ISSN 1028-7507 Акустичний вісник. 2006. Том 9, N 4. С. 50 – 55

УДК 517.9:534.8

МЕТОД СИММЕТРИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ И ПРОЕКТИРОВАНИИ АКУСТИЧЕСКИХ КОНЦЕНТРАТОРОВ

К. А. ТРАПЕЗОН

Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев

Получено 18.09.2006 ⋄ Пересмотрено 02.11.2006

Предложен новый аналитический метод точного решения задачи о колебаниях стержней, имеющих сложную геометрию, на основе использования дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Эффективность такого подхода проиллюстрирована на примерах его реализации при построении новых профилей концентраторов.

Запропоновано новий аналітичний метод точного розв'язку задачі коливань стержнів, які мають складну геометрію, на основі використання диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами. Ефективність такого підходу проілюстровано на прикладах його реалізації при побудові нових профілів концентраторів.

A new analytical method is offered for obtaining an exact solution for the problem on vibrations of rods, having complex geometry, on the basis of using the second-order differential equation with variable coefficients. The efficiency of such approach is shown on the examples of its realization when designing new profiles of thickeners.

ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных проблем при разработке концентраторов акустической энергии связана с решением задачи на собственные значения для стержня переменного поперечного сечения. Возникающие при этом трудности состоят в поиске решения дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (профиль концентратора определяется видом этих коэффициентов). В настоящее время такие профили строятся с помощью простейших функций, вид которых ограничен возможностью выбора решений соответствующих дифференциальных уравнений из справочников [1, 2].

В контексте современной математической физики перспективными являются теоретико-групповые методы, в основе которых лежит понятие симметрии [3 – 6]. Обобщенное и наглядное его толкование дано Г. Вейлем [7]: "объект обладает свойством симметрии, если с ним можно сделать нечто такое, после чего он будет иметь такой же вид, как и раньше". Применительно к дифференциальным уравнениям это определение реализуется для тех или иных групп преобразований, вследствие которых данное уравнение остается инвариантным. Достаточная гибкость и эффективность такого подхода при решении задач о колебаниях упругих элементов была установлена в работе [8].

К сожалению, в настоящее время, исходя из анализа большого массива публикаций по групповым методам (их обобщением можно считать работы [9 – 12]), не представляется возможным сделать общий вывод о путях практической реализации идеи симметрии при решении задач на собственные значения. Поэтому целью данной статьи является развитие метода симметрий для расчета и проектирования концентраторов с наперед заданными параметрами.

1. СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Волновое уравнение, определяющее формы собственных колебаний стержня переменного поперечного сечения, имеет вид

$$W'' + 2\frac{D'}{D}W' + k^2W = 0 \qquad (1)$$

или

$$W'' + \frac{F'}{F}W' + k^2W = 0. \qquad (1')$$

Здесь D – диаметр поперечного сечения стержня как тела вращения; F – площадь поперечного сечения; $k = l\omega/c$ – волновое число или собственное значение задачи; $\omega = 2\pi f$ – круговая собственная частота колебаний стержня; f – частота колебаний; $c = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольной волны в стержне; E – модуль упругости; ρ – плотность материала; l – длина стержня. Штрихи обозначают производные по переменной x, отнесенной к длине стержня l. При выводе уравнения (1) полагают, что поперечные деформации малы. Это равносильно условию $l \gg D$.

Принцип эффективного функционирования акустического концентратора как стержня переменного сечения заключается в выборе при его проектировании такой функции $D = D(x)$, чтобы отношение амплитуд перемещений $W(x)$ на свободных концах устройства было максимально возможным.

Как уже говорилось, в настоящее время проблема заключается в недостаточной широте набора функций $D(x)$, при которых возможно решение уравнения (1) (большинство из них представлены в известном руководстве Э. Камке [1]). Именно на основе этих профилей и предлагались различные типы концентраторов [2]. Расширение количества случаев, при которых уравнение (1) может быть разрешено без привлечения численных методов, возможно на основе идеи симметрий дифференциальных уравнений.

Ниже приводится метод построения симметрий волнового уравнения (1), благодаря чему оно может быть рассмотрено с полнотой, достаточной для расчета и проектирования концентраторов продольных колебаний при практически неограниченном выборе профиля $D(x)$.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ МЕТОДА

Для построения симметрий волнового уравнения (1) рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений первого порядка для некоторых функций $W(x)$ и $W_1'(x)$ (далее для краткости аргумент функции будем опускать):

$$W' = aW + bW_1, \tag{2}$$

$$AW_1' = aW + bW_1. \tag{3}$$

Здесь a, b, A – некоторые переменные коэффициенты. Из уравнений (2) и (3) следует, что

$$W_1 = \frac{W' - aW}{b}\,, \tag{4}$$

$$W = \frac{AW_1' - bW_1}{a}\,. \tag{5}$$

После дифференцирования соотношений (4) и (5) и внесения полученных выражений для W_1' и W' в соответствующие формулы приходим к двум дифференциальным уравнениям второго порядка относительно функций W и W_1:

$$W'' - W'\left[a + \frac{b}{A} + \frac{b'}{b}\right] - Wa\left[\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right] = 0, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} W_1'' - W_1'\left[a + \frac{b}{A} + \frac{a'}{a} - \frac{A'}{A}\right] + \\ + W_1\frac{b}{A}\left[\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right] = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Если соотношению (6) придать вид волнового уравнения для стержня переменного сечения (тип (1)), то согласно введенному понятию симметрий, формула (7) как симметрия уравнения (1) должна иметь аналогичную форму, т. е.

$$W_1'' + 2\frac{D_1'}{D_1}W_1' + k_1^2 W_1 = 0. \tag{8}$$

Исходя из этого, введем систему обозначений, которая одновременно будет системой дифференциальных уравнений относительно искомых параметров a, b, A:

$$\begin{gathered} a + \frac{b}{A} + \frac{b'}{b} = -2\frac{D'}{D}\,, \\ a + \frac{b}{A} + \frac{a'}{a} - \frac{A'}{A} = -2\frac{D_1'}{D_1}\,, \\ a\left[\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right] = -k^2, \\ \frac{b}{A}\left[\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right] = k_1^2. \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь D, D_1 – переменные диаметры; k, k_1 – соответствующие волновые числа.

Из соотношений (9), опуская промежуточные выкладки, получим

$$a = -k^2\frac{U}{U'}\,, \qquad b = -\frac{1}{U'}\,, \qquad A = -\frac{1}{k_1^2 U}\,. \tag{10}$$

При этом связь между D и D_1, k^2 и k_1^2 должна соответствовать зависимостям

$$D_1 = \frac{D}{U}\,, \qquad \alpha^2 = k^2 - k_1^2, \tag{11}$$

а функция U – определяться из уравнения

$$U'' - 2\frac{D'}{D}U' + \alpha^2 U = 0, \tag{12}$$

где α^2 – произвольная постоянная.

Внеся определенные таким образом переменные параметры a, b, A в соотношения (4) и (5), получаем соответственно

$$W_1 = \frac{W' - aW}{b} = -(k^2 UW + U'W'), \tag{13}$$

$$W=\frac{AW_1'-bW_1}{a}=\frac{U'W_1'-k_1^2UW_1}{k^2k_1^2U^2}\,. \qquad (14)$$

Из выражений (13) и (14) взаимно определяются решения уравнений (8) либо (1), если известны решения уравнений (1) либо (8) соответственно. Сравнивая формулы (2) и (3), приходим к выводу, что

$$W'=AW_1'.$$

Кроме того, после подстановки сюда значения A, определенного согласно правилу (10), имеем

$$W_1'=-k_1^2UW'. \qquad (15)$$

В выражения (13) – (15) входит функция U. Поэтому для полного решения поставленной задачи необходимо установить ее вид, исходя из уравнения (12).

При решении уравнения (12) следует рассмотреть два варианта.

- $\boldsymbol{\alpha^2=0}$. Тогда уравнение (12) упрощается и сводится к виду

$$U''-2\frac{D'}{D}U'=0.$$

Отсюда непосредственным интегрированием получаем

$$U=\int D^2dx+C, \qquad (16)$$

где C – существенная произвольная постоянная. При этом, согласно (11), $k_1^2=k^2$, а для диаметра D_1 имеет место зависимость

$$D_1=\frac{D}{\displaystyle\int D^2dx+C}\,. \qquad (17)$$

- $\boldsymbol{\alpha^2\neq 0}$. В этом случае решение уравнения (12) можно получить, если найти его симметрию из нижеследующих уравнений, подобных (2) и (3):

$$U'=-D^2\alpha^2U_1, \qquad (18)$$

$$U=D^2U_1'. \qquad (19)$$

После их дифференцирования и подстановки полученных соотношений в формулы (18) и (19) приходим к двум дифференциальным уравнениям второго порядка для переменных U и U_1:

$$U''-U'2\frac{D'}{D}+\alpha^2U=0, \qquad (20)$$

$$U_1''+2\frac{D'}{D}U_1'+\alpha^2U_1=0. \qquad (21)$$

Так как уравнение (20) совпадает с (12), а соотношение (21) является симметрией уравнения (20), то согласно формулам (18) и (19) можно найти U при условии, что известны решения для U_1.

Сравнивая уравнения (21) и (1), приходим к выводу, что искомые U_1 автоматически получаются из решений уравнения (1), но при условии, если в найденных (известных) выражениях для W везде заменить волновое число k произвольно выбираемым коэффициентом α:

$$k\Leftrightarrow\alpha.$$

Тогда из соотношения (19) получим

$$U=FU_1'=D^2U_1'=D^2W_{k\Leftrightarrow\alpha}'\,. \qquad (22)$$

Поэтому, исходя из зависимостей (11), при $\alpha^2\neq 0$ вид функции D_1 при известной функции D определяется как

$$D_1=\frac{D}{U}=\frac{1}{DW_{k\Leftrightarrow\alpha}'}\,. \qquad (23)$$

Таким образом, построена замкнутая система соотношений, позволяющих найти решения соответствующего волнового уравнения вида (8) с параметрами D_1 и k_1, если только известно решение волнового уравнения с параметрами D и k.

3. ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА

Для удобства сведем все требуемые для расчета соотношения в следующую систему:

$$W''+2\frac{D'}{D}W'+k^2W=0,$$

$$W_1''+2\frac{D_1'}{D_1}W_1'+k_1^2W_1=0, \qquad (24)$$

$$U''-2\frac{D'}{D}U'+\alpha^2U=0.$$

Здесь

$$D_1=\frac{D}{U}\,;$$

$$W_1=-(k^2UW+U'W');$$

$$W_1'=-k_1^2UW';$$

$$U = \begin{cases} D^2 W'_{k\Leftrightarrow\alpha}, & k_1^2 = k^2 - \alpha^2, \quad \alpha \neq 0, \\ \displaystyle\int D^2 dx + C, & k_1^2 = k^2, \qquad \alpha = 0. \end{cases}$$

Реализацию метода осуществим на некоторых простейших примерах исходных конфигураций $D(x)$.

3.1. Концентратор постоянного поперечного сечения $D(x) = \mathrm{const} = 1$

Для этого профиля известно решение уравнения (1) и его производная [1]:

$$W(x) = A \sin kx + B \cos kx,$$

$$W'(x) = k[A \cos kx - B \sin kx],$$

где A, B – коэффициенты, которые определяются из граничных условий.

Предположим, что $\alpha^2 \neq 0$, тогда

$$U = D^2 W'_{k\Leftrightarrow\alpha} = D^2(kA \cos \alpha x - kB \sin \alpha x),$$

или, после замены постоянных коэффициентов D^2kA, D^2kB произвольными постоянными a и b:

$$U = a \sin \alpha x + b \cos \alpha x.$$

Преобразуем это выражение, введя следующие обозначения для постоянных коэффициентов:

$$a = \beta \cos \gamma, \qquad b = \beta \sin \gamma.$$

Тогда можно записать

$$U = \beta \sin(\alpha x + \gamma),$$

$$U' = \alpha\beta \cos(\alpha x + \gamma).$$

Исходя из соотношения (24), профиль вновь созданного концентратора подчиняется следующему закону изменения поперечного сечения:

$$D_1(x) = \frac{D_{01}}{\sin(\alpha x + \gamma)},$$

где $D_{01} = 1/\beta$. Решение уравнения (1) для искомого профиля определяется из выражений (24):

$$W_1(x) = -(k^2 UW + U'W') =$$

$$= A[k^2 \beta \sin(\alpha x + \gamma) \sin kx +$$

$$+ k\alpha\beta \cos(\alpha x + \gamma) \cos kx] +$$

$$+ B[k^2 \beta \sin(\alpha x + \gamma) \cos kx -$$

$$- k\alpha\beta \cos(\alpha x + \gamma) \sin kx].$$

Производная от этой функции имеет вид

$$W_1'(x) = -k_1^2 \beta \sin(\alpha x + \gamma) k[A \cos kx - B \sin kx],$$

т. е. с точностью до сомножителя перед квадратными скобками равна производной от решения для стержня постоянного поперечного сечения.

С учетом этого обстоятельства вычисление собственных значений k_1 для задачи о стержнях со свободными концами, диаметры $D_1(x)$ которых изменяются установленным выше образом, становится очень простым. В этом случае достаточно найти k для исходной задачи о стержне постоянного поперечного сечения со свободными концами, после чего воспользоваться соотношением $k_1^2 = k^2 - \alpha^2$, содержащемся в сводке (24). Например, первым корнем частотного уравнения $\sin k = 0$ для стержня с $D = \mathrm{const}$ будет $k = \pi$. Поэтому первый корень для стержней диаметром $D = D_{01}/\sin(\alpha x + \gamma)$ автоматически вычисляется по формуле $k_1 = \sqrt{\pi^2 - \alpha^2}$.

3.2. Концентратор конусной формы $D(x) = D_0 x$

Для этого профиля решение уравнения (1) и его производная имеют вид [2]

$$W(x) = \frac{1}{x}(A \sin kx + B \cos kx),$$

$$W'(x) = \frac{1}{x^2}(A(kx \cos kx - \sin kx) -$$

$$- B(kx \sin kx + \cos kx)).$$

Для нахождения функций U и D_1 по установленному алгоритму (24) в W' заменим постоянные A, B произвольными постоянными a, b, а волновое число k – произвольной постоянной $\alpha \neq 0$. Кроме того, предполагаем, что $a^* = b/a$. В результате получим

$$U = \lim_{\substack{A \to a \\ B \to b \\ k^2 \to \alpha^2}} D^2 W' = D_0^2 x^2 \Big\{ \frac{1}{x^2} \times$$

$$\times [a(\alpha x \cos \alpha x - \sin \alpha x) - b(\alpha x \sin \alpha x + \cos \alpha x)] \Big\},$$

т. е.

$$U = D_0^2 [a(\alpha x \cos \alpha x - \sin \alpha x) -$$

$$- b(\alpha x \sin \alpha x + \cos \alpha x)]$$

и, соответственно,

$$D_1 = \frac{D}{U} = \frac{1}{DW'} = \frac{x}{D_0} \times$$

$$\times \frac{1}{a(\alpha x \cos\alpha x - \sin\alpha x) - b(\alpha x \sin\alpha x + \cos\alpha x)} .$$

Для удобства это выражение перепишем, введя вместо $1/D_0$ масштабный коэффициент D_{01} (если $a=-1$):

$$D_1 = D_{01} \frac{x}{(a^* - \alpha x)\cos\alpha x + (1 + a^* \alpha x)\sin\alpha x} .$$

Аналогично, функцию U и ее производную следует записать в виде

$$U = D_0^2 [(a^* - \alpha x)\cos\alpha x + (1 + a^* \alpha x)\sin\alpha x],$$

$$U' = D_0^2 \alpha^2 x (a^* \cos\alpha x + \sin\alpha x).$$

Для полученного профиля концентратора определим функцию $W_1(x)$ и ее производную $W_1'(x)$. Согласно соотношениям (24),

$$W_1 = -(k^2 U W + U' W').$$

Подставив сюда выражения для U, U', W, W', учтя, что $k_1^2 = k^2 - \alpha^2$, и опустив постоянный множитель D_0^2, получим

$$W_1(x) = -\frac{1}{x}[A(\phi_1 \sin kx + \phi_2 \cos kx) +$$

$$+ B(\phi_1 \cos kx - \phi_2 \sin kx)],$$

где

$$\phi_1 = (k_1^2 a^* - k^2 \alpha x)\cos\alpha x + (k_1^2 + k^2 a^* \alpha x)\sin\alpha x;$$

$$\phi_2 = k\alpha^2 x(\sin\alpha x + a^* \cos\alpha x).$$

Исходя из формул (24), производная $W_1'(x)$ определяется без дифференцирования W:

$$W_1'(x) = -k_1^2 U W' =$$

$$= -\frac{k_1^2}{x^2}[\cos\alpha x(a^* - \alpha x) + \sin\alpha x(1 + a^* \alpha x)] \times$$

$$\times [A(kx \cos kx - \sin kx) - B(kx \sin kx + \cos kx)].$$

Естественно, при последующих вычислениях необходимо иметь ввиду, что собственные значения (волновые числа) k, входящие в выражения W_1 и W_1', заменяются числами k_1, вычисляемыми как $k^2 = k_1^2 + \alpha^2$.

3.3. Конусный концентратор с $\alpha = 0$

Рассмотрим пример реализации метода для случая, когда $\alpha = 0$. Применим дважды изложенный метод к исходной системе, используемой в примере для концентратора конусной формы, положив $\alpha = 0$ в уравнении для U. Далее используем свойства (18) и (19). Опуская промежуточные выкладки, получаем, что

$$D(x) = D_0 \frac{x^6 + 5Cx^3 - 5C^2 + C_1 x}{x^3 + C} ,$$

где D_0, C, C_1 – произвольные постоянные.

Для этого случая решение волнового уравнения $W(x)$ и его производная $W'(x)$ имеют вид

$$W(x) = -\frac{1}{q(x)} \times$$

$$\times \{A[(k^2 p(x) - 3x)\sin kx + 3kx^2 \cos kx] +$$

$$+ B[(k^2 p(x) - 3x)\cos kx - 3kx^2 \sin kx]\},$$

$$W'(x) = \frac{p(x)}{q^2(x)} \times$$

$$\times \{A[a(x)\sin kx + kb(x)\cos kx] +$$

$$+ B[a(x)\cos kx - kb(x)\sin kx]\}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$q(x) = x^6 + 5Cx^3 - 5C^2 + C_1 x;$$

$$p(x) = x^3 + C;$$

$$a(x) = k^2(6x^5 + 15Cx^2 + C_1) - 15(x^3 + C);$$

$$b(x) = 15x(x^3 + C) - k^2(x^6 + 5Cx^3 - 5C^2 + C_1 x).$$

Удовлетворяя граничным условиям

$$W'(0) = W'(1) = 0,$$

получим уравнение частот в виде

$$\mathrm{tg}\, k = \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta} ,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{k}\left(\delta - 1 + \frac{\delta + 1}{C} + \frac{3}{k^2 C} + \frac{1}{5C^2}\right) = \frac{A}{B} ;$$

$$\beta = \frac{k}{1 - \dfrac{k^2(1 + C)}{3 + k^2 C\delta}} .$$

При этом дополнительно введено обозначение

$$\delta = \frac{D(x=1)}{D(x=0)},$$

в силу чего коэффициент C_1 может быть представлен в виде

$$C_1 = 5C^2(1-\delta) - 5C(1+\delta) - 1.$$

Для отношения амплитуд перемещений на свободных концах концентратора данного типа, которое характеризует его усиление M, справедлива запись

$$M = \frac{W(1)}{W(0)} = \frac{1}{\delta}\left\{\left[1 + \frac{3(k\alpha - 1)}{k^2(1+C)}\right]\cos k + \right.$$

$$\left. + \left[\alpha - \frac{3}{k^2(1+C)}(\alpha + k)\right]\sin k\right\}.$$

Задание различных значений коэффициентов δ и C позволяет строить профили концентраторов и определять его параметры k, M, l.

Таким образом, приведенные примеры реализации показывают эффективность предложенного аналитического метода, основанного на идее симметрии соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Предложен аналитический метод строгого (в рамках модели тонкого стержня) решения задачи о колебаниях стержней на основе дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, дающий возможность математически обосновать задание новых конфигураций концентраторов акустической энергии.

2. Показана эффективность метода на примерах его реализации при построении новых профилей концентраторов. В частности, удалось значительно расширить существующие положения теории проектирования и анализа концентраторов акустической энергии. Кроме того, следует отметить достигнутое упрощение при построении форм собственных колебаний и вычислении собственных частот.

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.: Наука, 1971.– 576 с.

2. *Писаревский М. М.* Расчет переходных стержней для магнитострикционных вибраторов // Тр. науч.-техн. совещ. по изучению рассеяния энергии при колебаниях упругих тел.– К.: Изд-во АН УССР, 1958.– С. 54–89.

3. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных.– М.: Мир, 1981.– 344 с.

4. *Ибрагимов Н. Х., Руденко О. В.* Принцип априорного использования симметрий в теории нелинейных волн // Акуст. ж.– 2004.– **50**, N 4.– С. 481–495.

5. *Giampaolo C.* “Weak” symmetries and adapted variables for differential equation // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.– 2004.– **1**, N 1-2.– P. 23–31.

6. *Архипов Ю. Ю.* О симметриях дискретных моделей уравнения Больцмана.– М.: Препр. РАН, Ин-т прикл. мат. N 70, 2004.– 16 с.

7. *Вейль Г.* Симметрия.– М.: Едиториал УРСС, 2003.– 192 с.

8. *Трапезон А. Г.* Расчет упругих элементов при резонансных усталостных испытаниях.– К.: Наук. думка, 1983.– 96 с.

9. *Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.* Приближенные симметрии уравнений с малым параметром.– М.: Препр. АН СССР, Ин-т прикл. мат. N 150-87, 1987.– 29 с.

10. *Радаев Ю. Н., Гудков В. А.* Группы симметрий дифференциальных уравнений осесимметричной задачи математической теории пластичности // Вестн. Самар. гос. ун-та.– 2004.– N 4.– С. 99–111.

11. *Бойко В. М.* Симетрiя нелiнiйних рiвнянь гiдродинамiчного типу.– К.: Дис. канд. фiз.-мат. наук, 1995.– 110 с.

12. *Li H., Ruan H.* Symmetries and similarity reductions of nonlinear diffusion equation // Commun. Theor. Phys.– 2004.– **42**, N 2.– P. 201–205.