

УДК 534.1:534.232

# СВОЙСТВА НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН КОМПОЗИТНОГО УПРУГО-ЖИДКОСТНОГО ВОЛНОВОДА, ПОМЕЩЕННОГО В ЖИДКОСТЬ

В. Т. ГРИНЧЕНКО\*, Г. Л. КОМИССАРОВА\*\*

\*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

\*\*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

Получено 20.07.2006

Изучены особенности осесимметричных волновых движений в заполненном и окруженном жидкостью упругом цилиндре. Излучение в окружающую среду порождает специальный механизм затухания волн – радиационное демпфирование. Предложена методика определения вещественных и комплексных корней дисперсионного уравнения для волноводов данного типа. Представлены результаты анализа различий кинематических и энергетических характеристик нормальных волн для случаев жесткого и податливого материалов упругого цилиндра. Показано влияние радиационного демпфирования на характеристики неоднородных волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Рассмотрены свойства незатухающих поверхностных волн (типа волны Стоунли), существующих при произвольных значениях частоты, а также любых соотношениях физических характеристик материала цилиндра и жидкости. Важнейшей особенностью волновода с податливым цилиндром является наличие в высокочастотной области системы неподверженных радиационному демпфированию нормальных волн, фазовые скорости которых стремятся к скорости волны сдвига в материале цилиндра.

Вивчені особливості осесиметричних хвильових рухів у заповненому та оточеному рідиною пружному циліндрі. Випромінювання в оточуюче середовище породжує спеціальний механізм затухання хвиль – радіаційне демпфювання. Запропоновано методику визначення дійсних і комплексних коренів дисперсійного рівняння для таких хвилеводів. Представлені результати аналізу відмінностей кінетичних і енергетичних характеристик нормальних хвиль для випадків жорсткого та піддатливого матеріалів пружного циліндра. Показаний вплив радіаційного демпфювання на характеристики неоднорідних хвиль, які розповсюджуються у протилежних напрямках. Розглянуті властивості незатухаючих поверхневих хвиль (типу хвиль Стоунлі), які існують при довільних значеннях частот та будь-яких співвідношеннях фізичних характеристик матеріалу циліндра й рідини. Важливою особливістю хвилевода у випадку піддатливого циліндра є існування у високочастотній області системи нормальних хвиль, які не зазнають впливу радіаційного демпфювання. Їхні фазові швидкості прямують до швидкості хвилі зсуву в матеріалі циліндра.

The paper deals with studying the peculiarities of axisymmetric wave motions in a fluid-filled elastic cylinder surrounded with a fluid environment. Radiation to the environment establishes the special wave attenuation mechanism: a radiation damping. The technique is proposed for determining the real and complex roots of the dispersion equation for the considered waveguide type. The differences of the kinematic and energy characteristics of the normal waves for the cases of the stiff and compliant cylinders are analyzed and discussed. The effect of the radiation damping on the characteristics of evanescent waves propagating in opposite directions. The study considers the properties of non-attenuating surface waves (of the Stoneley wave type) that exist at arbitrary frequency values and any ratios of the cylinder material and fluid physical properties. The principal feature of the waveguide with the compliant cylinder is the existence in the high-frequency range of the system of normal waves not subjected to the radiation damping, which phase velocities tend to shear wave velocity in the cylinder material.

## ВВЕДЕНИЕ

Упругие волны находят широкое применение при определении физического состояния объектов, в которых они распространяются. Различные прикладные проблемы стимулируют изучение волновых полей в композитных волноводах [1–3]. Зависимости характеристик волнового поля от физических свойств и геометрических размеров составляющих волновода используются при обработке данных геофизических изысканий, неразрушающих оценках состояний трубопроводов, проложенных в упругой или жидкостной среде, конструировании приборов в акустоэлектронике, гидромеханике, медицинской акустике.

Составные многокомпонентные волноводы естественно разделить на два класса. К первому из

них принадлежат волноводы, площадь поперечного сечения которых конечна. Сюда относятся плоские слоистые волноводы, стержни с покрытиями, слоистые или заполненные жидкостью цилиндры. Волноводы, поперечное сечение которых не является конечным, относят ко второму классу. Их примером могут служить бесконечные периодические системы, цилиндры с жидкостью, окруженные жидкой или упругой средой.

Различие между указанными типами объектов наглядно проявляется при использовании моделей идеальных сред (упругое тело или жидкость) для описания их материалов. Тогда вдоль оси волновода с конечным поперечным сечением может распространяться без затухания довольно большое число бегущих волн. В волноводе, окруженном даже идеальной бесконечной средой, возникает спе-

циальный механизм затухания волн, называемый радиационным демпфированием. В этом случае предметом исследования является вопрос о существовании незатухающих волн, а также их свойства и физическая природа.

Обзор публикаций, в которых изучались закономерности распространения волн в составных упругих стержнях, приведен в [4]. Случай волновода с бесконечным поперечным сечением рассмотрен в работах [5–23]. В статье [5] определены фазовые скорости демпфируемых излучением волн, их кинематика и направление потока энергии в окружающую упругую среду для пар материалов металл–металл и металл–керамика. Решение задачи получено на основе уравнений теории упругости и предпринята попытка экспериментально смоделировать свойства упругого составного волновода с бесконечным поперечным сечением. Предложена методика обработки экспериментальных результатов, позволяющая распространить данные для волновода с конечным поперечным сечением на случай бесконечного сечения [6]. Кроме того, в [5, 6] проведен обзор ряда теоретических и экспериментальных работ для составных цилиндров с бесконечным поперечным сечением.

Дисперсионные характеристики низшей продольной волны в тонкостенном стержне, погруженном в вязкую среду, изучены в статье [7]. Показано, что в области низких частот фазовая скорость и характеристики затухания этой волны существенно зависят от физических параметров окружающей среды. Уже здесь была отмечена сильная зависимость степени радиационного демпфирования от характера движения в нормальной волне и соотношения плотностей материала стержня и окружающей среды. Знание зависимостей свойств низшей нормальной волны от свойств окружающей среды позволило создать эффективный сенсор для измерения плотности и вязкости этой среды. В [8] определены фазовые скорости осесимметричных волн для анизотропного цилиндра, погруженного в идеальную сжимаемую жидкость, а в [9] изучено распространение осесимметричных волн в трансверсально изотропном цилиндре, окруженном жидкостью, и получены значения фазовых скоростей для стержня из эпоксидного стекла, окруженного водой. В [10] рассмотрено распространение неосесимметричных волн в трансверсально изотропном цилиндре, погруженном в жидкость. Численные результаты представлены для цилиндра из кобальта, окруженного водой. В цитируемой работе ошибочно утверждается, что фазовые скорости волн в погруженном в жидкость цилиндре и цилиндре со свободной боко-

вой поверхностью совпадают – для осесимметричных и изгибных волн приведены фазовые скорости свободного цилиндра, а характеристики затухания – для цилиндра, погруженного в жидкость.

В статье [11] на основе уравнений динамической теории упругости изучено распространение нормальных осесимметричных волн в сплошном цилиндре, контактирующем с жидкой средой. Для конкретного примера (сталь–вода) построены комплексные дисперсионные кривые в широком диапазоне частот и волновых чисел. Проведен анализ дисперсионных характеристик демпфируемых излучением волн, затухания амплитуд нормальных волн в цилиндре и излучения энергии в окружающую среду в зависимости от частоты. Вопрос о существовании незатухающих волн здесь не рассматривался.

В ряде работ распространение волн в тонкостенных цилиндрах, заполненных и окруженных жидкой средой, изучалось на основе уравнений теории оболочек. В статье [12] выполнен обзор этих публикаций и приведены данные о дисперсионных характеристиках незатухающих неосесимметричных волн высоких порядков в зависимости от толщины оболочки. В [13] получены значения фазовых скоростей окружных волн для цилиндрической алюминиевой оболочки, заполненной и окруженной различными жидкостями. Использование теории оболочек при изучении свойств композитных волноводов позволило достаточно просто решить принципиальный вопрос о существовании незатухающих волн в волноводах с бесконечным поперечным сечением.

Исследование закономерностей распространения осесимметричных волн в заполненном и окруженном жидкостью цилиндре (трехслойном волноводе) на основе уравнений динамической теории упругости выполнено в [14–16]. В статье [14] дисперсионные кривые построены в виде зависимостей действительной и мнимой составляющих частоты от значения действительной постоянной распространения. Во второй части публикации [15] исследованы изменения амплитуд смещений и напряжений по поперечному сечению волновода, проведена экспериментальная проверка полученных теоретических результатов. В [16] дисперсионные кривые построены для случая действительной частоты и комплексной постоянной распространения. Численные результаты проанализированы для цилиндра из жесткого материала. Проведена классификация комплексных дисперсионных кривых, исследовано поведение мнимых частей постоянной распространения, определяющих затухание нормальных волн, и их энергетиче-

ских характеристик. Изучено влияние плотности окружающей жидкости на поведение дисперсионных кривых составного волновода. В [17, 18] показано, что в трехслойном волноводе в общем случае существуют две незатухающие нормальные волны, если скорость звука в окружающей цилиндр жидкости  $C_2$  больше или равна скорости звука заполняющей жидкости  $C_0$ :  $C_2 \geq C_0$ . В противном случае в волноводе существует одна нормальная незатухающая волна. Исследование кинематических характеристик указанных волн в низкочастотной области показало, что они являются аналогами поверхностной волны Стоунли.

Распространение неосесимметричных волн в трансверсально изотропном цилиндре, заполненном и окруженном жидкостью, рассмотрено в работах [19, 20]. Волновые движения цилиндра описаны на основе уравнений теории упругости. Численные результаты представлены для случая изгибных волн ( $n=1$ ). Получены первые три дисперсионные кривые, соответствующие распространяющимся волнам, для которых почти вся энергия переносится упругим цилиндром. В [21] экспериментально получены фазовая и групповая скорости первых двух волн (незатухающих) для пластины и полого цилиндра, контактирующих с жидкостью. Исследованы три случая контакта оболочки с жидкой средой: пустая оболочка, погруженная в жидкость; заполненная жидкостью оболочка; оболочка, заполненная и окруженная жидкостью. Для перечисленных случаев, а также для сухой оболочки в [22] экспериментально определены групповая скорость и характеристики затухания осесимметричных волн. Эксперименты выполнены на тонком цилиндре из меди, контактирующем с водой. Отмечено хорошее соответствие между экспериментальными и числовыми результатами. Численные данные получены путем использования пакета программ DISPERSE, разработанного в Imperial College (Великобритания). Проведена оценка вязкости жидкости на дисперсионные характеристики такой оболочки, заполненной касторовым маслом, и показано, что групповые скорости для цилиндров, заполненных касторовым маслом и водой, весьма близки.

В [23] рассмотрено рассеивание плоских акустических волн на металлической трубе, соединенной жидким слоем с концентрическим цилиндром из полимера и помещенной в жидкую среду. Теоретически и экспериментально изучено влияние толщины жидкостного слоя на наличие волн Шолте–Стоунли, локализованных вблизи поверхностей упругой трубы и сплошного цилиндра.

Из приведенного обзора работ следует, что в

большинстве из них для композитных волноводов с бесконечным поперечным сечением количественные данные получены для фазовых или групповых скоростей и характеристик затухания нормальных волн. Значения комплексных корней дисперсионного уравнения и их графическое изображение в виде зависимостей между частотой и постоянной распространения для конкретных пар материалов и геометрических размеров волновода даны в работах [11, 15, 16, 20]. В [16] расчеты проведены для случая стального цилиндра с  $r_1=0.3$ , заполненного керосином и окруженного водой; в [15] – для стального цилиндра с  $r_1=0.83$ , а в [20] – для цилиндра из мягкой резины ( $\nu=0.45$ ) с  $r_1=0.8$ , заполненных и окруженных водой. Здесь  $r_1=R_1/R$  – относительный внутренний радиус полого цилиндра;  $R_1$  и  $R$  – внутренний и внешний радиусы соответственно.

Анализ результатов цитируемых работ показал, что на их основе невозможно сделать обобщающие выводы о влиянии геометрических и физических параметров на свойства нормальных волн в составных волноводах, окруженных акустической средой. Характер взаимодействия между упругой и жидкой составляющими рассматриваемых волноводов существенно зависит от отношения волновых сопротивлений материалов цилиндра и жидкости. В связи с этим при оценке влияния физических параметров материала цилиндра на характеристики волнового поля упруго-жидкостных волноводов принято различать два типа материалов: жесткие и податливые (мягкие). Материал цилиндра называют податливым, если скорость волны сдвига меньше скорости звука в жидкости ( $V_S/C < 1$ ), а плотности жидкости и материала цилиндра близки между собой. К податливым материалам относятся мягкие пластмассы, резины, мягкие биологические ткани. Для жестких материалов (типа металлов) характерно  $V_S/C > 1$  при отношении плотностей жидкости и материала цилиндра, значительно меньшем единицы.

В работах [24–27] исследовано влияние толщины полого цилиндра на закономерности распространения волн в заполненном жидкостью цилиндре из жесткого материала. В них на основе уравнений динамической теории упругости в широком диапазоне частот проведена оценка дисперсионных, кинематических и энергетических характеристик нормальных осесимметричных волн при изменении относительного внутреннего радиуса цилиндра  $r_1$  от 0.3 до 0.995. В статье [28] исследованы характеристики осесимметричных распространяющихся волн в заполненном жидкостью цилиндре из податливого материала.

Цель данной работы состоит в изучении особенностей взаимодействия упругих и жидкостных волн в упруго-жидкостных цилиндрических волноводах с цилиндрами из податливых материалов в широком диапазоне частот и длин волн. Рассмотрены два случая контакта упругого цилиндра с жидкостью:

- заполненный жидкостью цилиндр;
- цилиндр, заполненный и окруженный жидкостью.

В отличие от [28], для заполненного жидкостью упругого цилиндра здесь изучаются не только распространяющиеся, но и неоднородные волны. В частности, для заполненного и окруженного жидкостью упругого цилиндра исследован вопрос о наличии незатухающих волн, фазовые скорости которых в пределе стремятся к скорости волны сдвига в материале цилиндра.

## 1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим распространение нормальных осесимметричных волн в упругом цилиндре, заполненном и окруженном жидкостью. Для описания движения цилиндра используем уравнения линейной теории упругости. Вектор смещений  $\mathbf{u}$  частиц упругого цилиндра удовлетворяет векторному уравнению движения Ламе

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{b} = \rho_1 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты упругости Ламе;  $\rho_1$  – плотность материала цилиндра;  $\mathbf{b}$  – вектор плотности объемных сил. Компоненты вектора смещений, для которых справедливо уравнение (1), имеют вид [16]

$$\begin{aligned} u_j &= U_j(r) \exp[i(\zeta z - \omega t)], \quad j = r, z, \\ U_r(r) &= -\alpha [A_1 J_1(\alpha r) + A_2 Y_1(\alpha r)] + \\ &\quad + \beta [B_1 J_1(\beta r) + B_2 Y_1(\beta r)], \\ U_z(r) &= i\zeta [A_1 J_0(\alpha r) + A_2 Y_0(\alpha r)] + \\ &\quad + i \frac{\beta^2}{\zeta} [B_1 J_0(\beta r) + B_2 Y_0(\beta r)], \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \gamma_1^2 - \zeta^2; \quad \beta^2 = \gamma_2^2 - \zeta^2; \\ \gamma_1 &= \frac{\omega R}{V_D}; \quad \gamma_2 = \frac{\omega R}{V_S}; \quad \gamma_1^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \gamma_2^2. \end{aligned}$$

Внутренняя и внешняя жидкости являются идеальными сжимаемыми. Потенциал скорости во внутренней жидкости, удовлетворяющий уравнение Гельмгольца, записывается как [16]

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= D_0 J_0(\chi_0 r) \exp[i(\zeta z - \omega t)], \\ \chi_0 &= \sqrt{\gamma_2^2 \left(\frac{V_S}{C_0}\right)^2 - \zeta^2} = \\ &= \frac{V_S}{C_0} \zeta \sqrt{\left(\frac{C}{V_S}\right)^2 - \left(\frac{C_0}{V_S}\right)^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогично, потенциал скорости для внешней жидкости имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= D_2 J_0(\chi_2 r) \exp[i(\zeta z - \omega t)], \\ \chi_2 &= \sqrt{\gamma_2^2 \left(\frac{V_S}{C_2}\right)^2 - \zeta^2} = \\ &= \frac{V_S}{C_2} \zeta \sqrt{\left(\frac{C}{V_S}\right)^2 - \left(\frac{C_2}{V_S}\right)^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\zeta$  – безразмерное волновое число (постоянная распространения), полученное умножением его размерной величины на  $R$ ;  $\omega$  – круговая частота;  $V_D, V_S$  – скорости волн расширения и сдвига соответственно;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $C_0, C_2$  – скорости звука во внутренней и внешней жидкостях соответственно;  $J_n, Y_n$  – функции Бесселя;  $H_0^{(1)}$  – функция Ханкеля;  $A_1, A_2, B_1, B_2, D_0, D_2$  – произвольные постоянные. Здесь и далее все линейные величины отнесены к внешнему радиусу цилиндра  $R$ . Потенциал скорости нормирован к произведению  $RC$ .

На внутренней ( $r=r_1$ ) и внешней ( $r=1$ ) поверхностях контакта жидкости и цилиндра выполняются условия равенства радиального напряжения и давления в жидкости, радиальных скоростей, а

также равенство нулю касательного напряжения:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}(r_1, z, t)}{2\mu} &= -\frac{\rho_0}{2\rho_1} \frac{RC_0}{V_S^2} \frac{\partial\varphi_0(r_1, z, t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial u_r(r_1, z, t)}{\partial t} &= -\frac{C_0}{R} \frac{\partial\varphi_0(r_1, z, t)}{\partial r}, \\ \frac{\sigma_{rz}(r_1, z, t)}{2\mu} &= 0, \\ \frac{\sigma_{rr}(1, z, t)}{2\mu} &= -\frac{\rho_2}{2\rho_1} \frac{RC_2}{V_S^2} \frac{\partial\varphi_2(1, z, t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial u_r(1, z, t)}{\partial t} &= -\frac{C_2}{R} \frac{\partial\varphi_2(1, z, t)}{\partial r}, \\ \frac{\sigma_{rz}(1, z, t)}{2\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\rho_0$  и  $\rho_2$  – плотности внутренней и внешней жидкостей соответственно.

Граничные условия (5) при использовании решений (2)–(4) порождают дисперсионное уравнение в форме равенства нулю определителя шестого порядка:

$$\Delta_6 = \|a_{ij}\| = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6. \quad (6)$$

Явный вид элементов определителя приведен в [16]. Указанное уравнение связывает безразмерные частоту  $\gamma_2$  и постоянную распространения  $\zeta$  при заданных величинах безразмерных физических и геометрического параметров:  $\nu$ ,  $V_S/C_0$ ,  $V_S/C_2$ ,  $\rho_0/\rho_1$ ,  $\rho_2/\rho_1$  и  $r_1$ . Естественно, большое количество параметров системы существенно затрудняет исследование свойств нормальных волн в заполненном и окруженном жидкостью упругом полем цилиндра. Дисперсионные уравнения (6) в зависимости от значения величины  $\chi_2$  (вещественного или мнимого) становится комплексным или вещественным. Объясняется это тем, что функции Ханкеля удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(i\chi_2^* r) &= -i\frac{2}{\pi} K_0(\chi_2^* r), \\ H_1^{(1)}(i\chi_2^* r) &= -\frac{2}{\pi} K_1(\chi_2^* r), \\ \chi_2^* &= \sqrt{\zeta^2 - \gamma_2^2 \left(\frac{V_S}{C_2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно им в секторе плоскости ( $\text{Re } \zeta$ ,  $\gamma_2$ ), расположенном ниже прямой  $\chi_2 = 0$ , уравнение (6) будет действительным и может иметь действительные корни. Методика определения действительных корней дисперсионного уравнения волновода

с конечным поперечным сечением основывается на том, что сначала находят корни при  $\zeta \rightarrow 0$  и конечном  $\gamma_2$ . Если применить эту методику к соотношению (6), то оно распадется на два уравнения:

$$Y_1(\gamma_2)J_1(\gamma_2 r_1) - J_1(\gamma_2)Y_1(\gamma_1 r_1) = 0, \quad (8)$$

$$\Delta_4 = \|a_{ij}^*\| = 0, \quad (9)$$

$$i = 1, 2, 4, 5, \quad j = 1, 2, 5, 6.$$

Коэффициенты  $a_{ij}^*$  вычисляются из выражений для  $a_{ij}$  при  $\zeta = 0$ .

Для конечных в поперечном сечении волноводов уравнения, полученные аналогичным путем, задают частоты запираения, при которых дисперсионные кривые пересекают частотную ось. Для рассматриваемой волноводной системы уравнение (8) имеет корни, зависящие только от геометрического параметра  $r_1$  (относительного срединного радиуса цилиндра). Поэтому оно одновременно определяет частоты запираения и пустого, и заполненного жидкостью цилиндров [24]. Нормальные волны при этих частотах являются продольно-сдвиговыми. Следовательно, комплексные дисперсионные кривые для цилиндра, заполненного и окруженного жидкостью, пересекают частотную ось при частотах запираения, которым соответствует продольно-сдвиговый тип движения. При этой частоте волна не испытывает радиационного демпфирования (становится распространяющейся).

В статьях [28, 29] показано, что характеристики волновых полей заполненных жидкостью цилиндров из жестких и податливых материалов существенно отличаются. Основная цель проводимого в данной работе анализа состоит в выявлении тех особенностей взаимодействия волновых движений в заполненном и окруженном жидкостью упругом цилиндре, которые обусловлены существенным уменьшением жесткости цилиндра (податливый материал). Количественные данные для жесткого материала (сталь) получены ранее в [16].

## 2. ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА УПРУГО-ЖИДКОСТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ, ПОМЕЩЕННЫХ В ЖИДКОСТЬ

Дисперсионные уравнения для составных волноводов являются соотношениями, поиск корней которых представляет собой довольно сложную вычислительную задачу. Особенно сложно находить комплексные корни, однако именно они несут информацию о проявлении эффекта радиаци-

онного демпфирования нормальных волн. Во многих случаях процедура локализации комплексных корней основывается на знании их значений на плоскости  $\omega = 0$ , т. е. на решении соответствующей статической задачи [30]. Для волновода, окруженного идеальной сжимаемой жидкостью, даже статическая задача оказывается достаточно сложной. Поэтому в качестве начального приближения используются данные о корнях для соответствующего волновода без окружающей жидкости. В частности, в [11, 16] показано, что если цилиндр состоит из жесткого материала, то для составного волновода, окруженного водой, и волновода без окружающей жидкости комплексные корни на плоскости  $\omega = 0$  весьма близки. Исходя из этого, первый подраздел этого параграфа будет посвящен анализу дисперсионных свойств заполненного жидкостью цилиндра из податливого материала.

### 2.1. Упругий цилиндр, заполненный жидкостью

В работах [28, 29] анализ дисперсионных, кинематических и энергетических характеристик заполненного жидкостью цилиндра проведен только для распространяющихся осесимметричных волн. Систематизация расчетных данных проводилась на основе выделения парциальных подсистем, в качестве которых рассматривались пустой упругий цилиндр и акустический волновод с жесткой стенкой. Ниже представлены данные также и о комплексных корнях дисперсионного уравнения для заполненного жидкостью цилиндра из податливого материала.

На рис. 1 показаны дисперсионные кривые для заполненного водой цилиндра из жесткой резины с  $r_1 = 0.3$ , представляющие собой графическое отображение корней дисперсионного уравнения в виде зависимости между частотой  $\gamma_2$  и волновым числом  $\zeta$ . Для рассматриваемого случая использовались следующие значения безразмерных физических параметров [28]:

$$\nu = 0.4, \quad \frac{\rho_0}{\rho_1} = 0.909, \quad \frac{V_S}{C_0} = 0.395.$$

Условимся в дальнейшем кривые, соответствующие действительным, мнимым или комплексным корням дисперсионного уравнения, называть соответственно действительными, мнимыми или комплексными. На графике ветви, отвечающие действительным и мнимым корням, изображены сплошными линиями 1–5. Проекция комплексных дисперсионных кривых на действительную и мнимую плоскости даны штриховыми линиями  $3^\pm$

и  $5^\pm$ . Дисперсионное уравнение для заполненного жидкостью цилиндра приведено в [24].

Прямая  $OS$  соответствует волне Стоунли,  $OR$  – волне Рэлея. Плоскость  $(\mathbf{Re} \zeta, \gamma_2)$  делится прямыми  $OD$  ( $\alpha = 0$ ),  $OE$  ( $\beta = 0$ ) и  $OC$  ( $\chi_0 = 0$ ) на сектора, в зависимости от значений  $\alpha, \beta, \chi_0$ . Выше каждой из этих прямых соответствующие им величины являются действительными, а ниже – мнимыми. Дисперсионные кривые парциальных подсистем на плоскости  $(\mathbf{Re} \zeta, \gamma_2)$  расположены следующим образом. Действительные дисперсионные ветви пустого упругого цилиндра, за исключением первых двух, расположены выше прямой  $OE$ , а для акустического волновода – выше прямой  $OC$ . Такое расположение дисперсионных кривых парциальных подсистем не зависит от жесткости материала цилиндра, но физические параметры составного волновода регулируют расположение прямой  $OC$  относительно  $OD$  и  $OE$ . Существенное увеличение угла между осью абсцисс и  $OC$  при возрастании податливости упругого материала является следствием изменения масштаба по оси частот. В случае жесткого цилиндра прямая  $OC$  лежит значительно ниже  $OE$  [16, 29].

Взаимное расположение прямых  $OD, OE$  и  $OC$  на плоскости  $(\mathbf{Re} \zeta, \gamma_2)$  позволяет сделать заключение о предельных значениях скоростей распространяющихся волн высоких порядков для заполненных жидкостью цилиндров из жестких и податливых материалов. Так, для жесткого цилиндра фазовые скорости распространяющихся волн (за исключением низшей) с увеличением волнового числа стремятся сверху к скорости звука в жидкости. В случае податливого цилиндра фазовые скорости распространяющихся волн (за исключением первых двух) стремятся сверху к скорости волны сдвига материала цилиндра [29].

На рис. 1 первые две действительные дисперсионные кривые составного волновода с нулевой частотой заштрихованы и расположены в том секторе, где  $\chi_0$  мнимое. Все остальные действительные дисперсионные кривые начинаются в секторе, в котором  $\chi_0$  является действительным, а затем с повышением частоты переходят в область мнимых  $\chi_0$ . Первой дисперсионной кривой составного волновода в области низких частот соответствует жидкостная волна, фазовая скорость которой с увеличением волнового числа  $\zeta$  стремится сверху к скорости волны Стоунли [29]. Вторая дисперсионная кривая составного волновода для  $\zeta \leq 1.1$  графически совпадает с первой дисперсионной кривой пустого цилиндра. Следовательно, на этом участке ей соответствует упругая волна с продольным стержневым движением. С увеличением волнового

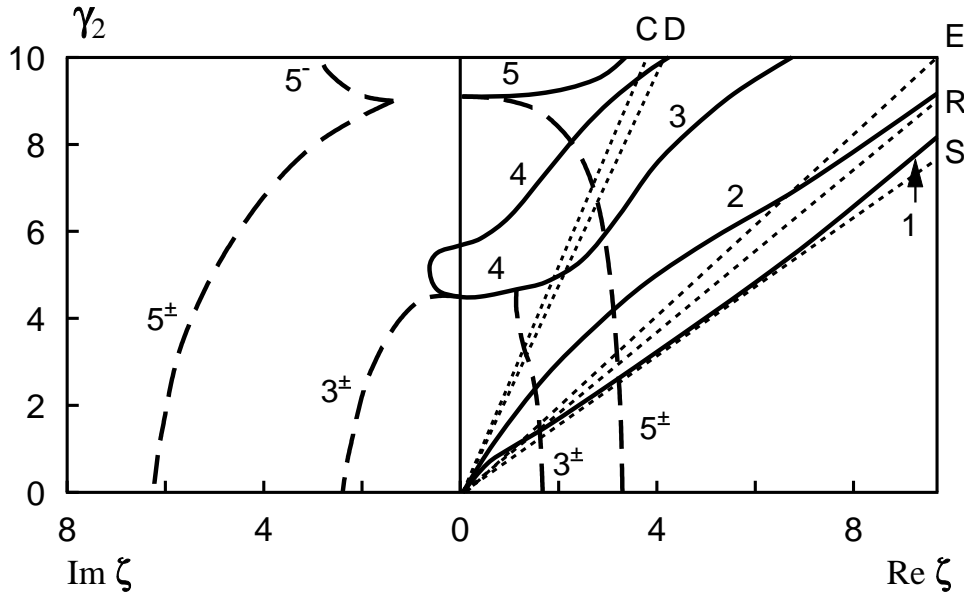


Рис. 1. Дисперсионные ветви нормальных волн в заполненном водой цилиндре из жесткой резины с  $r_1 = 0.3$

числа скорость второй нормальной волны составного волновода стремится к скорости волны Рэлея снизу [29].

Для пустого и заполненного жидкостью цилиндров нормальные волны на частотах запертия являются либо чисто радиальными, либо продольно-сдвиговыми. Частоты запертия волн с продольно-сдвиговым типом движения будут общими для всех цилиндров с одинаковым относительным внутренним радиусом, независимо от физических характеристик материала цилиндра и наличия жидкости [24]. На графике к этому типу относятся распространяющиеся волны, частоты запертия которых равны  $\gamma_{2,1}^* = 4.70575$  и  $\gamma_{2,2}^* = 9.10423$ . Этим волнам соответствуют третья и пятая действительные дисперсионные кривые волновода.

Методика определения комплексных корней дисперсионного уравнения волновода (слоя или цилиндра) основывается на том, что вначале находятся их значения на плоскости  $\gamma_2 = 0$  [30], являющиеся начальными для отыскания корней при частоте, отличной от нуля. В работе [25] показано, что для заполненного жидкостью цилиндра комплексные корни на плоскости  $\gamma_2 = 0$  весьма близки к соответствующим корням для пустого цилиндра. Поиск последних сводится к вычислению собственных чисел однородных решений статической задачи для полого цилиндра. Для пустого цилиндра уравнение для определения корней на плоско-

сти  $\gamma_2 = 0$  имеет вид [25]

$$e^{2\zeta(1-r_1)} - 4(1-r_1)^2\zeta^2 + \frac{(1-2\nu)(1-r_1)}{r_1} \frac{e^{2\zeta(1-r_1)}}{\zeta} = 0. \quad (10)$$

Пренебрегая последним членом, находим асимптотические значения комплексных корней  $\zeta$  на этой плоскости:

$$\zeta \approx \frac{1}{(1-r_1)} \ln(2n-1)\pi + i \frac{(2n-1)\pi}{2(1-r_1)}. \quad (11)$$

Заметим, что если величины нескольких первых комплексных корней на плоскости  $\gamma_2 = 0$  зависят от  $r_1$  и  $\nu$ , то их асимптотическое значение – только от  $r_1$  [25]. Для пустого и заполненного жидкостью цилиндров существуют по четыре комплексно сопряженных корня (по одному в каждом квадранте плоскости  $\gamma_2 = 0$ ). Четверка корней с равными модулями образует одну группу. Корни с положительными вещественными частями описывают неоднородные волны, распространяющиеся в положительном направлении оси  $z$ , а с отрицательными – в обратном направлении. Для волноводов с конечным поперечным сечением (пустого и заполненного жидкостью цилиндров) неоднородные волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, обладают симметрией. При этом фазовые скорости и характеристики затухания волн в пределах одной группы совпадают, так

что для описания их достаточно исследовать лишь одну из соответствующих кривых.

Каждому значению  $\zeta$  из четверки комплексных корней в группе после подстановки в выражения (2) и (3) соответствует затухающая или возрастающая по амплитуде бегущая волна. При  $z \geq 0$  решение с убывающей амплитудой описывают волны, для которых  $\zeta = \pm\xi + i\eta$ . Два других корня дают волны с амплитудой, убывающей в направлении  $z \leq 0$ . Сгруппировав две бегущие навстречу друг другу волны [30]

$$\begin{aligned} u_{j,1} &= U_j(\xi + i\eta, z) \exp[-\eta z + i(\xi z - \omega t)], \\ u_{j,2} &= U_j(-\xi + i\eta, z) \exp[-\eta z - i(\xi z + \omega t)], \quad (12) \\ j &= r, z, \end{aligned}$$

получаем стоячую волну с экспоненциально убывающей амплитудой в направлении  $z \geq 0$ :  $\exp(-\eta z) \cos \xi z$ . Она не переносит энергию, поэтому такое решение не противоречит физическому смыслу задачи.

На плоскости  $\gamma_2 = 0$  первые два комплексных корня заполненного водой цилиндра из жесткой резины с  $r_1 = 0.3$  имеют следующие значения:  $\zeta_1^* = \pm 1.612 \pm i 2.371$ ,  $\zeta_2^* = \pm 3.204 \pm i 6.38$ . В пустом цилиндре им соответствуют корни  $\zeta_1 = \pm 1.615 \pm i 2.371$ ,  $\zeta_2 = \zeta_2^*$ . Видно, что с точностью до третьего знака после запятой влияние жидкости незначительно изменяет лишь первый корень. Величины более высоких корней пустого и заполненного жидкостью цилиндров практически совпадают.

На рис. 1 дисперсионные кривые составного волновода, соответствующие комплексным корням с положительной и отрицательной вещественными частями, совпадают. Комплексные ветви оканчиваются в экстремальных точках действительных или мнимых дисперсионных кривых. Например, первая комплексная кривая оканчивается в точке относительного минимума третьей действительной дисперсионной ветви ( $\gamma_2 = 4.6$ ,  $\zeta = 1.034$ ), а вторая – в точке ( $\gamma_2 = 9.1$ ,  $\zeta = 1.48i$ ).

Сравнение результатов для случаев жесткого [24–27] и податливого [28, 29] материалов составного волновода выявило ряд существенных различий в проявлении эффектов взаимодействия волновых движений в упругом цилиндре и жидком ядре. Для жесткого цилиндра дисперсионные кривые составного волновода в широкой области частот и волновых чисел расположены весьма близко к дисперсионным кривым парциальных подсистем. Соответствующие им нормальные волны являются практически жидкостными или упругими. Взаимодействие волновых движений в

упругой и жидкой составляющих волновода проявляется в узких областях частот и волновых чисел, расположенных вблизи точек пересечения дисперсионных кривых парциальных подсистем. Для составного волновода с податливым цилиндром взаимодействие волновых движений существенно в широком диапазоне частот и волновых чисел, а методика выделения парциальных подсистем оказывается гораздо менее эффективной.

## 2.2. Упругий цилиндр, заполненный и окруженный жидкостью

Влияние излучения энергии в окружающую жидкость на свойства нормальных волн рассмотрим на основе данных расчета для цилиндра из жесткой резины с  $r_1 = 0.3$ , заполненного и окруженного водой. Выбор такой толщины позволяет провести сравнение полученных результатов с приведенными в [16] данными для стального цилиндра. Поскольку жидкость внутри и снаружи упругого цилиндра одна и та же, то рассматриваемая задача характеризуется такими же безразмерными параметрами, как и в предыдущем случае:

$$\frac{V_S}{C_2} = \frac{V_S}{C_0} = 0.395, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho_0}{\rho_1} = 0.909.$$

Из структуры дисперсионного уравнения (6), отражающего возможность излучения энергии на бесконечность, следует, что оно в общем случае является комплексным. Лишь в секторе плоскости  $(\text{Re } \zeta, \gamma_2)$ , в котором величина  $\chi_2$  будет мнимой, согласно формуле (7), указанное соотношение становится вещественным. Очевидно, что именно в этой области следует искать действительные корни дисперсионного уравнения, которым соответствуют волны, распространяющиеся без затухания.

На рис. 2 представлены зависимости волновых чисел от частоты для четырех первых нормальных волн рассматриваемого упруго-жидкостного цилиндрического волновода. При их графическом изображении соблюдался принцип, согласно которому каждая дисперсионная кривая должна быть непрерывной от начала при  $\gamma_2 = 0$  и до бесконечной частоты. Характерная прямая  $OC$  ( $\chi_2 = 0$ ) делит плоскость  $(\text{Re } \zeta, \gamma_2)$  на две части. Ниже этой линии существуют два действительных корня уравнения (6).

Кривые, соответствующие упомянутым действительным корням, изображены сплошными линиями 1 и 2. Они проходят через начало координат, что указывает на существование таких волновых движений при любой, сколь угодно малой,



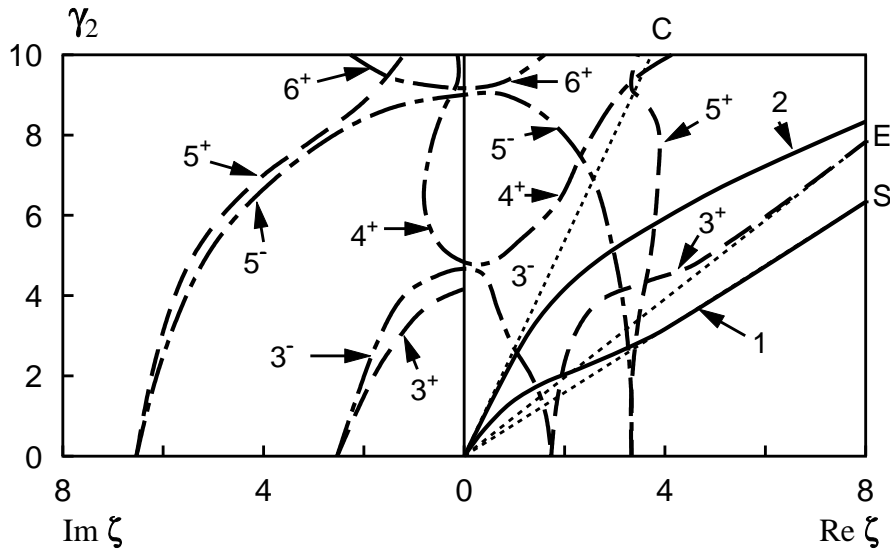


Рис. 2. Дисперсионные ветви нормальных волн в заполненном и окруженном водой цилиндре из жесткой резины с  $r_1 = 0.3$

частоте. Поскольку обе ветви расположены ниже прямой  $OC$ , то фазовые скорости соответствующих нормальных волн меньше скорости звука в жидкости. Кривая 2 для частот  $\gamma_2 \leq 2$  графически совпадает с нижней дисперсионной кривой пустого цилиндра. Предельные значения фазовых скоростей этих волн с увеличением волнового числа (частоты) приведены ниже.

Еще две дисперсионные ветви, соответствующие комплексным корням дисперсионного уравнения, начинаются при  $\gamma_2 = 0$ . Комплексные корни для заполненного и окруженного жидкостью цилиндра и пустого цилиндра здесь практически совпадают. Важным является то, что само дисперсионное уравнение на этой плоскости становится действительным, а его корни – комплексно сопряженными. Именно это свойство позволяет организовать алгоритм вычисления комплексных корней сложного дисперсионного уравнения (6) при  $\gamma_2$ , отличных от нуля.

Как и в предыдущем случае, комплексные корни образуют группы-четверки, которые будем нумеровать в порядке возрастания их модулей на плоскости  $\gamma_2 = 0$ . Для составных волноводов с бесконечным поперечным сечением с ростом частоты комплексные корни одной группы распадаются попарно на две подгруппы с разными модулями:  $\zeta_{1,2} = \pm(\xi_1 + i\eta_1)$  и  $\zeta_{3,4} = \pm(-\xi_3 + i\eta_3)$ . Поэтому для описания свойств неоднородных волн, убывающих в заданном направлении оси  $z$ , для таких составных волноводов достаточно исследовать поведение двух корней с разными знаками вещественной

и одинаковыми знаками мнимой части (по одной кривой из каждой подгруппы).

Основное отличие цилиндра, заполненного и окруженного жидкостью, от заполненного жидкостью цилиндра состоит в том, что двум бегущим навстречу друг другу неоднородным волнам соответствуют различные по модулю значения комплексных волновых чисел. При подстановке в выражения (3) значений  $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$  и  $\zeta_3 = -\xi_3 + i\eta_3$  получим две бегущие волны с экспоненциально убывающими в направлении  $z > 0$  амплитудами:

$$u_{j,1} = U_j(\xi_1 + i\eta_1, z) \exp[-\eta_1 z + i(\xi_1 z - \omega t)],$$

$$u_{j,3} = U_j(-\xi_3 + i\eta_3, z) \exp[-\eta_3 z - i(\xi_3 z + \omega t)], \quad (13)$$

$$j = r, z.$$

Они переносят энергию вдоль осевой координаты, однако ее средний поток убывает с ростом  $z$ . Это решение имеет физический смысл, так как здесь учтено излучение энергии в окружающую среду. Заметим, однако, что поскольку  $\xi_1 \neq \xi_3$  и  $\eta_1 \neq \eta_3$ , то две рассматриваемые волны не образуют стоячую волну.

На рис. 2 представлены проекции на действительную и мнимую плоскости комплексных кривых, соответствующих двум корням из первой группы (они помечены как  $3^+$  и  $4^-$ ). По существу, они являются графическим изображением частотных зависимостей действительной и мнимой составляющих комплексных корней диспер-

сионного уравнения волновода. Знак действительной составляющей корня указан при номере кривой. Проекция, соответствующая знаку “+”, изображены штриховыми, а знаку “-” – штрихпунктирными линиями.

Качественно сравним поведение комплексных дисперсионных кривых первой группы на рис. 1 и 2. Для заполненного жидкостью цилиндра проекции комплексных кривых со знаком “+” и “-” (штриховая кривая  $3^\pm$  на рис. 1) совпадают вплоть до вхождения их в экстремальную точку (относительного минимума) действительной дисперсионной кривой 3. Продолжение комплексной кривой  $3^+$  – отрезок действительной кривой 3, расположенный справа от экстремума. Продолжением комплексной кривой  $3^-$  будет отрезок кривой 4, расположенный слева от экстремальной точки. Далее он входит в точку  $\gamma_2 = 4.70575$  на частотной оси, соответствующую частоте запираения нормальной волны с продольно-сдвиговым типом движения. Последняя является неизлучающей. Продолжение указанного отрезка действительной кривой – мнимая петля 4, оканчивающаяся в точке  $\gamma_2 = 5.6254$  на частотной оси и соответствующая частоте запираения нормальной волны с радиальным типом движения. Волна с радиальным типом движения оказывается излучающей. Продолжением мнимой петли будет действительная кривая 4.

Проанализируем поведение комплексных дисперсионных кривых для заполненного и окруженного жидкостью цилиндра, представленных на рис. 2. Учет излучения энергии в окружающую жидкость привел к тому, что дисперсионное уравнение волновода (6) стало комплексным. Корни этого уравнения не являются комплексно сопряженными. Представленные на рис. 2 дисперсионные кривые показывают, что частотная зависимость действительной и мнимой составляющих комплексных корней имеет явно выраженный немонотонный характер. Наличие окружающей жидкости существенно повлияло на частотную зависимость действительных составляющих комплексных корней. Действительная составляющая корня, соответствующая проекции кривой  $3^+$  на действительную плоскость, с ростом частоты увеличивается, а соответствующая кривой  $4^-$  – уменьшается. Проекция кривой  $3^+$  на действительную плоскость характеризуется наличием широкой области частот, в которой существенное увеличение частоты вызывает незначительное возрастание действительной составляющей корня. В этой области частот фазовая скорость неоднородной волны, соответствующей кривой  $3^+$ , линейно

возрастает с увеличением частоты. Комплексная кривая  $3^+$  при частоте  $\gamma_2 = 5.16$  становится действительной дисперсионной кривой 3, которой соответствует не подверженная радиационному демпфированию нормальная волна.

Комплексная кривая  $4^-$  с увеличением частоты проходит через частоту запираения волны с продольно-сдвиговым типом движения. Продолжением комплексной кривой  $4^-$  далее становится комплексная кривая  $4^+$  (изменяется знак действительной части комплексного корня). С увеличением частоты проекции кривой  $4^+$  на действительную и мнимую плоскости образуют почти симметричную петлю, которая сужается в окрестности частоты запираения продольно-сдвиговой моды волновода ( $\gamma_2 = 9.10423$ ). При  $\gamma_2 = 9.1$  постоянная распространения равна  $\zeta = 0.468 + i1.237$ . Существенные отличия проекций кривых  $3^+$ ,  $4^-$  и  $4^+$  на действительную плоскость физически означают, что фазовые скорости соответствующих этим кривым неоднородных волн сильно отличаются в широкой области частот. Фазовые скорости неоднородных волн весьма близки в узкой области частот  $\gamma_2 < 1$ . Эта область увеличивается с увеличением порядкового номера группы комплексных корней дисперсионного уравнения (6).

В то же время окружающая жидкость не оказала существенного влияния на частотную зависимость мнимой составляющей корней, соответствующих кривым  $3^+$  и  $4^-$ . На рис. 2 проекции этих кривых на мнимую плоскость весьма близки в широкой области частот. Физически это означает, что характеристики затухания неоднородных волн, соответствующих кривым  $3^+$  и  $4^-$ , весьма близки в этой области частот. Следовательно, наличие окружающей жидкости оказывает существенное влияние на значения фазовых скоростей и практически не влияет на характеристики затухания неоднородных волн в широкой области частот. Отметим, что дисперсионные кривые, соответствующие комплексным корням последующих групп, обладают аналогичными частотными зависимостями.

Основное отличие окруженного жидкостью полнотелого цилиндра от случая жесткого материала состоит в появлении в области высоких частот дополнительных волн, неподверженных радиационному демпфированию. Табл. 1 иллюстрирует характер изменения относительных фазовых скоростей первых четырех бегущих волн с увеличением волнового числа. Согласно приведенным данным, с увеличением волнового числа фазовые скорости двух низших бегущих волн стремятся к скорости поверхностной волны Стоунли, причем

Табл. 1. Дисперсионные характеристики первых четырех незатухающих волн заполненного и окруженного жидкостью цилиндра с  $r_1 = 0.3$  (вода – жесткая резина – вода)

$\zeta$	$\gamma_{2,1}$	$C_{p1}/V_S$	$\gamma_{2,2}$	$C_{p2}/V_S$	$\gamma_{2,3}$	$C_{p3}/V_S$	$\gamma_{2,4}$	$C_{p4}/V_S$
10	8.10087	0.810087	8.62287	0.862872	12.14131	1.21413	14.79550	1.47955
30	24.45436	0.815145	24.70547	0.823516	30.52169	1.01739	31.87270	1.06242
40	32.60610	0.815152	32.83497	0.820874	40.35866	1.00897	41.32621	1.03316
50	40.75973	0.815195	40.97332	0.819466	50.27212	1.00544	51.01641	1.02033
100	81.53593	0.815359	81.71410	0.817141	100.1225	1.001225	100.46058	1.00461

для первой волны – снизу, а для второй – сверху. Скорость волны Стоунли в случае контакта упругого и жидкого полупространств (пара жесткая резина – вода) составляет  $C/V_S = 0.815624$ . Проведенные вычисления показали, что с увеличением частоты и волнового числа некоторые неоднородные волны, соответствующие комплексным ветвям, становятся незатухающими. Их фазовые скорости для больших волновых чисел приближаются сверху к скорости волны сдвига в материале цилиндра. Окруженные жидкой средой волноводы обладают этим свойством только в случае податливого материала цилиндра. В правой части табл. 1 приведены данные для первых двух таких волн.

Рис. 2 показывает, что для заполненных и окруженных жидкостью цилиндров из податливых материалов характер зависимости постоянной распространения от частоты заметно отличается от случая волноводов из жестких материалов [16]. Прежде всего, это касается первых двух чисто действительных дисперсионных кривых с нулевой частотой запертия, лежащих значительно ниже прямой  $OC$ . В то же время, для жесткого цилиндра ( $r_1 = 0.3$ ) вещественные дисперсионные кривые лежат лишь чуть ниже прямых  $\chi_0 = 0$  и  $\chi_2 = 0$ , графически совпадая с ними [16, 18]. Фазовые скорости распространяющихся волн в трехслойном волноводе из жесткого материала весьма близки к скорости звука в жидкости (отметим, что при контакте двух полупространств сталь – вода  $C/C_0 = 0.9997$ ). В случае же податливого материала цилиндра фазовые скорости этих волн значительно меньше скорости звука в жидкости ( $C/C_0 = 0.32185$ ).

Существенное отличие наблюдается также в характеристиках неоднородных волн, соответствующих комплексным корням дисперсионного уравнения (6). Для трехслойного волновода из жесткого материала комплексные корни разделяются на три группы [16]. Первая из них – корни с малой мнимой частью, соответствующие дей-

ствительным корням цилиндра с жидкостью (без внешней среды). Вторая группа – корни с малой вещественной частью, соответствующие мнимым корням этого волновода. К третьей группе принадлежат корни, соответствующие комплексным корням цилиндра с жидкостью, вещественная и мнимая части которых имеют одинаковый порядок.

В случае податливого материала цилиндра все комплексные дисперсионные кривые трехслойного волновода принадлежат к третьей группе. Характеристики неоднородных волн, распространяющихся в противоположных направлениях, отличаются в более широкой области частот, чем в случае жесткого цилиндра. При этом различия для фазовых скоростей более значительны, чем для характеристик затухания. Напомним, что для жесткого материала существенные отличия наблюдаются только в окрестности частот, при которых комплексные кривые цилиндра с жидкостью входят в действительную или мнимую плоскости.

Приведенные на рис. 2 данные соответствуют случаю толстостенного составного волновода. В [28] проведена оценка влияния толщины стенки цилиндра на поведение первых двух распространяющихся волн для заполненного жидкостью цилиндра из податливого материала при изменении относительного внутреннего радиуса от  $r_1 = 0.3$  до  $r_1 = 0.95$ . Исследования показали, что увеличение  $r_1$  (уменьшение толщины цилиндра) по-разному влияет на их характеристики. Так, фазовая скорость первой распространяющейся волны уменьшается, а второй – увеличивается. Аналогично воздействует увеличение  $r_1$  на первые две распространяющиеся волны в случае заполненного и окруженного жидкостью цилиндра из податливого материала. Значения относительных фазовых скоростей этих волн для рассматриваемого трехслойного волновода с  $r_1 = 0.7$  и  $0.9$  приведены в табл. 2. Представленные данные показывают, что и для этого волновода увеличение  $r_1$  оказывает сходное влияние на величины фазо-

вых скоростей низших распространяющихся волн. Естественно, что предельное значение достигается здесь при существенно больших волновых числах.

### 3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВОЛН

Данные о дисперсионных свойствах нормальных волн лишь частично раскрывают особенности волновых движений в составных волноводах с бесконечным поперечным сечением. Дополнительные сведения можно получить на основе анализа кинематических и энергетических характеристик распространяющихся волн. Для начала рассмотрим первые две нормальные волны для заполненного и окруженного водой цилиндра из жесткой резины с  $r_1 = 0.3$  и  $r_1 = 0.7$  в области волновых чисел, в которой уже сформировались поверхностные волны Стоунли.

Анализ энергетических характеристик волн проведем на примере среднего за период потока мощности в осевом направлении волновода  $W_z$ , состоящего из потоков мощности в жидком ядре  $W_{z0}$ , упругом цилиндре  $W_{z1}$  и окружающей жидкости  $W_{z2}$ , которые определяются из соотношений

$$\begin{aligned} W_{z0} &= \frac{\pi\gamma_2}{2} \frac{\rho_0}{\rho_1} \left( \frac{C_0}{V_S} \right)^2 \zeta D_0^2 \times \\ &\quad \times \int_0^{r_1} I_0^2(\chi_0) r dr, \\ W_{z1} &= \frac{\pi\gamma_2}{2} \int_{r_1}^1 (-\sigma_{zz} U_z + \sigma_{rz} U_r) r dr, \\ W_{z2} &= \frac{\pi\gamma_2}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{C_2}{V_S} \right)^2 \zeta D_2^2 \left( \frac{2}{\pi} \right)^2 \times \\ &\quad \times \int_1^\infty K_0^2(\chi_2) r dr. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь учтено, что вещественные корни дисперсионного уравнения, которым соответствуют распространяющиеся волны, расположены в дозвуковой области. При проведении конкретных расчетов постоянные  $A_i$ ,  $B_i$  ( $i=1, 2$ ) в выражениях для  $U_r$ ,  $U_z$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{rz}$  и постоянная  $D_0$  в выражении (3) находились с точностью до константы  $D_2$ , входящей в формулу (4). При вычислении интеграла в выражении  $W_{z2}$  верхний предел полагался равным 2, поскольку в окружающей жидкости на интервале изменения радиальной координаты от 1 до 2 компоненты вектора перемещений и тензора на-

пряжений для рассмотренных распространяющихся волн становились практически равными нулю.

В табл. 3 приведены отношения потоков энергии в упругой и жидких частях волноводной системы к полному потоку энергии в нормальной волне  $WE_i = W_{zi}/W_z$  ( $i = 0, 1, 2$ ) для первых пяти распространяющихся волн. Представленные данные позволяют провести оценку роли отдельных составляющих волновода в формировании его энергетического поля. В таблице также дано отношение продольных смещений к радиальным  $u_{zr} = |U_{z \max}|/|U_{r \max}|$ .

На приведенных ниже графиках показано изменение по радиусу составного волновода нормированных амплитуд осевых и радиальных перемещений  $U_i^* = U_i/|U_{i \max}|$  ( $i = r, z$ ) для волновых чисел  $\zeta = 40$  (штриховые кривые 1) и  $\zeta = 100$  (сплошные кривые 2). Значения частот и относительных фазовых скоростей, соответствующих волновым числам, приведены в табл. 1 и 2. Кинематические характеристики волновода с  $r_1 = 0.3$ , соответствующие первой нормальной волне, представлены на рис. 3, а второй – на рис. 4. Из графиков видно, что первой нормальной волне соответствует поверхностная волна Стоунли, локализованная вблизи внешней поверхности цилиндра, а второй – волна Стоунли, локализованная вблизи внутренней поверхности цилиндра. Как и в случае цилиндра, заполненного жидкостью, волновые возмущения в окрестности поверхности контакта в равной степени захватывают жидкую и упругую составляющие волновода [29]. Отношение продольных перемещений к радиальным немного превышает единицу ( $u_{zr} = 1.051$  при  $\zeta = 100$  для волны Стоунли вблизи внешней поверхности цилиндра).

Анализ энергетических характеристик первой нормальной волны (первые четыре строчки табл. 3) показывает, что практически вся энергия волны переносится упругим цилиндром и окружающей жидкостью. Так, при  $\zeta = 40$  упругий цилиндр переносит  $WE1 \approx 83.5\%$  энергии, а окружающая жидкость –  $WE2 \approx 16.5\%$ . С увеличением волнового числа количество энергии, переносимой окружающей жидкостью, незначительно увеличивается (до  $16.7\%$  при  $\zeta = 100$ ).

Во второй нормальной волне энергия переносится упругим цилиндром и жидким ядром. По сравнению с первой нормальной волной, количество энергии, переносимой цилиндром, несколько уменьшилось: при  $\zeta = 40$  он переносит  $WE1 = 81.6\%$ , а при  $\zeta = 100$  –  $WE1 = 82.6\%$ . С ростом волнового числа доля энергии, переносимой цилиндром, увеличивается, и соответственно уменьшается энергия, переносимая жидким ядром.

Табл. 2. Дисперсионные характеристики первых двух незатухающих волн заполненного и окруженного жидкостью цилиндра с  $r_1=0.7$  и  $r_1=0.9$  (вода – жесткая резина – вода)

$r_1$	$\zeta$	$\gamma_{2,1}$	$C_{p1}/V_S$	$\gamma_{2,2}$	$C_{p2}/V_S$
0.7	10	6.59512	0.659512	10.93799	1.093799
0.7	30	24.29068	0.80969	24.72769	0.824256
0.7	40	32.58282	0.81457	32.71608	0.81790
0.7	50	40.75826	0.815165	40.84506	0.81690
0.7	100	81.53593	0.815359	81.61620	0.81620
0.9	10	2.95715	0.295715	15.43287	1.543287
0.9	30	19.48431	0.649476	32.77581	1.092527
0.9	40	28.77072	0.719268	38.79623	0.969906
0.9	50	37.94127	0.758825	44.98492	0.899698
0.9	100	81.17846	0.811784	81.98837	0.819884

Табл. 3. Относительное распределение осевой энергии по поперечному сечению составляющих волновода вода – жесткая резина – вода для незатухающих волн

$r_1$	$\zeta$	$\gamma_2$	$C_p/V_S$	WE0	WE1	WE2	$u_{zr}$
0.3	30	24.45436	0.815145	$0.1 \cdot 10^{-6}$	0.8366	0.1634	1.018
0.3	40	32.60610	0.815152	$0.76 \cdot 10^{-10}$	0.8354	0.1646	1.028
0.3	50	40.75973	0.815195	$0.4 \cdot 10^{-13}$	0.8347	0.1653	1.042
0.3	100	81.53593	0.815359	$0.76 \cdot 10^{-30}$	0.8333	0.1667	1.051
0.3	30	24.70547	0.823516	0.1908	0.8092	$0.2 \cdot 10^{-6}$	1.126
0.3	40	32.83497	0.820874	0.1843	0.8157	$0.1 \cdot 10^{-9}$	1.107
0.3	50	40.97332	0.819466	0.1807	0.8193	$0.6 \cdot 10^{-13}$	1.096
0.3	100	81.71410	0.817141	0.1741	0.8259	$0.8 \cdot 10^{-30}$	1.076
0.7	30	24.29068	0.80969	0.064	0.8444	0.0913	1.018
0.7	40	32.58282	0.814570	0.0303	0.8367	0.1331	1.028
0.7	50	40.75826	0.815165	0.003	0.8348	0.1622	1.042
0.7	100	81.53593	0.815359	$0.4 \cdot 10^{-9}$	0.8333	0.1667	1.051
0.7	30	24.72769	0.824256	0.1163	0.8104	0.073	1.079
0.7	40	32.71608	0.817902	0.1453	0.8239	0.0309	1.075
0.7	50	40.84506	0.816901	0.1704	0.8266	0.003	1.073
0.7	100	81.61620	0.816162	0.1707	0.8293	$0.4 \cdot 10^{-9}$	1.065
0.3	100	100.1225	1.00123	$0.36 \cdot 10^{-4}$	0.9999	$0.38 \cdot 10^{-4}$	0.071
0.3	100	100.46056	1.00461	$0.15 \cdot 10^{-3}$	0.9997	$0.14 \cdot 10^{-3}$	0.125
0.3	100	101.01822	1.01018	$0.33 \cdot 10^{-3}$	0.9994	$0.32 \cdot 10^{-3}$	0.179

Кинематические характеристики волновода с  $r_1=0.7$  представлены на рис. 5 (для первой нормальной волны) и на рис. 6 (для второй нормальной волны). Видно, что уменьшение толщины стенки цилиндра (увеличение  $r_1$ ) существенно отразилось на кинематических характеристиках нормальных волн. Так, при  $\zeta=40$  наблюдается локализация волновых движений в окрестности обеих поверхностей цилиндра. Однако для первой нормальной волны амплитуда перемещений на внутренней поверхности цилиндра заметно меньше, чем на внешней. В то же время, для второй нормальной волны амплитуда перемещений на внешней поверхности меньше, чем на внутренней.

Естественно, что при этом происходит и перераспределение потоков энергии волн между со-

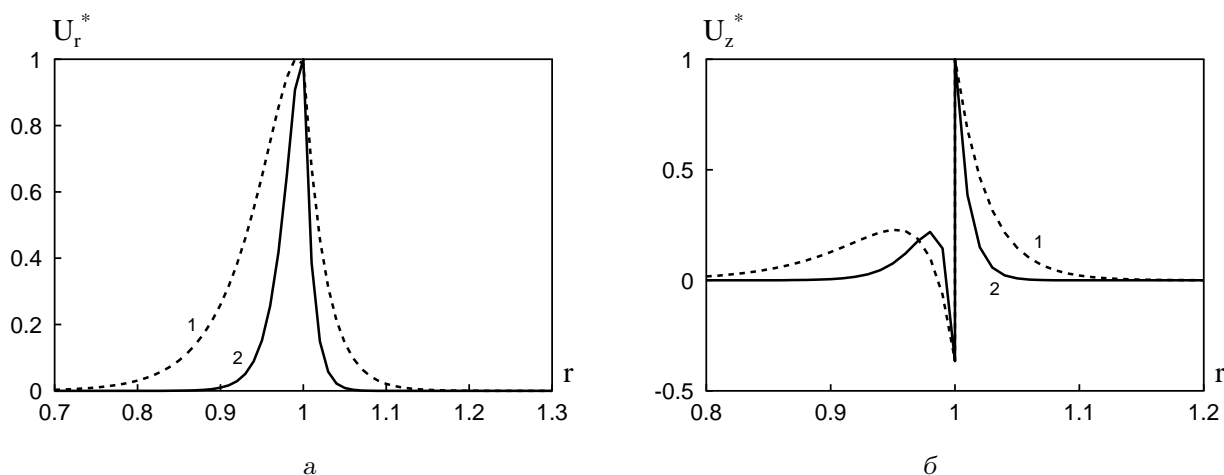


Рис. 3. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений для первой нормальной волны составного волновода с  $r_1=0.3$ :  
 1 -  $\zeta=40$ , 2 -  $\zeta=100$

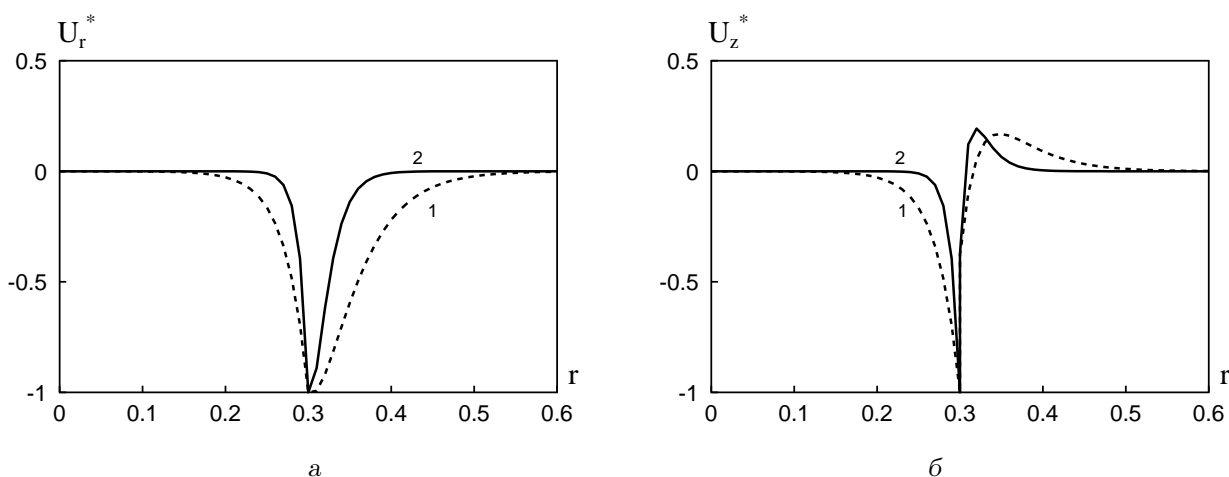


Рис. 4. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений для второй нормальной волны составного волновода с  $r_1=0.3$ :  
 1 -  $\zeta=40$ , 2 -  $\zeta=100$

ставляющими волновода. Если сравнивать с толстостенным волноводом ( $r_1 = 0.3$ ), для первой нормальной волны доля энергии, переносимой окружающей жидкостью, уменьшилась с 16.5 до 13.3 %. При этом увеличилось количество энергии, переносимой упругим цилиндром и жидким ядром. Для второй нормальной волны наблюдается аналогичная ситуация: доля энергии, переносимой жидким ядром, уменьшилась с 18.4 до 14.5 %, а энергия, переносимая окружающей жидкостью и упругим цилиндром, заметно возросла.

С ростом волнового числа кинематические и энергетические характеристики волноводов с  $r_1 =$

0.3 и  $r_1 = 0.7$  сближаются и при  $\zeta = 100$  практически совпадают. Заметим, что при уменьшении толщины цилиндра отношение осевых перемещений к радиальным для обеих волн практически не изменилось.

Проведем анализ особенностей распространяющихся волн, фазовая скорость которых с увеличением волнового числа стремится к скорости волны сдвига материала цилиндра. Кинематические характеристики первых двух таких волн для цилиндра с  $r_1 = 0.3$  при  $\zeta = 100$  показаны на рис. 7 (см. также табл. 1). Сплошные кривые соответствуют первой, а штриховая – второй волне. Представ-

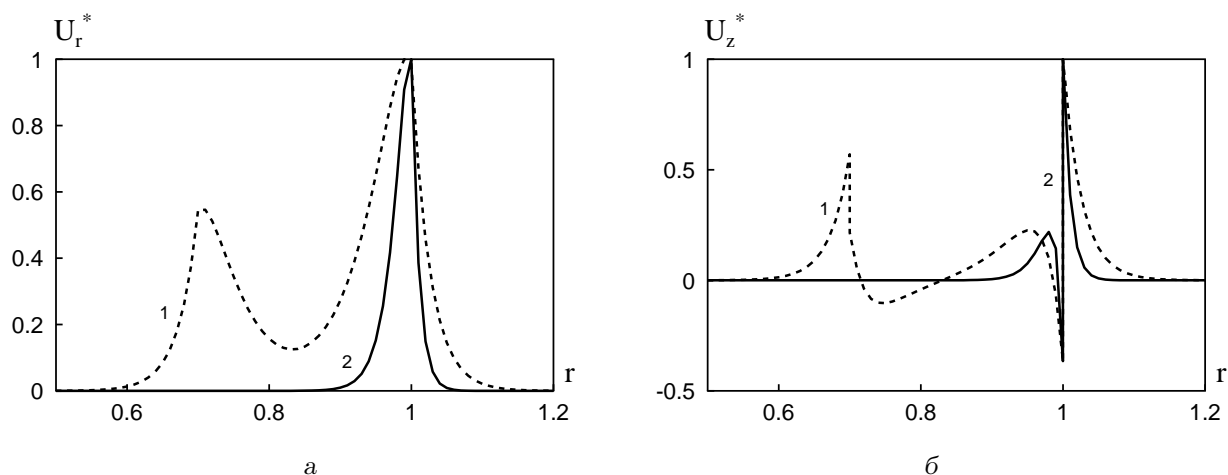


Рис. 5. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений для первой нормальной волны составного волновода с  $r_1=0.7$ :  
1 –  $\zeta=40$ , 2 –  $\zeta=100$

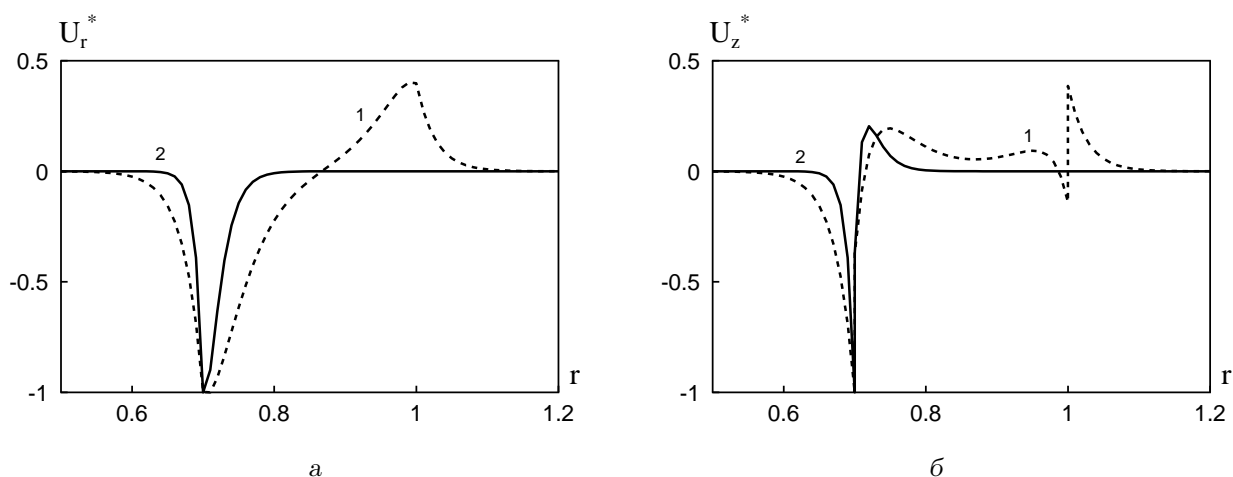


Рис. 6. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений для второй нормальной волны составного волновода с  $r_1=0.7$ :  
1 –  $\zeta=40$ , 2 –  $\zeta=100$

ленные результаты указывают на то, что волновое возмущение сосредоточено в упругом цилиндре. В жидкости (как внутренней, так и внешней) возмущения сосредоточены вблизи поверхностей цилиндра в весьма узких областях.

В табл. 4 приведены значения нормированных амплитуд радиальных и осевых перемещений в окрестности внутренней и внешней поверхностей цилиндра для первой из этих волн ( $\zeta = 100$  и  $\gamma_2 = 100.12254$ ). Данные, отраженные в таблице, подтверждают, что волновое возмущение сосредоточено в упругом цилиндре. Амплитуды радиальных возмущений на поверхностях цилиндра

малы, а максимального значения они достигают при  $r=0.62$ . Осевые перемещения принимают максимальные значения во внутренней жидкости на поверхности контакта с цилиндром. В упругом цилиндре их амплитуды являются большими также вблизи внутренней поверхности:  $U_{z\max}^* = -0.89$  при  $r=0.35$ .

Отношение продольных перемещений к радиальным для этой волны равно  $u_{zr} = 0.071$ . Следовательно, для нее радиальные перемещения преобладают. Анализ энергетических характеристик рассмотренных распространяющихся волн (см. 17–19-ую строки табл. 3) показывает, что почти

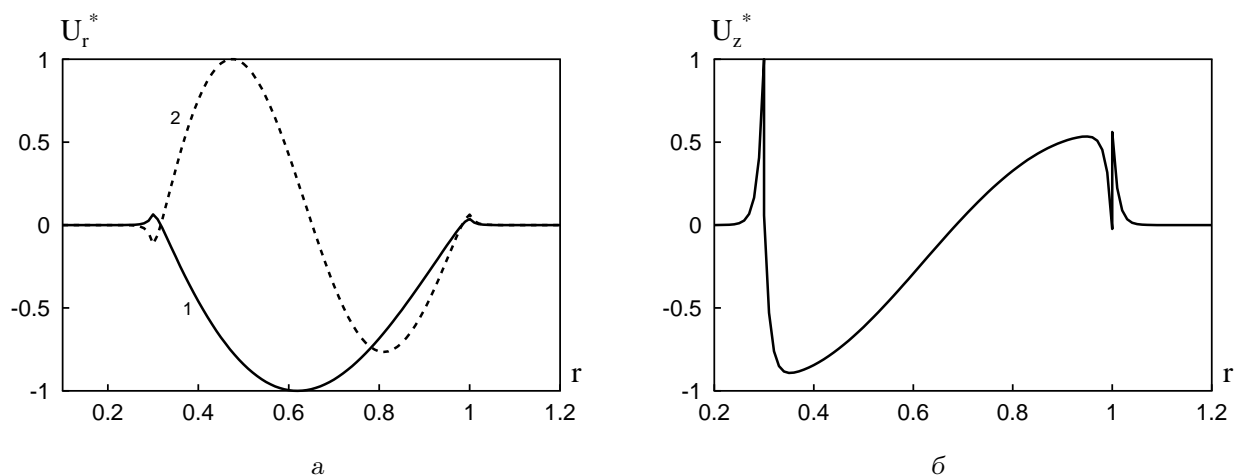


Рис. 7. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений для нормальных волн составного волновода с  $r_1 = 0.3$ , фазовая скорость которых близка скорости волны сдвига ( $\zeta = 100$ ): 1 – третья нормальная волна, 2 – четвертая нормальная волна

Табл. 4. Распределение кинематических характеристик незатухающих волн высоких порядков вблизи поверхностей контакта жидкости и упругого цилиндра для волновода вода – жесткая резина – вода

внутренняя стенка цилиндра								
$r$	0.27	0.28	0.29	0.3	0.3	0.31	0.32	0.33
$U_z^*$	0.067	0.165	0.406	1.0	0.058	-0.529	-0.761	-0.850
$U_r^*$	0.004	0.011	0.026	0.064	0.064	0.035	-0.015	-0.073
внешняя стенка цилиндра								
$r$	0.97	0.98	0.99	1.0	1.0	1.01	1.02	1.03
$U_z^*$	0.509	0.454	0.317	-0.024	0.561	0.223	0.089	0.035
$U_r^*$	-0.045	-0.009	0.021	0.037	0.037	0.015	0.006	0.002

всю энергию здесь переносит упругий цилиндр.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены свойства волн в упругих цилиндрических волноводах, окруженных акустической средой. Учет излучения в окружающую среду порождает специальный механизм затухания волн, называемый радиационным излучением. Этот механизм проявляется по-разному для жестких и податливых материалов. В данной работе установлены особенности волновых движений в окруженных жидкостью составных упруго-жидкостных волноводах для случая податливого материала цилиндра. Числовые результаты получены для системы, в которой внутри и снаружи цилиндра находится одна и та же жидкость.

Уменьшение жесткости упругой составляющей волновода по сравнению со случаем жесткого ма-

териала вызывает качественные изменения дисперсионных, кинематических и энергетических характеристик нормальных волн. Основной причиной этого является существенная разница в относительных величинах фазовых скоростей волн Стоунли для рассматриваемых пар контактирующих сред. Напомним, что при контакте жесткого полупространства с жидкостью фазовая скорость волны Стоунли лишь ненамного ниже скорости звука в жидкости, а в случае податливого упругого материала – значительно меньше нее.

Если заполняющая и окружающая цилиндр жидкости одинаковы, то в составном упруго-жидкостном волноводе всегда будут существовать две нормальных волны, неподверженных радиационному демпфированию. С увеличением волнового числа их фазовые скорости в пределе стремятся к скорости волны Стоунли: для первой волны – снизу, а для второй – сверху. При этом пер-



вой незатухающей волне соответствует поверхностная волна вблизи внешней поверхности цилиндра, а второй – вблизи внутренней поверхности.

Специфика волнового поля трехслойного волновода с цилиндром из податливого материала состоит в появлении с ростом частоты (волнового числа) неподверженных радиационному демпфированию волн высших порядков, фазовые скорости которых стремятся к скорости волны сдвига в материале цилиндра. Анализ кинематических и энергетических характеристик этих бегущих волн показал, что для них волновое движение практически полностью сосредоточено в упругом цилиндре.

Все остальные волны рассмотренного волновода являются неоднородными и соответствуют комплексным корням комплексного трансцендентного дисперсионного уравнения. Комплексные дисперсионные кривые начинаются на плоскости  $\gamma_2 = 0$  в окрестности тех же значений волновых чисел, что и для заполненного жидкостью цилиндра при отсутствии окружающей среды. Это обстоятельство чрезвычайно важно для организации эффективного процесса нахождения значений комплексных корней.

В широкой области частот окружающая жидкость оказывает существенное влияние на значения фазовых скоростей и слабо влияет на характеристики затухания неоднородных волн, распространяющихся в противоположных направлениях. При отсутствии окружающей жидкости фазовые скорости и характеристики затухания неоднородных волн, распространяющихся в заполненном жидкостью цилиндре в противоположных направлениях, совпадают.

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
2. Ewing W. E., Jardezky W. S., Press F. Elastic waves in layered media. – New York: McGraw-Hill, 1957. – 380 p.
3. Шульга Н. А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
4. Thurston R. N. Elastic waves in rods and clad rods // J. Acoust. Soc. Amer. – 1978. – **64**, N 1. – P. 1–37.
5. Simmons J. A., Drescher-Krasicka E., Wadlley H. N. G. Leaky axisymmetric modes in infinite clad rods. I // J. Acoust. Soc. Amer. – 1992. – **92**, N 2, Pt. 1. – P. 1061–1090.
6. Drescher-Krasicka E., Simmons J. A. Leaky axisymmetric modes in infinite clad rods. II. // J. Acoust. Soc. Amer. – 1992. – **92**, N 2, Pt. 1. – P. 1091–1105.
7. Liu Y., Viens M., Cheeke D. Behavior of extensional wave in a thin rod immersed in a viscous medium // J. Acoust. Soc. Amer. – 1996. – **99**, N 2, Pt. 1. – P. 706–716.
8. Dayal V. Longitudinal waves in homogenous anisotropic cylindrical bars immersed in fluid // J. Acoust. Soc. Amer. – 1993. – **93**, N 3. – P. 1249–1255.
9. Nagy P. B. Longitudinal guided wave in a transversely isotropic rod immersed in fluid // J. Acoust. Soc. Amer. – 1995. – **98**, N 1. – P. 454–457.
10. Ahmad F. Guided waves in a transversely isotropic cylinder immersed in a fluid // J. Acoust. Soc. Amer. – 2001. – **109**, N 3. – P. 886–890.
11. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Дисперсионные характеристики нормальных волн в системе упругий цилиндр – окружающая жидкость // Прикл. мех. – 1994. – **30**, N 2. – С. 11–16.
12. Bargiotti G. V., Rosen E. M. Power flow analysis surface waves on a cylindrical elastic shell in an acoustic fluid // J. Acoust. Soc. Amer. – 1994. – **95**, N 1. – P. 244–255.
13. Bao X. L., Raju P. K., Überal H. Circumferential waves on a immersed, fluid-filled elastic cylindrical shell // J. Acoust. Soc. Amer. – 1999. – **105**, N 5. – P. 2704–2709.
14. Sinha B. K., Plona T. P., Kostek S., Chang S. K. Axisymmetric wave propagation in fluid-loaded plates and shells. I: Theory // J. Acoust. Soc. Amer. – 1992. – **92**, N 2, Pt. 1. – P. 1132–1143.
15. Plona T. P., Sinha B. K., Kostek S., Chang S. K. Axisymmetric wave propagation in fluid-loaded plates and shells. II: Theory versus experiment // J. Acoust. Soc. Amer. – 1992. – **92**, N 2, Pt. 1. – P. 1144–1155.
16. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Осесимметричные волны в упругом полом цилиндре, заполненном и окруженном жидкостью // Прикл. мех. – 1994. – **30**, N 9. – С. 15–23.
17. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Излучение точечного источника внутри упругого полого цилиндра, помещенного в акустическую среду. Свойства нормальных волн и направленность излучения // Прикл. мех. – 1998. – **34**, N 5. – С. 15–23.
18. Комиссарова Г. Л. Обобщенные волны Стоунли в составном упруго-жидкостном волноводе // Доп. НАН України. Сер. А. – 1997. – N 9. – С. 67–74.
19. Berliner M. J., Solecki R. Wave propagation in fluid-loaded, transversely isotropic cylinders. Part I. Analytical formulation // J. Acoust. Soc. Amer. – 1996. – **99**, N 4, Pt. 1. – P. 1841–1847.
20. Berliner M. J., Solecki R. Wave propagation in fluid-loaded, transversely isotropic cylinders. Part II. Numerical results // J. Acoust. Soc. Amer. – 1996. – **99**, N 4, Pt. 1. – P. 1848–1853.
21. Sessarego J. P., Sageloli J., Garanhes C., Überal H. Two Scholte–Stoneley waves on doubly fluid-loaded plates and shells // J. Acoust. Soc. Amer. – 1996. – **100**, N 1. – P. 135–142.
22. Aristegui C., Lowe M. J. S., Cawley P. Guided waves in fluid-filled pipes surrounded by different fluids // Ultrasonics. – 2001. – **39**. – P. 367–375.

23. *Chati F., Leon F., Maze G.* Acoustic scattering by a metallic tube with a concentric solid polymer cylinder coupled by a thin water layer. Influence of the thickness of the water layer on the two Scholte–Stoneley waves // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 2005.– **118**, N 5.– P. 2820–2829.
24. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Распространение волн в полом упругом цилиндре с жидкостью // *Прикл. мех.*– 1984.– **20**, N 8.– С. 21–26.
25. *Комиссарова Г. Л.* К решению задачи о распространении волн в цилиндре с жидкостью // *Прикл. мех.*– 1990.– **26**, N 8.– С. 25–29.
26. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Свойства нормальных волн в упруго-жидкостных цилиндрических волноводах // *Акуст. вісн.*– 2000.– **3**, N 3.– С. 44–55.
27. *Комиссарова Г. Л.* Распространение нормальных волн в заполненных жидкостью тонкостенных цилиндрах // *Прикл. мех.*– 2002.– **38**, N 1.– С. 124–134.
28. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Особенности распространения волн в заполненных жидкостью цилиндрах с податливыми стенками // *Акуст. вісн.*– 2001.– **4**, N 3.– С. 22–33.
29. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Свойства локализованных вблизи границ волновых движений в заполненном жидкостью цилиндре // *Акуст. вісн.*– 2006.– **9**, N 2.– С. 37–55.
30. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 283 с.