условиям:

$$-\alpha A'(\rho)J_1(\alpha\rho) - \alpha B'(\rho)N_1(\alpha\rho) + i\gamma C'(\rho)J_1(\beta\rho) + i\gamma D'(\rho)N_1(\beta\rho) = 0, \quad (24)$$

$$i\gamma A'(\rho)J_0(\alpha\rho) + i\gamma B'(\rho)N_0(\alpha\rho) - \beta C'(\rho)J_0(\beta\rho) - \beta D'(\rho)N_0(\beta\rho) = 0.$$

Штрих означает производную по радиальной координате ρ . Подставляя определения (23) в уравнения (20), (21) и выполняя дифференцирование с учетом условий (24), приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} & A'(\rho)[\alpha\rho J_1(\alpha\rho) - (\alpha\rho)^2 J_0(\alpha\rho)] + \\ & + B'(\rho)[\alpha\rho N_1(\alpha\rho) - (\alpha\rho)^2 N_0(\alpha\rho)] + \\ & + C'(\rho)[i\gamma\rho J_1(\beta\rho) - i\gamma\beta\rho^2 J_0(\beta\rho)] + \\ & + D'(\rho)[i\gamma\rho J_1(\beta\rho) - i\gamma\beta\rho^2 J_0(\beta\rho)] = \\ & = \frac{\rho^2 F_\rho^*(\rho, \gamma)}{\lambda + 2G}, \quad (25) \\ & -iA'(\rho)\gamma\alpha\rho^2 J_1(\alpha\rho) - iB'(\rho)\gamma\alpha\rho^2 N_1(\alpha\rho) + \\ & + C'(\rho)(\beta\rho)^2 J_1(\beta\rho) + D'(\rho)(\beta\rho)^2 J_1(\beta\rho) = \\ & = \frac{\rho^2}{G} F_z^*(\rho, \gamma). \end{aligned}$$

Условия (24) и соотношения (25) образуют неоднородную систему из четырех алгебраических уравнений, содержащих четыре функции $A'(\rho), B'(\rho), C'(\rho)$ и $D'(\rho)$. Естественно, такая система

разрешается единственным образом относительно искомых производных. Определив производные искомых функций и выполнив элементарную процедуру интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} A(\rho) &= \frac{\pi}{2\omega^2\rho_0} \int_{\alpha_1}^{\rho} \xi [F_\rho^*(\xi, \gamma)\alpha N_1(\alpha\xi) + \\ & + iF_z^*(\xi, \gamma)\gamma N_0(\alpha\xi)] d\xi, \\ B(\rho) &= -\frac{\pi}{2\omega^2\rho_0} \int_{\alpha_1}^{\rho} \xi [F_\rho^*(\xi, \gamma)\alpha J_1(\alpha\xi) + \\ & + iF_z^*(\xi, \gamma)\gamma J_0(\alpha\xi)] d\xi, \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(\rho) &= \frac{\pi}{2\omega^2\rho_0} \int_{\alpha_1}^{\rho} \xi [iF_\rho^*(\xi, \gamma)\gamma N_1(\beta\xi) + \\ & + F_z^*(\xi, \gamma)\beta N_0(\beta\xi)] d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\rho) &= -\frac{\pi}{2\omega^2\rho_0} \int_{\alpha_1}^{\rho} \xi [iF_\rho^*(\xi, \gamma)\gamma J_1(\beta\xi) + \\ & + F_z^*(\xi, \gamma)\beta J_0(\beta\xi)] d\xi, \end{aligned}$$

где ρ_0 – плотность материала полого цилиндра.

Таким образом, общее решение системы уравнений (20), (21) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} V_\rho(\rho, \gamma) &= -\alpha[A + A(\rho)]J_1(\alpha\rho) - \\ & -\alpha[B + B(\rho)]N_1(\alpha\rho) + \\ & + i\gamma[C + C(\rho)]J_1(\beta\rho) + \\ & + i\gamma[D + D(\rho)]N_1(\beta\rho), \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_z(\rho, \gamma) &= i\gamma[A + A(\rho)]J_0(\alpha\rho) + \\ & + i\gamma[B + B(\rho)]N_0(\alpha\rho) - \\ & -\beta[C + C(\rho)]J_0(\beta\rho) - \\ & -\beta[D + D(\rho)]N_0(\beta\rho), \end{aligned}$$

где функции $A(\rho), \dots, D(\rho)$ находятся по соотношениям (26); A, \dots, D – дополнительные константы, определяемые из граничных условий.

Подставляя в условия (3), (4) соотношения (27), получаем неоднородную алгебраическую систему из четырех уравнений, которая разрешается отно-

сительно искомым неизвестных A, \dots, D следующим образом: где

$$A = \left[\frac{\sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_2, \gamma)}{2G} - \Xi_1 \right] \frac{\Delta_{11}^{(0)}}{\Delta_0^{(1)}} + \frac{\sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_1, \gamma)}{2G} \frac{\Delta_{21}^{(0)}}{\Delta_0^{(1)}} + \left[\frac{\sigma_{\rho z}^*(\alpha_2, \gamma)}{G} - \Xi_2 \right] \frac{\Delta_{31}^{(0)}}{\Delta_0^{(1)}} + \frac{\sigma_{\rho z}^*(\alpha_1, \gamma)}{G} \frac{\Delta_{41}^{(0)}}{\Delta_0^{(1)}},$$

$$B = \left[\frac{\sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_2, \gamma)}{2G} - \Xi_1 \right] \frac{\Delta_{12}^{(0)}}{\Delta_0^{(1)}} + \frac{\sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_1, \gamma)}{2G} \frac{\Delta_{22}^{(0)}}{\Delta_0^{(1)}} + \left[\frac{\sigma_{\rho z}^*(\alpha_2, \gamma)}{G} - \Xi_2 \right] \frac{\Delta_{32}^{(0)}}{\Delta_0^{(1)}} + \frac{\sigma_{\rho z}^*(\alpha_1, \gamma)}{G} \frac{\Delta_{42}^{(0)}}{\Delta_0^{(1)}},$$

$$C = \left[\frac{\sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_2, \gamma)}{2G} - \Xi_1 \right] \frac{\Delta_{13}^{(0)}}{\Delta_0^{(1)}} + \frac{\sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_1, \gamma)}{2G} \frac{\Delta_{23}^{(0)}}{\Delta_0^{(1)}} + \left[\frac{\sigma_{\rho z}^*(\alpha_2, \gamma)}{G} - \Xi_2 \right] \frac{\Delta_{33}^{(0)}}{\Delta_0^{(1)}} + \frac{\sigma_{\rho z}^*(\alpha_1, \gamma)}{G} \frac{\Delta_{43}^{(0)}}{\Delta_0^{(1)}},$$

$$D = \left[\frac{\sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_2, \gamma)}{2G} - \Xi_1 \right] \frac{\Delta_{14}^{(0)}}{\Delta_0^{(1)}} + \frac{\sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_1, \gamma)}{2G} \frac{\Delta_{24}^{(0)}}{\Delta_0^{(1)}} + \left[\frac{\sigma_{\rho z}^*(\alpha_2, \gamma)}{G} - \Xi_2 \right] \frac{\Delta_{34}^{(0)}}{\Delta_0^{(1)}} + \frac{\sigma_{\rho z}^*(\alpha_1, \gamma)}{G} \frac{\Delta_{44}^{(0)}}{\Delta_0^{(1)}},$$

$$\Xi_1 = A(\alpha_2)m_{11}^{(0)} + B(\alpha_2)m_{12}^{(0)} + C(\alpha_2)m_{13}^{(0)} + D(\alpha_2)m_{14}^{(0)};$$

$$\Xi_2 = A(\alpha_2)m_{31}^{(0)} + B(\alpha_2)m_{32}^{(0)} + C(\alpha_2)m_{33}^{(0)} + D(\alpha_2)m_{34}^{(0)};$$

$m_{ij}^{(0)}$ – элементы определителя Δ_0 – условия существования продольных волн в изотропном полем цилиндре (8); $\Delta_{ij}^{(0)}$ – миноры определителя $\Delta_0^{(1)}$, которые получаются вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца, на перекрестье которых располагается элемент $m_{ij}^{(0)}$ в исходном определителе Δ_0 .

Подставляя выражения (28a), (28b) в соотношения (27), получаем

$$V_\rho^0(\rho) = \frac{\Lambda_\rho^0(\rho)}{\Delta_0^{(1)}} + R_\rho(\rho),$$

$$V_z^0(\rho) = \frac{\Lambda_z^0(\rho)}{\Delta_0^{(1)}} + R_z(\rho),$$

где

$$\Lambda_\rho^0(\rho) = \left[\frac{\sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_2, \gamma)}{2G} - \Xi_1 \right] \Delta_{11}^{(0)} \Psi_\rho^{(11)}(\rho) + \frac{\sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_1, \gamma)}{2G} \Delta_{21}^{(0)} \Psi_\rho^{(21)}(\rho) + \left[\frac{\sigma_{\rho z}^*(\alpha_2, \gamma)}{G} - \Xi_2 \right] \Delta_{31}^{(0)} \Psi_\rho^{(31)}(\rho) + \frac{\sigma_{\rho z}^*(\alpha_1, \gamma)}{G} \Delta_{41}^{(0)} \Psi_\rho^{(41)}(\rho);$$

(28b)

$$\Lambda_z^0(\rho) = \left[\frac{\sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_2, \gamma)}{2G} - \Xi_1 \right] \Delta_{11}^{(0)} \Psi_z^{(11)}(\rho) + \frac{\sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_1, \gamma)}{2G} \Delta_{21}^{(0)} \Psi_z^{(21)}(\rho) + \left[\frac{\sigma_{\rho z}^*(\alpha_2, \gamma)}{G} - \Xi_2 \right] \Delta_{31}^{(0)} \Psi_z^{(31)}(\rho) + \frac{\sigma_{\rho z}^*(\alpha_1, \gamma)}{G} \Delta_{41}^{(0)} \Psi_z^{(41)}(\rho);$$

$$R_\rho(\rho) = -\alpha A(\rho)J_1(\alpha\rho) - \alpha B(\rho)N_1(\alpha\rho) + \\ + i\gamma C(\rho)J_1(\beta\rho) + i\gamma D(\rho)N_1(\beta\rho);$$

$$R_z(\rho) = i\gamma A(\rho)J_0(\alpha\rho) + i\gamma B(\rho)N_0(\alpha\rho) - \\ - \beta C(\rho)J_0(\beta\rho) - \beta D(\rho)N_0(\beta\rho);$$

$$\Psi_\rho^{(k1)}(\rho) = -\alpha J_1(\alpha\rho) - \alpha \frac{\Delta_{k2}^{(0)}}{\Delta_{k1}^{(0)}} N_1(\alpha\rho) + \\ + i\gamma \frac{\Delta_{k3}^{(0)}}{\Delta_{k1}^{(0)}} J_1(\beta\rho) + i\gamma \frac{\Delta_{k4}^{(0)}}{\Delta_{k1}^{(0)}} N_1(\beta\rho);$$

$$\Psi_z^{(k1)}(\rho) = i\gamma J_0(\alpha\rho) + i\gamma \frac{\Delta_{k2}^{(0)}}{\Delta_{k1}^{(0)}} N_0(\alpha\rho) - \\ - \beta \frac{\Delta_{k3}^{(0)}}{\Delta_{k1}^{(0)}} J_0(\beta\rho) - \beta \frac{\Delta_{k4}^{(0)}}{\Delta_{k1}^{(0)}} N_0(\beta\rho).$$

Так как функции $R_\rho(\rho)$ и $R_z(\rho)$ являются регулярными во всей комплексной плоскости ($\mathbf{Re} \gamma, \mathbf{Im} \gamma$), то обратное Фурье-преобразование, доставляющее значения компонентов вектора смещения $u_\rho(\rho, z)$ и $u_z(\rho, z)$, может быть записано следующим образом:

$$u_\rho(\rho, z) = \pi i \sum_{n=1} \frac{\Lambda_\rho^0(\rho, \gamma_n)}{\gamma_n \Delta'(\chi_n)} e^{i\gamma_n z},$$

$$u_z(\rho, z) = \pi i \sum_{n=1} \frac{\Lambda_z^0(\rho, \gamma_n)}{\gamma_n \Delta'(\chi_n)} e^{i\gamma_n z}.$$

Здесь n – номер корня, т.е. действительного волнового числа γ_n , удовлетворяющего условию существования осесимметричных продольных волн в изотропном полом цилиндре ($\Delta_0(\gamma_n)=0$); $\Delta'(\chi_n)=d\Delta_0/d\chi_n$; $\chi_n \equiv \gamma_n^2$.

Коль скоро волновые числа α_n, β_n и γ_n , входящие в состав выражений, определяющих величины $\Lambda_\beta^0(\rho, \gamma_n)$ ($\beta=\rho, z$), удовлетворяют условию $\Delta_0(\gamma_n)=0$, то справедливы комбинационные соотношения (11), применяя которые, величины $\Lambda_\beta^0(\rho, \gamma_n)$ можно представить следующим образом:

$$\Lambda_\rho^0(\rho, \gamma_n) = \Lambda_0(\gamma_n)U_\rho^{(+)}(\rho, \gamma_n),$$

$$\Lambda_z^0(\rho, \gamma_n) = \Lambda_0(\gamma_n)U_z^{(+)}(\rho, \gamma_n),$$

где

$$\Lambda_0(\gamma_n) = \left\{ \frac{\Delta_{11}^{(0)}}{2G} \sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_2, \gamma_n) + \right. \\ + \frac{\Delta_{21}^{(0)}}{2G} \sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_1, \gamma_n) + \frac{\Delta_{31}^{(0)}}{G} \sigma_{\rho z}^*(\alpha_2, \gamma_n) + \\ \left. + \frac{\Delta_{41}^{(0)}}{G} \sigma_{\rho z}^*(\alpha_2, \gamma_n) - F^{(+)}(\rho, \gamma_n) \right\};$$

$$F^{(+)}(\rho, \gamma_n) = \Xi_1(\gamma_n)\Delta_{11}^{(0)} + \Xi_2(\gamma_n)\Delta_{31}^{(0)};$$

$$U_\rho^{(\pm)}(\rho, \gamma_n) = \alpha_n \left[-J_1(\alpha_n\rho) - \right. \\ - \frac{\Delta_{12}^{(0)}}{\Delta_{11}^{(0)}} N_1(\alpha_n\rho) + \frac{i\gamma_n}{\alpha_n} \frac{\Delta_{13}^{(0)}}{\Delta_{11}^{(0)}} J_1(\beta_n\rho) + \\ \left. + \frac{i\gamma_n}{\alpha_n} \frac{\Delta_{14}^{(0)}}{\Delta_{11}^{(0)}} N_1(\beta_n\rho) \right];$$

$$U_z^{(\pm)}(\rho, \gamma_n) = \pm i\gamma_n \left[J_0(\alpha_n\rho) + \right. \\ + \frac{\Delta_{12}^{(0)}}{\Delta_{11}^{(0)}} N_0(\alpha_n\rho) + \frac{i\beta_n}{\gamma_n} \frac{\Delta_{13}^{(0)}}{\Delta_{11}^{(0)}} J_0(\beta_n\rho) + \\ \left. + \frac{i\beta_n}{\gamma_n} \frac{\Delta_{14}^{(0)}}{\Delta_{11}^{(0)}} N_0(\beta_n\rho) \right].$$

Функции $U_\beta^{(\pm)}(\rho, \gamma_n)$ ($\beta=\rho, z$) – суть собственные функции однородной граничной задачи о распространении осесимметричных продольных волн в изотропном полом цилиндре (они же – нормальные волны) и отличаются от общих решений (9), (10) лишь отсутствием постоянного на данной частоте амплитудного множителя $A^{(\pm)}$. Ясно, что для n -ой нормальной волны этот множитель определяется как

$$A^{(\pm)} = \frac{i\pi\Lambda_0(\gamma_n)}{\gamma_n\Delta'(\chi_n)}.$$

Нетрудно показать, что

$$F^{(+)}(\rho, \gamma_n) = \Xi_1(\gamma_n)\Delta_{11}^{(0)} + \Xi_2(\gamma_n)\Delta_{31}^{(0)} = \\ = \frac{\pi}{2\omega^2\rho_0} [m_{12}^{(0)}\Delta_{11}^{(0)} + m_{32}^{(0)}\Delta_{31}^{(0)}] \times \\ \times \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \xi [F_\rho^*(\xi, \gamma_n)\tilde{U}_\rho^{(-)}(\xi, \gamma_n) + \\ + F_z^*(\xi, \gamma_n)\tilde{U}_z^{(-)}(\xi, \gamma_n)] d\xi,$$

где

$$\tilde{U}_\rho^{(\pm)}(\rho, \gamma_n) = \alpha_n \left[-J_1(\alpha_n \rho) + \zeta_1(\gamma_n) N_1(\alpha_n \rho) + \frac{i\gamma_n}{\alpha_n} \zeta_4(\gamma_n) J_1(\beta_n \rho) + \frac{i\gamma_n}{\alpha_n} \zeta_3(\gamma_n) N_1(\beta_n \rho) \right];$$

$$\tilde{U}_z^{(\pm)}(\rho, \gamma_n) = \pm i\gamma_n \left[J_0(\alpha_n \rho) + \zeta_1(\gamma_n) N_0(\alpha_n \rho) + \frac{i\beta_n}{\gamma_n} \zeta_4(\gamma_n) J_0(\beta_n \rho) + \frac{i\beta_n}{\gamma_n} \zeta_3(\gamma_n) N_0(\beta_n \rho) \right];$$

$$\zeta_1(\gamma_n) = \frac{m_{11}^{(0)} \Delta_{11}^{(0)} + m_{31}^{(0)} \Delta_{31}^{(0)}}{\zeta_0};$$

$$\zeta_3(\gamma_n) = \frac{m_{13}^{(0)} \Delta_{11}^{(0)} + m_{33}^{(0)} \Delta_{31}^{(0)}}{\zeta_0};$$

$$\zeta_4(\gamma_n) = \frac{m_{14}^{(0)} \Delta_{11}^{(0)} + m_{34}^{(0)} \Delta_{31}^{(0)}}{\zeta_0};$$

$$\zeta_0(\gamma_n) = m_{12}^{(0)} \Delta_{11}^{(0)} + m_{32}^{(0)} \Delta_{31}^{(0)}.$$

Так как волновые числа α_n , β_n и γ_n удовлетворяют условию существования продольных волн $\Delta_0(\gamma_n) = 0$, то элементы определителя $\Delta_0(\gamma_n)$ оказываются связанными между собой некоторыми соотношениями, которые будем называть комбинационными соотношениями второго рода:

$$\begin{aligned} \zeta_1(\gamma_n) &= -\frac{\Delta_{12}^{(0)}}{\Delta_{11}^{(0)}}, \\ \zeta_3(\gamma_n) &= \frac{\Delta_{14}^{(0)}}{\Delta_{11}^{(0)}}, \\ \zeta_4(\gamma_n) &= -\frac{\Delta_{13}^{(0)}}{\Delta_{11}^{(0)}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Принимая во внимание формулы (34), находим, что $\tilde{U}_\beta^{(\pm)}(\rho, \gamma_n) = U_\beta^{(\pm)}(\rho, \gamma_n)$, где функции $U_\beta^{(\pm)}(\rho, \gamma_n)$ заданы соотношениями (9) и (10). После этого можно записать

$$u_\beta^{(+)}(\rho, z) = \frac{\pi i}{2G} \sum_{n=1} A^{(+)}(\gamma_n) U_\beta^{(+)}(\rho, \gamma_n) e^{i\gamma_n z}$$

(по-прежнему, $\beta = \rho, z$).

Так как в общем случае

$$\vec{F}^*(\rho, \gamma_n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \vec{f}^*(\rho, \vartheta, z) e^{-i\gamma_n z} d\vartheta dz,$$

$$\sigma_{\rho\lambda}^*(\alpha_j, \gamma_n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_{\rho\lambda}^*(\alpha_j, \vartheta, z) e^{-i\gamma_n z} d\vartheta dz$$

(где $\lambda = \rho, z$; $j = 1, 2$), то окончательное выражение для расчета смещений материальных частиц стержня за пределами области приложения внешних сил приобретает следующий вид:

$$\vec{u}^{(\pm)}(\rho, z) = \frac{i}{8\pi G} \sum_{n=1} A^{(\pm)}(\gamma_n) \times \times \vec{U}^{(\pm)}(\rho, \gamma_n) e^{\pm i\gamma_n z}. \quad (35)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A^{(\pm)}(\gamma_n) &= \frac{1}{\gamma_n \Delta'(\chi_n)} \left\{ -\frac{\pi}{k_s^2} \times \right. \\ &\quad \times [m_{12}^{(0)} \Delta_{11}^{(0)} + m_{32}^{(0)} \Delta_{31}^{(0)}] \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho \vec{f}^*(\rho, \vartheta, z) \cdot \vec{U}^{(\mp)}(\rho, \gamma_n) \times \\ &\quad \times e^{\mp i\gamma_n z} d\rho d\vartheta dz + \\ &\quad + \Delta_{11}^{(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_2, \vartheta, z) e^{\mp i\gamma_n z} d\vartheta dz + \\ &\quad + \Delta_{21}^{(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_1, \vartheta, z) e^{\mp i\gamma_n z} d\vartheta dz + \\ &\quad + 2\Delta_{31}^{(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_{\rho z}^*(\alpha_2, \vartheta, z) e^{\mp i\gamma_n z} d\vartheta dz + \\ &\quad \left. + 2\Delta_{41}^{(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_{\rho z}^*(\alpha_1, \vartheta, z) e^{\mp i\gamma_n z} d\vartheta dz \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Выполнив в формуле (35) предельный переход при $\alpha_1 \rightarrow 0$, получим соотношения для расчета амплитудных множителей продольных волн в сплошном цилиндре:

$$\vec{u}^{(\pm)}(\rho, z) = \frac{i}{8\pi G} \sum_{n=1} A_0^{(\pm)}(\gamma_n) \times \times \vec{U}^{(\pm)}(\rho, \gamma_n) e^{\pm i\gamma_n z}, \quad (37)$$

где компоненты вектора $\vec{U}^{(\pm)}(\rho, \gamma_n)$ задаются выражениями (13) и (14), в которых вместо волновых чисел α, β и γ фигурируют волновые числа α_n, β_n и γ_n , обращающие дисперсионное уравнение (15) в тождество.

Амплитудный множитель n -ой продольной волны в сплошном цилиндре определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A_0^{(\pm)}(\gamma_n) = & \frac{2}{\gamma_n \Delta'(\chi_n)} \left\{ \frac{\beta_n J_0(\beta_n \alpha_2)}{\alpha_2 J_0(\alpha_n \alpha_2)} \times \right. \\
 & \times \left[4 \frac{\gamma_n^2}{k_s^2} - \frac{2 J_1(\beta_n \alpha_2)}{(\beta_n \alpha_2) J_0(\beta_n \alpha_2)} \right] \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_2} \rho f^*(\rho, \vartheta, z) \cdot \vec{U}^{(\mp)}(\rho, \gamma_n) \times \\
 & \times e^{\mp i \gamma_n z} d\rho d\vartheta dz + \\
 & + (\gamma_n^2 - \beta_n^2) J_1(\beta_n \alpha_2) \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_{\rho\rho}^*(\alpha_2, \vartheta, z) e^{\mp i \gamma_n z} d\vartheta dz \pm \\
 & \pm 2i \gamma_n \beta_n \left[J_0(\beta_n \alpha_2) - \frac{J_1(\beta_n \alpha_2)}{\beta_n \alpha_2} \right] \times \\
 & \times \left. \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_{\rho z}^*(\alpha_2, \vartheta, z) e^{\mp i \gamma_n z} d\vartheta dz \right\},
 \end{aligned} \tag{38}$$

где $\Delta'(\chi_n) = d\Delta_0(0)/d\chi_n$; $\chi_n \equiv \gamma_n^2$.

Соотношения (36) и (38) справедливы для физически реализуемых пространственных распределений переменного и постоянного магнитного поля и частот, не совпадающих с частотами, на которых $\Delta'(\chi_n) = 0$ при $\gamma_n \neq 0$.

Выполним в соотношениях (37) и (38) предельный переход при $k_s \rightarrow 0$. Это соответствует переходу в область низких частот, где существует только одна продольная волна, распространяющаяся со стержневой скоростью $v_{ст} = v_s \sqrt{2(1+\nu)}$. Введем обозначение $\gamma_1 = \omega/v_{ст}$. Тогда

$$\Delta_0(0) = \lim_{k_s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\beta_1 \alpha}{2} k_s^2 [\gamma_1^2 (4\xi - 3) + k_s^2 (1 - \xi)] \right\},$$

где $\xi = (1 - 2\nu)/[2(1 - \nu)]$; ν – коэффициент Пуассона. Из условия существования первой продольной волны $\Delta_0(0) = 0$ в области низких частот следует,

что

$$\gamma_1^2 = -\frac{k_s^2(1 - \xi)}{4\xi - 3} = \frac{k_s^2}{2(1 + \nu)}.$$

Низкочастотная асимптотика производной дает

$$\begin{aligned}
 \Delta'(\chi_1) = & \lim_{k_s \rightarrow 0} \left[\frac{\beta_1 \alpha}{2} k_s^2 (4\xi - 3) \right] = \\
 = & -\lim_{k_s \rightarrow 0} \left[\frac{\beta_1 \alpha}{2} k_s^2 \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right].
 \end{aligned}$$

Компоненты вектора смещения материальных частиц $U_\rho^{(\pm)}(\rho, \gamma_1)$ и $U_z^{(\pm)}(\rho, \gamma_1)$ при $k_s \rightarrow 0$ принимают следующие значения:

$$\lim_{k_s \rightarrow 0} U_\rho^{(\pm)}(\rho, \gamma_1) = \nu \rho \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \lim_{k_s \rightarrow 0} \gamma_1^2,$$

$$\lim_{k_s \rightarrow 0} U_z^{(\pm)}(\rho, \gamma_1) = \pm i \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \lim_{k_s \rightarrow 0} \gamma_1.$$

Видно, что в области очень низких частот радиальная компонента вектора смещения является бесконечно малой величиной второго порядка малости в сравнении с аксиальной. Сохраняя в формуле (38) величины одного порядка малости, запишем ее в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 A_0^{(\pm)} = & \lim_{k_s \rightarrow 0} A_0^{(\pm)}(\gamma_1) = \lim_{k_s \rightarrow 0} \frac{-2}{\gamma_1 \frac{\beta_1 \alpha_2}{2} k_s^2 \frac{1 + \nu}{1 - \nu}} \times \\
 & \times \left\{ \mp \frac{i \beta_1 \gamma_1}{\alpha_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_2} \rho f_z^*(\rho, \vartheta, z) e^{\mp i \gamma_1 z} d\rho d\vartheta dz \pm \right. \\
 & \left. \pm i \beta_1 \gamma_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_{\rho z}^*(\alpha_2, \vartheta, z) e^{\mp i \gamma_1 z} d\vartheta dz \right\}.
 \end{aligned}$$

Так как

$$f_z^*(\rho, \vartheta, z) = \sigma_{zz,z}^*(\rho, \vartheta, z) + \sigma_{\rho z, \rho}^*(\rho, \vartheta, z) +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \sigma_{\rho z}^*(\rho, \vartheta, z) + \frac{1}{\rho} \sigma_{\vartheta z, \vartheta}^*(\rho, \vartheta, z),$$

то

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\alpha_2} \rho f_z^*(\rho, \vartheta, z) d\rho = & \\
 = \int_0^{\alpha_2} \rho \left[\sigma_{zz,z}^*(\rho, \vartheta, z) + \frac{1}{\rho} \sigma_{\vartheta z, \vartheta}^*(\rho, \vartheta, z) \right] d\rho + & \\
 + \alpha_2 \sigma_{\rho z}^*(\alpha_2, \vartheta, z). &
 \end{aligned}$$

Подставляя в формулу (37) низкочастотную асимптотику выражения (38) и аксиальной компоненты вектора смещения $U_z^{(\pm)}(\rho, \gamma_1)$, получаем

$$\vec{u}(z) = \begin{cases} U_0^{(-)} e^{-i\gamma_1 z}, & z > A, \\ U_0^{(+)} e^{i\gamma_1 z}, & z < -A. \end{cases} \quad (39)$$

Амплитудный множитель $U_0^{(\pm)}$ для первой продольной осесимметричной волны в области очень низких частот определяется как

$$U_0^{(\pm)} = -\frac{i}{2E\gamma_1} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_z^*(z) e^{\mp i\gamma_1 z} dz, \quad (40)$$

где

$$\hat{f}_z^*(z) = \frac{1}{\pi\alpha_2^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_2} \rho \left[\sigma_{zz,z}^*(\rho, \vartheta, z) + \frac{1}{\rho} \sigma_{\vartheta z, \vartheta}^*(\rho, \vartheta, z) \right] d\vartheta d\rho;$$

$E = 2G(1 + \nu)$ – модуль Юнга. Соотношение (39) идентично результату, полученному в работе [16] при решении задачи о возбуждении недиспергирующих плоских продольных волн в тонком стержне кругового поперечного сечения.

2. ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА УЛЬТРАЗВУКОВОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ТИПА В РЕЖИМЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН

Так как характер распределения внешних нагрузок полностью определяется конструкцией их источника, то можно утверждать, что амплитудные множители продольных волн, т.е. аналитические выражения (36), (38) и (40), содержат в себе информацию о конструкции и основных параметрах источника механических возмущений.

Рассмотрим простейшую ситуацию, когда переменное магнитное поле катушки возбуждает плоские продольные волны в тонком ферромагнитном стержне. Предположим, что ферромагнитный стержень (позиция 1 на рис. 3, а) подвержен воздействию переменного магнитного поля катушки – короткого соленоида (позиция 2). Силовые линии магнитного поля катушки отмечены на рис. 3 символами \vec{H}^* . Если стержень находится в продольном и постоянном во времени поле подмагничивания, вектор напряженности которого $\vec{H}^0 = \{0, 0, H_z^0\}$ не меняется, по крайней мере,

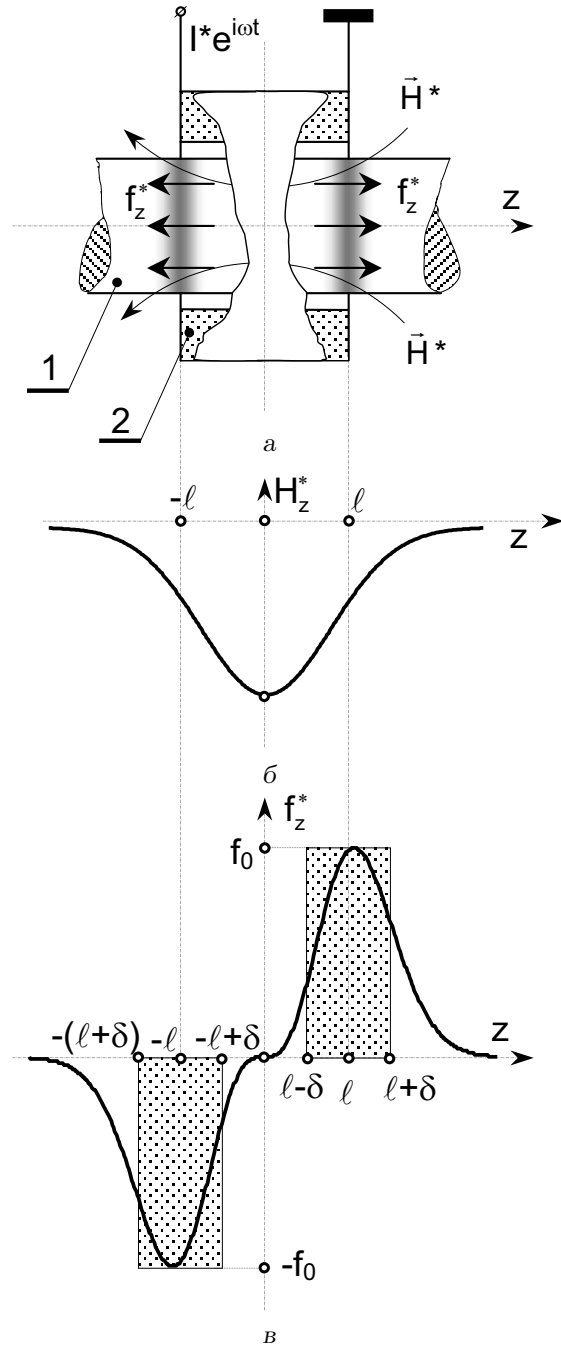


Рис. 3. Модельное исследование решений (39), (40)

в области существования переменного магнитного поля, то в нем развиваются преимущественно деформации сжатия – растяжения.

Опираясь на расчетную схему ферромагнетика в виде цепочки практически одинаково ориентированных доменов, можно показать, что находящаяся под катушкой (в области $-\ell \leq z \leq \ell$) часть

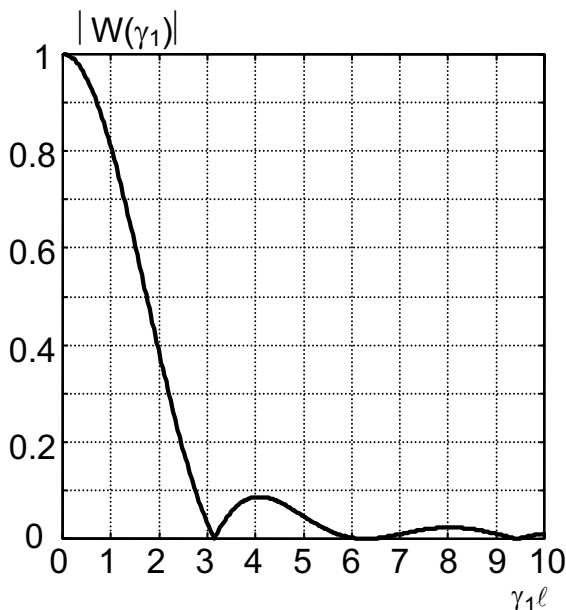


Рис. 4. Зависимость модуля функции $W(\gamma_1)$ от изменения безразмерного волнового числа

стержня деформируется так, как если бы на ее границах действовали силы (в дальнейшем будем называть их магнитострикционными) с объемной плотностью $\hat{f}_z^*(z) = m_{33} H_{z,z}^*$, где m_{33} – пьезомагнитная константа. На рис. 3, б представлен график изменения аксиальной компоненты вектора \hat{H}^* . Ориентировочная зависимость аксиальной компоненты вектора объемной плотности магнитострикционных сил $\hat{f}_z^*(z)$ показана на рис. 3, в сплошной кривой. Для того, чтобы не отвлекаться на математические аспекты рассматриваемого модельного примера, аппроксимируем сплошную кривую прямоугольными областями той же площади, как это показано на рис. 3, в. При этом плотность внешних сил будет определяться следующим образом:

$$\hat{f}_z^*(z) = \begin{cases} -f_0^* & \forall z \in [-(\ell + \delta), -\ell + \delta], \\ +f_0^* & \forall z \in [\ell - \delta, \ell + \delta]. \end{cases} \quad (41)$$

Здесь δ – некоторый масштабный параметр, характеризующий протяженность области нагружения стержня внешними силами. Подставив определенные соотношениями (41) объемную плотность внешних сил в интеграл (40), после выполнения элементарных вычислений получим

$$U_0^{(\pm)} = \mp \frac{2f_0^* \ell \delta}{E} W(\gamma_1). \quad (42)$$

Входящая сюда частотно-зависимая функция

$$W(\gamma_1) = \frac{\sin \gamma_1 \ell}{\gamma_1 \ell} \frac{\sin \gamma_1 \delta}{\gamma_1 \delta}$$

($\gamma_1 = \omega/v_{\text{ст}}$) определяет уровень возбуждения недиспергирующих продольных волн на заданной частоте ω и имеет смысл частотной характеристики ультразвукового преобразователя электромагнитного типа, конструкция которого показана на рис. 3, а.

Для наглядности последующих рассуждений, представим первый сомножитель в формуле (42) в несколько ином виде. Если числитель и знаменатель умножить на площадь поперечного сечения стержня S , то произведение объемной плотности силы на объем, в пределах которого она существует, дает значение внешней силы F . Тогда $2f_0^* \delta S = F$, и выражение (42) принимает следующий вид:

$$U_0^{(\pm)} = \mp \frac{F \ell}{ES} W(\gamma_1). \quad (43)$$

Нетрудно заметить, что при переходе к статическому режиму деформирования, т.е. при $\omega \rightarrow 0$ ($\gamma_1 \rightarrow 0$), функция $W(\gamma_1) = 1$ и смещения материальных частиц поперечных сечений стержня за пределами области нагружения становятся равными $U_0^{(\pm)} = \mp F \ell / ES$. Полученный результат полностью совпадает с элементарными представлениями о характере деформирования стержней при одноосном сжатии – растяжении, которые следуют из закона Гука. Действительно, статические смещения $U_0^{(\pm)}$ – это не что иное как изменение длины стержня, нагруженного внешними силами F . Первоначальная длина деформируемой области стержня составляет 2ℓ . Все остальные поперечные сечения бесконечного стержня, находящиеся слева и справа от области нагружения, смещаются строго на одно и то же расстояние $\pm F \ell / ES$, т.е. участки стержня, примыкающие слева и справа к сжимаемой части стержня ($-\ell \leq z \leq \ell$), перемещаются как единое жесткое целое. Изменение длины деформируемой части стержня будет $\Delta \ell = U_0^{(+)} - U_0^{(-)} = 2F \ell / ES$, относительное изменение длины (деформация) – $\varepsilon = \Delta \ell / 2\ell = F / ES = \sigma / E$. Последнее выражение есть не что иное как закон Гука для одноосного напряженно-деформированного состояния.

Теперь рассмотрим как изменяются смещения материальных частиц стержня по мере возрастания частоты изменения во времени магнитного поля катушки. На рис. 4 показан график изменения модуля функции $W(\gamma_1)$, расчет числовых значений которой произведен в предположении, $\delta = \ell / 2$.

Отчетливо видно, что с ростом безразмерного волнового числа $\gamma_1 \ell$ или, что то же самое, безразмерной частоты $\omega \tau_0$ ($\tau_0 = \ell / v_{\text{ст}}$) значения функции $W(\gamma_1)$ резко уменьшаются, периодически достигая нулевых отметок на частотах, которым соответствуют значения $\gamma_1 \ell = k\pi$ ($k=1, 2, 3, \dots$). Сообразно функции $W(\gamma_1)$ меняется величина смещений материальных частиц во фронте плоской продольной волны. Причиной отмеченных особенностей поведения функции $W(g_1)$ и, как следствие, изменения уровней смещения материальных частиц следует считать явление интерференции упругих волн.

Рассмотрим малый участок стержня, ограниченный поперечными сечениями $z' \pm \Delta z$ и находящийся в поле действия внешних сил в области ($\ell - \delta < z' < \ell + \delta$). Материальные частицы этого участка стержня движутся под действием внешних сил и обмениваются импульсом с соседними частицами, т.е. выделенный участок стержня можно рассматривать как некоторый элементарный (в смысле мощности) излучатель, генерирующий стационарное поле смещений, которое характеризуется стационарным распределением фаз по длине стержня. Другой малый участок, ограниченный сечениями $-z' \pm \Delta z$ и ($-\ell - \delta < -z' < -\ell + \delta$), можно интерпретировать как другой элементарный излучатель, генерирующий свое стационарное поле смещений, которое на данной частоте имеет ту же длину волны, что и поле, излучаемое первым, симметрично расположенным малым участком, и характеризуется также стационарным распределением фаз по длине стержня. Между этими двумя распределениями фаз существует постоянный сдвиг, который пропорционален $2\gamma_1 z'$. В зависимости от частоты колебаний и расстояния между излучающими участками он может приобретать значения от 0 до 2π . Этот фазовый сдвиг будет определять либо взаимное подавление излучения двух участков стержня, симметрично расположенных относительно плоскости $z=0$, либо такое сложение этих полей, которое максимально усиливает результирующее смещение материальных частиц. При некоторых значениях частоты (безразмерного волнового числа) разность фаз между стационарными полями, излучаемыми различными элементарными участками стержня, расположенными симметрично относительно плоскости $z=0$, достигает такой величины, что наступает полная взаимная компенсация смещений материальных частиц, расположенных вне области нагружения стержня внешними силами. Такая ситуация соответствует нулевым амплитудам смещений и периодически повторяется с рас-

том частоты.

По существу, функция $W(\gamma_1)$ является частотной характеристикой рассматриваемого ультразвукового преобразователя. Однако это определение не является исчерпывающе полным. Действительно, при одних и тех же значениях частоты и геометрических параметров конструкции амплитуды продольных волн будут различными для стержней из различных материалов. Это довольно очевидно, так как значения функции $W(\gamma_1)$ целиком определяются значениями волнового числа $\gamma_1 = \omega / v_{\text{ст}} = \omega / \sqrt{E / \rho_0}$. С учетом этого обстоятельства представляется целесообразным называть функцию $W(\gamma_1)$ не частотной, а волновой характеристикой ультразвукового преобразователя. Предлагаемый термин наиболее полно отражает внутреннее содержание аналитического описания процесса возбуждения упругих волн внешними силами, распределенными в объеме деформируемого твердого тела.

Волновая характеристика ультразвукового преобразователя, являющаяся по своей сути математической моделью устройства, имеет не только теоретическое, но и вполне четко обозначенное практическое значение. Действительно, имея в своем распоряжении достаточно полную (в смысле перечня учитываемых физических и геометрических параметров объекта) математическую модель устройства, можно выполнить необходимые расчеты, имеющие характер оптимизирующих процедур. Таким образом можно, не прибегая к длительному и дорогостоящему натурному моделированию, сформулировать рекомендации по выбору вариантов конструктивного исполнения устройства, обладающего наперед заданными параметрами и характеристиками.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные аналитические и количественные результаты представляют теоретическую основу для расчета и проектирования ультразвуковых преобразователей электромагнитного типа, которые применяются в системах различного назначения. В этой части исследования построена общая схема для расчета амплитудных множителей нормальных волн, определяющих частотно-волновые характеристики рассматриваемого преобразователя.

1. Schlawne F., Graff A., Scheider H. Use of EMATs for Inspection of Tubes and Pipes // NDT net.- 2003.- 8, N 3 (see <http://www.ndt.net>).

2. Шпинь А. П. Принципы построения магнито-стрикционных преобразователей измерений // Метрология.– 1986.– N 8.– С. 10-18.
3. Петрицев О. Н., Шпинь А. П., Яблоновский Ю. Г. Способ преобразования перемещений во временной интервал.– Авт. св. СССР N 855710. Заявл. 21.12.79, N 2860542 // БИ.–1981.– N 30.
4. Bayon A., Garson F., Nieves F. J. Estimation of dynamic elastic constants from the amplitude and velocity of Rayleigh waves // J. Acoust. Soc. Amer.– 2005.– 117, N 6.– P. 3469–3477.
5. Wu T.-T., Fang J.-S. A new method for measuring *in situ* concrete elastic constants using horizontally polarized conical transducers // J. Acoust. Soc. Amer.– 1997.– 101, N 1.– P. 330–336.
6. Мей Дж. Волноводные ультразвуковые линии задержки // Физическая акустика. Том 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А.– М.: Мир, 1966.– С. 489–565.
7. Элайсез М., Гарсиа-Моллиер Ф. Распространение волновых пакетов и частотно-зависимое внутреннее трение // Физическая акустика. Том 5. Принципы и методы.– М.: Мир, 1973.– С. 192–253.
8. Kim Y. Y., Park C., Cho S. H., Han S. W. Torsional wave experiments with a new magnetostrictive transducer configuration // J. Acoust. Soc. Amer.– 2005.– 117, N 6.– P. 3459–3468.
9. Johnson W., Auld B. A., Segal E. Trapped torsional modes in solid cylinders // J. Acoust. Soc. Amer.– 1996.– 100, N 1.– P. 285–293.
10. Kwon G., Teller C. M. Magnetostrictive generation and detection of longitudinal, torsional, and flexural waves in a steel rod // J. Acoust. Soc. Amer.– 1994.– 96, N 2.– P. 1202–1204.
11. Петрицев О. Н. Возбуждение волн Рэлея в металлической полосе, поляризованной постоянным магнитным полем // Акуст. вісн.– 2005.– 8, N 1-2.– С. 85–95.
12. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 283 с.
13. Greenspon J. E. Vibration of a thick-walled cylindrical shell.– Comparison of the exact theory with approximate theories // J. Acoust. Soc. Amer.– 1960.– 32, N 5.– P. 571–578.
14. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Свойства поверхностных волн в упругом полом цилиндра // Акуст. вісн.– 2004.– 7, N 3.– С. 39–48.
15. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики.– М.: Высшая школа, 1970.– 710 с.
16. Петрицев О. Н. Принципы построения математических моделей ультразвуковых преобразователей электромагнитного типа в режиме возбуждения упругих волн // Электроника и связь.– 2005.– N 25.– С. 50–61.