

УДК 539.3

ДИФРАКЦІЯ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ НА ПЕРІОДИЧНИХ СИСТЕМАХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПОРОЖНИН ТА ЖОРСТКИХ ВКЛЮЧЕНЬ

О. М. ЛОЖКІН, О. М. НАЗАРЕНКО

*Сумський державний університет**Одержано 28.09.2006*

Розв'язані плоскі задачі дифракції пружних гармонічних хвиль на періодичних системах циліндричних порожнин або жорстких включень. За допомогою побудованих інтегральних зображень амплітуд переміщень відбитого хвильового поля крайові задачі зведені до систем сингулярних інтегральних рівнянь, які розв'язуються чисельно. Проаналізовано напружено-деформований стан середовища поблизу межі циліндрів у залежності від механічних, динамічних та геометричних характеристик.

Решены плоские задачи дифракции упругих гармонических волн на периодических системах цилиндрических полостей или жестких включений. С помощью построенных интегральных представлений амплитуд перемещений отраженного волнового поля крайевые задачи сведены к системе сингулярных интегральных уравнений, которые решаются численно. Проанализировано напряженно-деформированное состояние среды вблизи границы цилиндров в зависимости от механических, динамических и геометрических характеристик.

The paper deals with solving of the plane problems of diffraction of elastic harmonic waves on periodic systems of cavities or rigid inclusions. By means of developed integral representations for displacement amplitudes of the reflected field, the boundary problems are reduced to the systems of singular integral equations that are solved numerically. The stress-strain state of the medium near the boundary of the cylinders is analyzed depending on the mechanical, dynamic and geometrical characteristics.

ВСТУП

Елементи конструкцій, що використовуються в техніці або будівництві, як правило, працюють в умовах динамічних навантажень і часто містять велику кількість неоднорідностей, розташованих вздовж однієї лінії на однаковій відстані одна від одної. Таку скінченну систему включень з великим ступенем точності можна апроксимувати нескінченною, а саме, періодичною системою. Тоді для дослідження напружено-деформованого стану об'єкта прийнятно обмежитись вивченням відповідної періодичної задачі динамічної теорії пружності. При оцінюванні ресурсу конструкції, яка знаходиться під дією циклічних навантажень, викликає інтерес аналіз взаємодії хвиль переміщень та напружень у пружному середовищі з отворами або включеннями. Тому вивчення дифракції пружних хвиль на періодичних системах неоднорідностей у необмеженому середовищі слід вважати актуальним.

Перші дослідження задач дифракції пружних хвиль на неоднорідностях типу порожнин та включень зазвичай ґрунтувалися на методах розвинення у ряд за власними функціями. Цей аналітичний підхід особливо ефективний при розв'язанні плоских та антиплоских задач взаємодії пружних гармонічних хвиль в ізотропному середовищі з одиночними круговими порожнинами, недефор-

мівними й пружними включеннями [1–3] та системами таких неоднорідностей (зокрема, періодичних [2, 4]). За допомогою конформних відображень метод розвинення у ряд за власними функціями був узагальнений на випадок некругових циліндричних розсіювачів (з квадратним, трикутним, еліптичним перерізами) [2, 5, 6]. Детальний огляд літератури про взаємодію пружних хвиль з неоднорідностями канонічної форми міститься у роботах [1, 2].

У роботі [7] методом суперпозиції [8] досліджено енергетичний резонанс у випадку вимушених гармонічних коливань пружного шару з циліндричним круговим отвором (одна поверхня шару жорстко зацемлена, а інша – вільна від напружень).

При розв'язанні динамічних задач у випадку неоднорідностей складної геометрії ефективно використовується апарат методу R -функцій [9, 10], променеві методики [11], підходи, що ґрунтуються на побудові граничних інтегральних рівнянь [12–17], та ін.

При дослідженні хвильових полів у середньочастотному діапазоні одним з найбільш поширених і ефективних є метод інтегральних рівнянь, яким у статті [12] досліджено задачу дифракції пружних плоских хвиль на порожнинах, включеннях та тріщинах. На базі побудованих інтегральних зображень хвильових потенціалів (окремо для

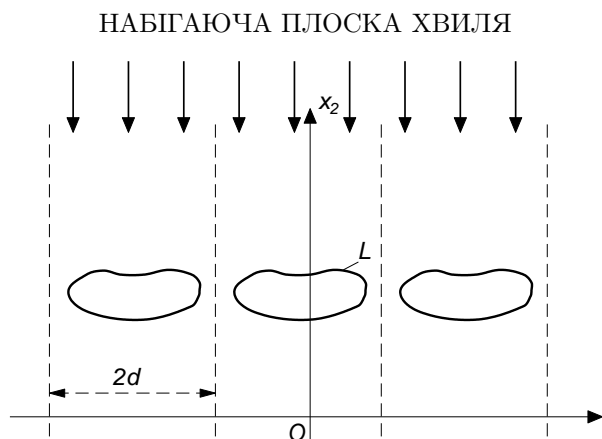


Рис. 1. Взаємодія плоских гармонічних хвиль з періодичною системою неоднорідностей

кожного типу розсіювача) крайові задачі зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь. На відміну від [12], у [13] використано більш універсальний підхід, згідно з яким будуються загальні інтегральні зображення для амплітуд переміщень хвильового поля, які дають змогу отримати систему сингулярних інтегральних рівнянь для кожного типу розсіювачів (порожнин, жорстких та пружних включень). У роботі [14] на основі методу граничних елементів та ітераційних методів розв'язано задачу дифракції плоских хвиль на циліндричному круговому включенні з мішаними граничними умовами у пружному середовищі-матриці. Враховано можливість проковзування з сухим тертям деяких невідомих інтервалів межі циліндра відносно матриці.

Метод інтегральних рівнянь також широко використовується для розв'язання періодичних задач дифракції. На основі чисельного розв'язання інтегральних рівнянь [15] і застосування одномодової апроксимації [16] розглянуто плоску задачу проходження хвильового поля крізь періодичну систему прямокутних циліндричних порожнин при довжинах хвиль, більших за період решітки. З використанням одномодової апроксимації у роботі [16] отримані аналітичні вирази для коефіцієнтів проходження та відбиття хвильового поля. Порівняння з результатом, отриманим чисельним розв'язанням інтегральної системи рівнянь, показало, що одномодова апроксимація може бути ефективно застосована у випадку низькочастотних хвильових полів.

Підхід, запропонований у [13], був розвинутий стосовно до періодичної системи нерухомих включень довільного поперечного перерізу. У статті [17]

одержано розподіли напружень на контурах еліптичних неоднорідностей при різних параметрах навігаючої хвилі, пружних характеристиках середовища та геометрії включень.

У даному дослідженні аналізуються та порівнюються напружено-деформовані стани середовищ, які містять періодичні системи циліндричних жорстких включень або порожнин довільного поперечного перерізу в умовах плоскої деформації.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо необмежене пружне ізотропне середовище зі щільністю ρ та коефіцієнтами Ламе λ і μ , яке містить $2d$ -періодичну вздовж осі Ox_1 систему циліндричних порожнин або жорстких включень (рис. 1). Поперечні перерізи циліндрів площиною $x_3 = 0$ обмежені замкнутими контурами типу Ляпунова. Нехай на періодичну структуру з нескінченності набігає гармонічна хвиля розширення – стиску (Р-випадак)

$$U_1^{(0)} = 0, \quad U_2^{(0)} = \tau_1 e^{-i\gamma_1 x_2}, \quad \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1} \quad (1)$$

або зсуву (SV-випадак)

$$U_1^{(0)} = \tau_2 e^{-i\gamma_2 x_2}, \quad U_2^{(0)} = 0, \quad \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}. \quad (2)$$

Тут c_1 і c_2 – швидкості подовжньої і поперечної хвиль відповідно; ω – кругова частота коливань; ν – коефіцієнт Пуассона; i – комплексна одиниця (часовий множник $e^{-i\omega t}$ тут і надалі опущено).

Взаємодіючи з включенням, навігаюча хвиля породжує відбиті подовжні та поперечні хвилі. Відбите хвильове поле переміщень повинно задовольняти умовам випромінювання на нескінченності та рівнянням руху Ламе. Крім того, повинні виконуватися відповідні умови на границях циліндрів.

На контурі L порожнини необхідно забезпечити рівність нулю амплітуд компонентів S_1 і S_2 головного вектора напружень:

$$S_1|_L = 0, \quad S_2|_L = 0. \quad (3)$$

У випадку жорсткого включення граничні умови мають вигляд

$$\begin{aligned} U_1|_L &= B_1 - \omega_0 \eta, \\ U_2|_L &= B_2 + \omega_0 \xi, \end{aligned} \quad (4)$$

$$P(\xi, \eta) \in L.$$

Тут U_1 і U_2 – амплітуди компонентів головного вектора переміщень; B_1 , B_2 і ω_0 – амплітуди поступального руху та жорсткого повороту включення.

Враховуючи співвідношення (4) та використовуючи другий закон Ньютона, отримуємо рівняння, які описують поступальний рух жорсткого включення:

$$\int_L S_m ds = -\omega_0^2 \rho_0 S_0 B_m, \quad m = 1, 2. \quad (5)$$

Рівняння, що описує обертальний рух включення, має вигляд

$$\int_L (S_1(\eta - y) - S_2(\xi - x)) ds = -\omega^2 J_A \omega_0, \quad (6)$$

де S_0 – площа, обмежена контуром L ; ρ_0 – густина матеріалу включення; J_A – момент інерції включення відносно довільної точки $A(x, y)$. Величини S_1 і S_2 виражаються через компоненти тензора амплітуд напружень τ_{11} , τ_{22} і τ_{12} за формулами

$$2i(S_1 + iS_2) = (\tau_{11} + \tau_{22})e^{i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} - 2i\tau_{12})e^{-i\varphi_0}, \quad (7)$$

$$-2i(S_1 - iS_2) = (\tau_{11} + \tau_{22})e^{-i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12})e^{i\varphi_0},$$

де φ_0 – кут між віссю Ox_1 та дотичною до L у точці $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$.

На межі циліндрів нас буде цікавити розподіл амплітуд напружень

$$\begin{aligned} \tau_n &= S_1 \sin \varphi_0 - S_2 \cos \varphi_0, \\ \tau_{ns} &= S_1 \cos \varphi_0 + S_2 \sin \varphi_0, \\ \tau_s &= (\tau_{11} + \tau_{22}) - \tau_n. \end{aligned} \quad (8)$$

2. МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Запропонований підхід ґрунтується на побудові інтегральних зображень амплітуд компонентів переміщень відбитого хвильового поля $U_1^{(1)}$ і $U_2^{(1)}$ у такому вигляді, щоб вони автоматично задовольняли рівнянням руху та умовам випромінювання на нескінченності. Слідуючи [13], подамо $U_1^{(1)}$ і $U_2^{(1)}$ у вигляді потенціалів типу простого шару (підсумовування проводимо по $n = 1, 2$):

$$U_k^{(1)}(M) = \int_L V_n^{(k)}(M, P) p_n(s) ds, \quad k = 1, 2. \quad (9)$$

Тут $p_n(s)$ – невідомі функції; $V_n^{(k)}$ – компоненти матриці Гріна. Останні являють собою амплітуди переміщень у точці M при дії періодичної

системи гармонічних сил, зосереджених у точках $\zeta_j = \xi + 2jd + i\eta \in L_j$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) і направлених вздовж осі Ox_1 ($k=1$) або Ox_2 ($k=2$).

Амплітуди переміщень $V_n^{(k)}$ знаходимо зі співвідношень

$$\begin{aligned} V_1^{(2)} &= V_2^{(1)} = -(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ V_1^{(1)} &= \mu \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} + \rho\omega^2, \\ V_2^{(2)} &= \mu \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \rho\omega^2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$(\Delta + \gamma_1^2)(\Delta + \gamma_2^2)G = cF,$$

$$c = -\frac{1}{\mu(\lambda + 2\mu)},$$

$$F = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x_1 - \xi + 2jd, x_2 - \eta),$$

де Δ – оператор Лапласа; $\delta(x_1, x_2)$ – дельта-функція Дірака.

Фундаментальний розв'язок рівняння (10) має вигляд

$$\begin{aligned} G(M, P) &= -\frac{c}{2d(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \times \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-\beta_1|x_2-\eta|}}{\beta_1} - \frac{e^{-\beta_2|x_2-\eta|}}{\beta_2} \right) \times \\ &\times \frac{\cos \alpha_j(x_1 - \xi)}{1 + \delta_{j0}}, \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$\alpha_j = \frac{\pi j}{d}; \quad \beta_m = \begin{cases} \sqrt{\alpha_j^2 - \gamma_m^2}, & \alpha_j > \gamma_m, \\ -i\sqrt{\gamma_m^2 - \alpha_j^2}, & \alpha_j < \gamma_m; \end{cases}$$

δ_{jk} – символ Кронекера.

Аналіз рядів у розкладі (11) показує, що функція G характеризується розкладом

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r + \dots, \quad r = |z - \zeta|, \\ z &= x_1 + ix_2, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L. \end{aligned}$$

Якщо вона відома, то компоненти матриці Гріна можуть бути знайдені за допомогою співвідношень (10). Відзначимо, що компоненти $V_1^{(2)}$ і

$V_2^{(1)}$ неперервні у точці прикладання зосередженої сили, а $V_1^{(1)}$ і $V_2^{(2)}$ мають логарифмічну особливість. З метою побудови ефективного чисельного алгоритму вона виділялася у явному вигляді. Для цього розв'язок (11) представлявся у вигляді $G = G_0 + (G - G_0)$, де G_0 – періодичний фундаментальний розв'язок бігармонічного рівняння

$$\Delta^2 G_0 = cF,$$

яке відповідає статичній задачі.

Відзначимо також, що за рахунок вибору виразу для β_m у формулі (11) виконуються умови випромінювання на нескінченності, тобто відбите хвильове поле має характер хвиль, які розходяться [18]. Залишається виконати граничні умови на границі циліндра.

Для спрощення аналізу граничних інтегральних рівнянь, які виникають при цьому, зручно ввести нові невідомі щільності за допомогою співвідношень

$$f_1(s) = p_1(s) + ip_2(s),$$

$$f_2(s) = p_1(s) - ip_2(s).$$

Тоді, виконуючи граничні умови (3) на контурі порожнини, приходимо до системи сингулярних інтегральних рівнянь другого роду:

$$-\frac{1}{2}f_m(s_0) + \int_L E_{mn}(s_0, s)f_n(s)ds = N_m(s_0). \quad (12)$$

Тут $m = 1, 2$; підсумовування проводиться по $n = 1, 2$;

$$E_{mn} = (-1)^{m+1} \frac{\lambda + \mu}{4di(\lambda + 2\mu)} \left(D_{mn} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_{mj}}{1 + \delta_{j0}} \right);$$

$$2D_{11} = \varkappa a_2 e^{-i\varphi_0} - a_1 e^{i\varphi_0};$$

$$D_{22} = \bar{D}_{11};$$

$$D_{mn} = (-1)^m i a_n \sin \varphi_0 + b_n, \quad m \neq n;$$

$$F_{nn} = [k_n h_n^2 + (e_1 + e_2)q_1 - (-1)^n h_0 i (d_1 + d_2)q_2 - w_n] h_n;$$

$$F_{mn} = [k_n h_m^2 (v_2 + e_1 - e_2)q_1 - (-1)^m h_0 i (v_1 + 3(d_1 - d_2))q_2 + r_m] h_n, \quad m \neq n;$$

$$\varkappa = 3 - 4\nu;$$

$$a_1 = \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2d}; \quad a_2 = \bar{a}_1;$$

$$b_1 = \frac{\pi(\eta_0 - \eta)e^{i\varphi_0}}{2id \sin^2 \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2d}}; \quad b_2 = \bar{b}_1;$$

$$d_n = \frac{\gamma_n^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} e^{-\beta_n |\eta_0 - \eta|}; \quad e_n = \frac{\alpha_j}{\beta_n} d_n;$$

$$k_n = - \left(\frac{\alpha_j}{\beta_1} q_1 + (-1)^n h_0 i q_2 \right) e^{-\beta_1 |\eta_0 - \eta|};$$

$$q_1 = \sin \alpha_j (\xi_0 - \xi); \quad q_2 = \cos \alpha_j (\xi_0 - \xi);$$

$$h_0 = \operatorname{sign}(\eta_0 - \eta); \quad h_1 = e^{i\varphi_0}; \quad h_2 = \bar{h}_1;$$

$$w_1 = \bar{w}_2 = h_0 i \left(\varkappa e^{-h_0 i \alpha_j (\zeta_0 - \bar{\zeta})} + e^{h_0 i \alpha_j (\zeta_0 - \zeta)} h_1^2 \right);$$

$$r_1 = \bar{r}_2 = h_0 i e^{-h_0 i \alpha_j (\zeta_0 - \bar{\zeta})} (2\alpha_j |\eta_0 - \eta| + h_1^2 - 1);$$

$$v_1 = \frac{4}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \left(\beta_1^2 e^{-\beta_1 |\eta_0 - \eta|} - \beta_2^2 e^{-\beta_2 |\eta_0 - \eta|} \right);$$

$$v_2 = \frac{4\alpha_j}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \left(\beta_1 e^{-\beta_1 |\eta_0 - \eta|} - \beta_2 e^{-\beta_2 |\eta_0 - \eta|} \right);$$

$$N_m = \begin{cases} \frac{\mu \gamma_1 \tau_1}{0.5 - \nu} e^{-i\gamma_1 \eta_0} [(-1)^{m+1} \times \\ \times (1 - \nu) \cos \varphi_0 + i\nu \sin \varphi_0] & \text{для Р-хвилі,} \\ i\gamma_2 \mu \tau_2 e^{-i\gamma_1 \eta_0} e^{(-1)^m i\varphi_0} & \text{для SV-хвилі.} \end{cases}$$

Виконання умов (4) на контурі жорсткого включення зводить граничну задачу до системи інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами. З метою отримання сингулярних інтегральних рівнянь використовувалися модифіковані граничні умови, отримані зі співвідношень (4) диференціюванням по дуговій координаті s_0 :

$$\left. \frac{d(U_1 \pm iU_2)}{ds_0} \right|_L = \pm i\omega_0 e^{\pm i\varphi_0}, \quad (13)$$

$$\frac{dW}{ds_0} = \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\varphi_0} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\varphi_0} \right) \Big|_{z \rightarrow \zeta_0}.$$

У результаті на контурі жорсткого включення одержуємо сингулярне інтегральне рівняння першого роду ($m, n = 1, 2$):

$$\int_L B_{mn}(s_0, s)f_n(s)ds = M_m(s_0)\omega_0 + K_m(s_0), \quad (14)$$

де

$$B_{mn} = -\frac{\lambda + \mu}{4d} \left[A_{mn} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{mn}}{1 + \delta_{j0}} \right];$$

$$A_{nn} = \frac{\varkappa}{2} \operatorname{Re} \{ a_1 e^{i\varphi_0} \};$$

$$2A_{mn} = (-1)^m i a_n \sin \varphi_0 + b_n, \quad m \neq n;$$

$$C_{nn} = (e_1 + e_2) q_1 \cos \varphi_0 + \\ + h_0 (d_1 + d_2) q_2 \sin \varphi_0 - t_0;$$

$$C_{mn} = \left(\frac{v_2}{2} h_n + (e_1 - e_2) \cos \varphi_0 \right) q_1 - \\ - (-1)^m h_0 i \left(\frac{v_1}{2} h_n + (d_1 - d_2) \times \right. \\ \left. \times (h_n + \cos \varphi_0) \right) q_2 + t_n, \quad m \neq n;$$

$$t_0 = \varkappa e^{-\alpha_j |\eta_0 - \eta|} \sin(\alpha_j (\xi_0 - \xi) + h_0 \varphi_0);$$

$$t_1 = \bar{t}_2 = (i \alpha_j (\eta_0 - \eta) e^{-i\varphi_0} - h_0 \sin \varphi_0) \times \\ \times e^{-h_0 i \alpha_j (\bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta})};$$

$$M_1 = \bar{M}_2 = i \omega_0 e^{i\varphi_0};$$

$$K_2 = \begin{cases} -K_1 = \gamma_1 \tau_1 e^{-i\gamma_1 \eta_0} \sin \varphi_0 & \text{для Р-хвилі,} \\ K_1 = i \gamma_2 \tau_2 e^{-i\gamma_2 \eta_0} \sin \varphi_0 & \text{для SV-хвилі.} \end{cases}$$

Необхідні для розв'язання системи рівнянь (14) три додаткові умови впливають із поступально-го (5) та обертального (6) законів руху абсолютно жорсткого тіла.

3. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ЇХ АНАЛІЗ

При чисельній реалізації алгоритму використувався метод механічних квадратур [19]. Як приклад розглядалося середовище, яке містить періодичну систему циліндрів еліптичного поперечного перерізу:

$$\xi = a \sin \beta, \quad \eta = -b \cos \beta, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (15)$$

На контурі L проводилось обчислення безрозмірних амплітуд напружень

$$\sigma_n = \frac{|\tau_n|}{P}, \quad \sigma_s = \frac{|\tau_s|}{P}, \quad \sigma_{ns} = \frac{|\tau_{ns}|}{P}, \quad (16)$$

де P – максимальне напруження у падаючій хвилі, яке дорівнює $\gamma_1 \tau_1 (\lambda + 2\mu)$ у Р-випадку (1) і $\gamma_2 \tau_2 \mu$ у SV-випадку (2).

Отримані результати порівнювалися з даними, наведеними в [2, 4] для періодичної системи циліндричних включень кругового поперечного перерізу. Крім того, здійснювався граничний перехід до одиночної неоднорідності ($d \rightarrow \infty$). Ці результати порівнювалися з наведеними в роботах [1, 2]. Ідентичність графіків напружень для обох випадків свідчить про ефективність і достовірність побудованого алгоритму.

Відзначимо, що при дифракції плоских хвиль на порожнині напруження σ_n та σ_{ns} завжди дорівнюють нулю, а при дії хвилі (1) або (2) на жорстке еліптичне включення завжди вірно $\sigma_s = \nu \sigma_n / (1 - \nu) < \sigma_n$, оскільки поворот включення відсутній ($\omega_0 = 0$). Тому напруження σ_s на контурі порожнини можна якісно порівнювати з напруженням σ_n на контурі жорсткого включення. Надалі, якщо не зазначено інше, будемо вважати, що коли мова йде про напруження σ_s , це стосується межі порожнини, а коли про σ_n та σ_{ns} – межі жорсткого включення.

На рис. 2–4 наведені розподіли напружень на контурі (15) жорсткого включення або порожнини при $a/d = 0.4$, $\nu = 0.3$. У випадку жорсткого включення $\rho_0/\rho = 3.0$ (ρ – густина матриці). Криві 1–4 відповідають $b/a = 0.25, 0.5, 2.0$ і 8.0 . Рис. 2, а і 3 ілюструють набігання Р-хвилі (1) при $2d/\lambda_1 = 0.5$, а рис. 2, б і рис. 4 – набігання SV-хвилі (2) при $2d/\lambda_2 = 0.5$. Тут λ_1 і λ_2 – довжини поздовжньої та поперечної хвиль відповідно.

Аналіз показує, що для обох типів циліндрів існує принципова відмінність у розподілах контурних напружень при набіганні хвиль розширення – стиску та зсуву. Так, у Р-випадку при $b/a \leq 1$ поблизу точки зісковзування ($\beta = 90^\circ$) спостерігається максимум напружень σ_s і σ_{ns} та локальний мінімум напруження σ_n . Максимум σ_n знаходиться в освітленій області ($90^\circ < \beta < 180^\circ$). У тінювій ($\beta = 0^\circ$) та лобовій ($\beta = 180^\circ$) точках завжди виконується $\sigma_{ns} = 0$. При $b/a > 1$ максимуми напружень σ_s і σ_n зміщуються у тінюву та лобову точки, а максимум σ_{ns} – в освітлену область. Зауважимо, що у випадку жорстких включень варіювання відношення b/a практично не впливає на значення напруження σ_n поблизу лобової точки. Крім того, у випадках сплюснутих та витягнутих еліпсів напруження на межі порожнини значно перевищує напруження на межі жорсткого включення.

У SV-випадку при $b/a \leq 1$ у точці зісковзування спостерігається локальний мінімум напружень

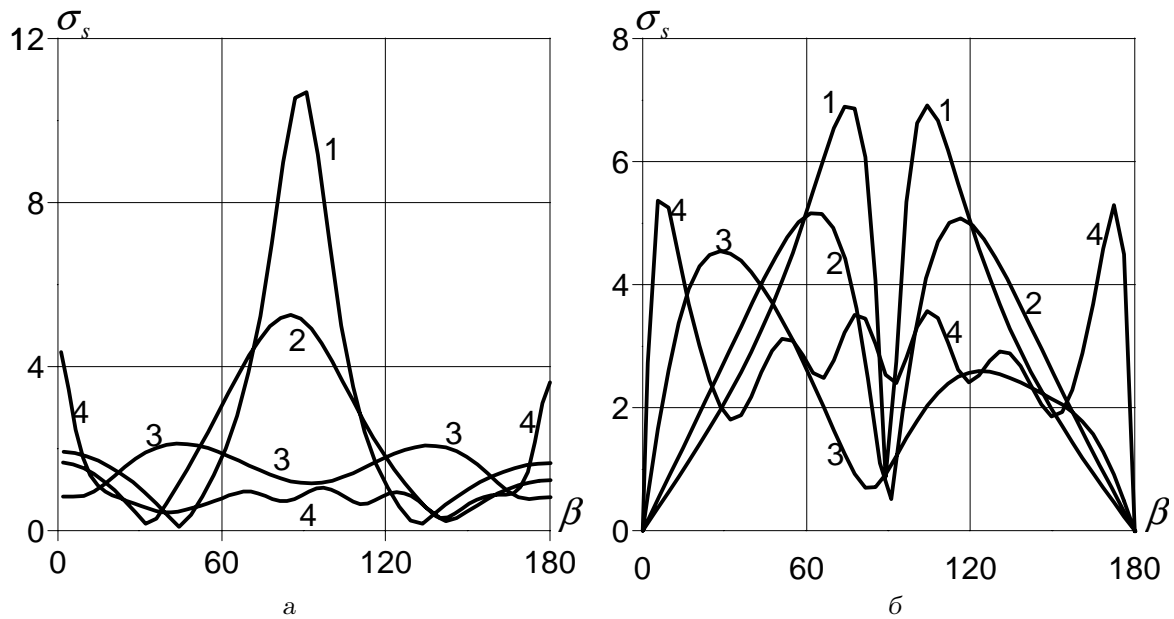


Рис. 2. Розподіл напружень на контурі еліптичної порожнини:
 а – випадок набігання Р-хвилі, б – випадок набігання SV-хвилі

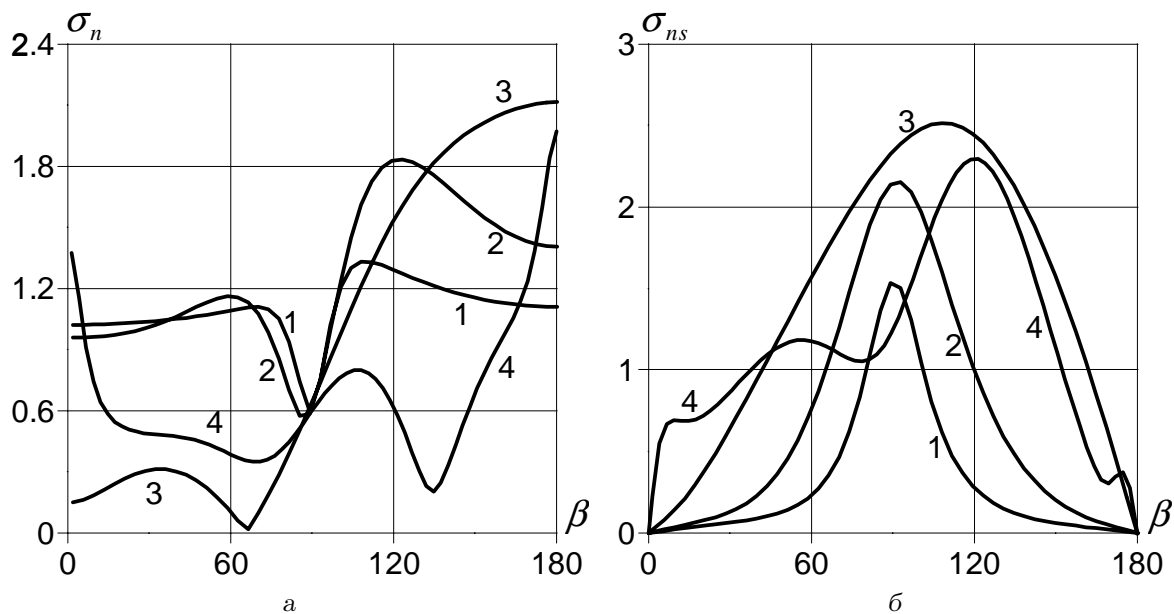


Рис. 3. Розподіл напружень на контурі еліптичного жорсткого включення у Р-випадку

σ_s і σ_n та локальний максимум σ_{ns} . У лобовій і тінювій точках $\sigma_s = \sigma_n \equiv 0$. При $b/a > 1$ максимуми напружень σ_s і σ_n зміщуються у тінюву та освітлену області, а максимуми σ_{ns} відповідають лобовій та тінювій точкам. При цьому у випадку жорстких включень, на відміну від порожнин, максимум найбільш виражений саме в освітленій

області (крива 4 на рис. 4).

На рис. 5 і 6 для різних типів включень наведені залежності максимальних контурних напружень від відношення періоду решітки до довжини набігаючої хвилі $2d/\lambda_1$ у Р-випадку ($a/d = 0.5$, $b/a = 0.5$, $\rho_0/\rho = 2.0$). Криві 1–3 відповідають значенням $\nu = 0.1, 0.25$ і 0.4 . Обчис-

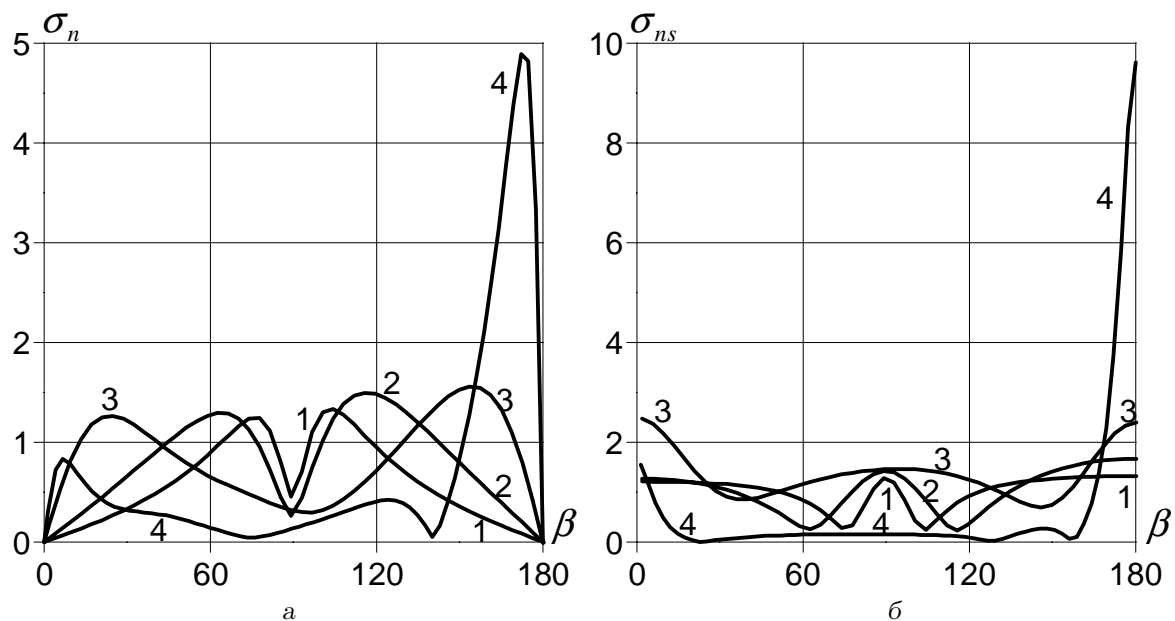


Рис. 4. Розподіл напружень на контурі еліптичного жорсткого включення у SV-випадку

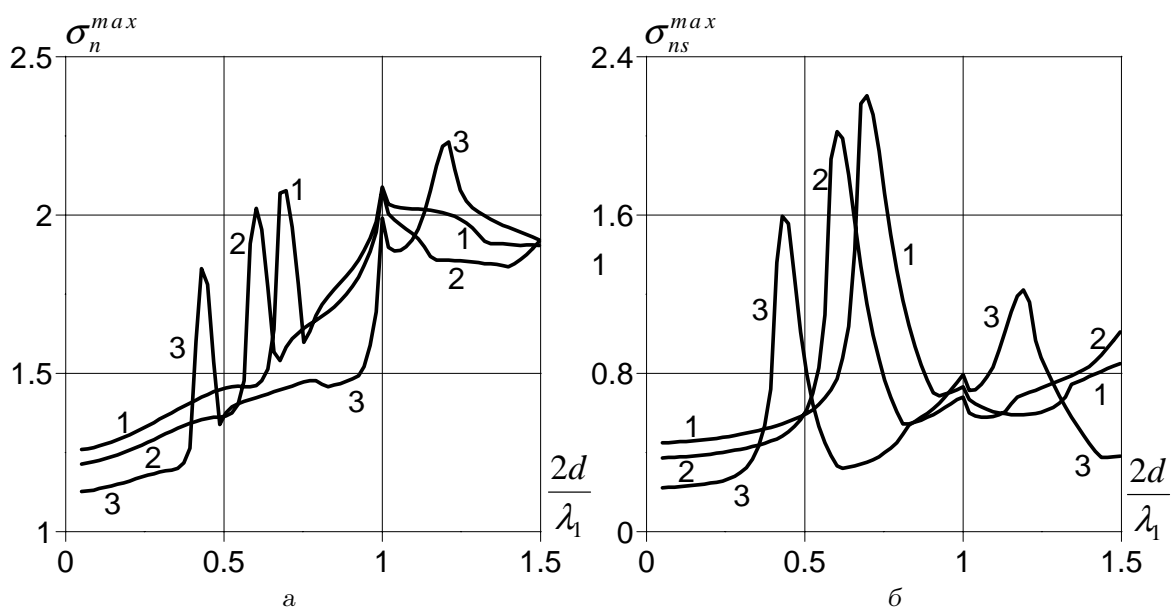


Рис. 5. Розподіл максимальних контурних напружень у випадку жорсткого включення

лення показують, що при дифракції плоскої гармонічної хвилі на періодичній системі порожнин або жорстких циліндричних включень спостерігається різке зростання максимальних контурних напружень біля так званих точок ковзання [2], що відповідають значенням $2d/\lambda_1 = k$ і $2d/\lambda_2 = k$ ($k = 1, 2, \dots$). У низькочастотній області зі збільшенням коефіцієнта Пуассона ν для

циліндрів обох типів спостерігається зменшення максимальних напружень. Окрім того, для довгих хвиль зі збільшенням $2d/\lambda_1$ максимальні контурні напруження зростають у випадку решітки з жорстких включень і зменшуються для решітки з порожнин. Зазначимо, що при однакових значеннях заданих параметрів максимальні напруження на порожнинах значно перевищують

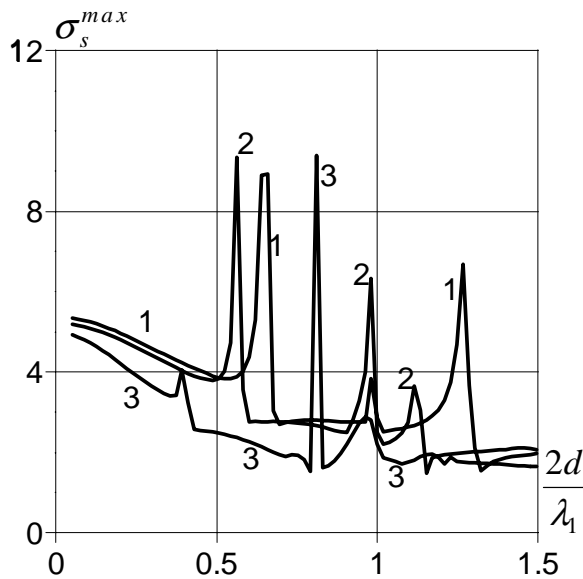


Рис. 6. Розподіл максимальних контурних напружень у випадку порожнин

максимальні напруження на жорстких включеннях.

ВИСНОВОК

На основі методу інтегральних рівнянь запропоновано єдиний підхід до розв'язання плоских задач дифракції пружних гармонічних хвиль на періодичних системах циліндричних порожнин або жорстких включень. Порівняльний аналіз напружено-деформованого стану ізотропного середовища поблизу вказаних неоднорідностей показав, що існує принципова відмінність у розподілі напружень на межі циліндрів у залежності від їхнього типу та характеру набігаючої хвилі. Отримані результати підтверджують той факт, що довжина періоду решітки суттєво впливає на напружено-деформований стан середовища. У випадках, коли довжини відбитих хвиль кратні цьому періоду, спостерігається різке збільшення напружень поблизу циліндрів.

1. Pao Y. H., Mow C. C. The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration.– New York: Crane Rassak Co, 1973.– 689 p.
2. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракція упругих волн.– К.: Наук. думка, 1978.– 307 с.
3. Liu Y., Wu R. S., Ying C. F. Scattering of elastic waves by an elastic or viscoelastic cylinder // Geophys. J. Int.– 2000.– 142,

N 27-28.– P. 439–460.

4. Головчан В. Т. Дифракція волни сдвига на бесконечном ряде цилиндрических полостей // Прикл. мех.– 1971.– 7, N 3.– С. 41–46.
5. Шульга Н. А., Колодий В. И. Дифракция волн сдвига на упругом включении некруговой цилиндрической формы // Мех. композит. матер.– 1981.– N 1.– С. 153–156.
6. Datta S. K. Diffraction of SH-waves by an alliptic cylinder // Int. J. Solid Struct.– 1974.– 10, N 1.– P. 123–133.
7. Гомилко А. М., Городецкая Н. С., Гринченко В. Т., Украинский Л. Е. Осесимметричная смешанная задача стационарной динамической теории упругости для слоя с цилиндрическим отверстием // Прикл. мех.– 1998.– 34, N 1.– С. 39–46.
8. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров.– К.: Наук. думка, 1978.– 264 с.
9. Рвачев В. Л. Теория R-функций.– К.: Наук. думка, 1982.– 556 с.
10. Гуляев Ю. В., Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л., Сизова Н. Д. Исследование дифракции упругих волн на пластинах, ослабленных двумя отверстиями произвольной формы // Докл. РАН. Математическая физика.– 1996.– 349, N 2.– С. 175–179.
11. Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К. Применение лучевых методов в задачах распространения и рассеяния волн (обзор) // Прикл. мех.– 1996.– 32, N 12.– С. 3–27.
12. Фильштинский Л. А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.– 1991.– N 4.– С. 119–127.
13. Назаренко А. М. Дифракция гармонических волн на цилиндрическом упругом включении в условиях плоской деформации // Дин. сист.– 2005.– N 19.– С. 54–60.
14. Feng Y. D., Wang Y. S., Zhang Z. M. Time domain BEM analysis of cylinder embedded in soil with frictional slip at the interface // Soil Dyn. Earthq. Engng.– 2003.– 23, N 4.– P. 303–311.
15. Scarpetta E., Sumbatyan M. A. In-plane wave propagation through elastic solids with a periodic array of rectangular defects // Trans. ASME, J. Appl. Mech.– 2001.– 69, N 2.– P. 179–188.
16. Scarpetta E., Sumbatyan M. A. The single-mode approximation in the problem of the propagation of a plane longitudinal wave in an elastic medium with a periodic system of rectangular defects // J. Appl. Math. Mech.– 2003.– 67, N 4.– P. 601–610.
17. Назаренко А. М., Ложкин А. М. Взаимодействие плоских гармонических волн с периодической системой неподвижных цилиндрических включений в условиях плоской деформации // Вісн. НТУ "ХПІ". Тем. вип.: Динам. і міцн. машин.– 2005.– N 20.– С. 129–134.
18. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
19. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции.– К.: Наук. думка, 1984.– 344 с.