ISSN 1028-7507 Акустичний вiсник. 2006. Том 9, N 4. С. 12 – 16

УДК 534.1

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗВУКА КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ СФЕРОЙ В РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

А. М. ГОМИЛКО*, **В. И. ДЕНИСЕНКО****

**Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

***Киевский национальный торгово-экономический университет*

Получено 04.10.2006

Приведен алгоритм построения асимптотического по числу Маха решения внешней граничной задачи об излучении звука колеблющейся сферой в равномерно движущейся акустической среде.

Наведено алгоритм побудови асимптотичного за числом Маха розв'язку зовнішньої граничної задачі про випромінювання звуку сферою, яка коливається в акустичному середовищі, що рівномірно рухається.

The paper presents the algorithm for constructing the asymptotic with respect to the Mach number solution of the exterior boundary value problem on sound radiation by a vibrating sphere in a uniformly moving acoustic medium.

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи акустики связаны с проблемами распространения звука в движущейся среде, а также с вопросами излучения звука движущимися источниками (см., например, [1 – 3]).

В данной работе рассмотрена граничная задача об излучении звука колеблющейся сферой, помещенной в равномерно движущуюся идеальную сжимаемую жидкость. В предположении о потенциальности движения возмущенной жидкости приведен алгоритм построения асимптотического по числу Маха решения соответствующей внешней граничной задачи для уравнения Гельмгольца при равномерном движении среды.

Следует также отметить, что идейно близкие постановки рассматривались в работах [4 – 7].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в равномерно движущемся безграничном пространстве $\vec{x}=\{x_1,x_2,x_3\}$, заполненном идеальной сжимаемой жидкостью, совершает гармонические колебательные движения сфера S единичного радиуса с центром в начале координат. Всюду далее временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опускается (ω – циклическая частота колебаний). Считаем, что постоянная скорость потока v направлена вдоль оси Ox_1. В предположении о потенциальности движения возмущенной жидкости потенциал скоростей $\phi=\phi(\vec{x})$ вне сферы S должен удовлетворять уравнению Гельмгольца для равномерно движущейся среды (см. [1, 2]):

$$\Delta\phi + k^2\left(1+i\frac{\beta}{k}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2\phi = 0, \qquad r=|\vec{x}|>1. \quad (1)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа; $k=\omega/c$ – волновое число, c – скорость звука в невозмущенной акустической среде. Параметр

$$\beta = \frac{v}{c} < 1 \quad (2)$$

представляет собой число Маха. Давление $p=p(\vec{x})$ определяется через потенциал выражением $p=-i\rho_0\omega\phi$, где ρ_0 – плотность среды.

Граничное условие, которому должно удовлетворять решение уравнения (1) на поверхности сферы, вытекает из условия равенства нормальных компонент скоростей движения поверхности сферы и окружающей среды и имеет вид

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}(\vec{\theta}) - u(\vec{\theta}) = 0, \qquad \vec{\theta} = \frac{\vec{x}}{r} \in S, \quad (3)$$

где $u=u(\vec{\theta})$ – заданное распределение колебательной скорости на поверхности сферы.

В дополнение к соотношению (3) для потенциала ϕ должно выполняться условие излучения на бесконечности. Для того, чтобы его сформулировать, сделаем в уравнении (1) замену неизвестной функции:

$$\phi(\vec{x}) = \exp\left[-\frac{ik\beta x_1}{1-\beta^2}\right]\psi(\vec{x}). \quad (4)$$

Тогда для определения функции ψ получаем уравнение

$$\mathcal{L}\psi := \Delta\psi - \beta^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{k^2}{1-\beta^2}\psi = 0, \qquad r > 1, \qquad k_1^2 = \frac{k^2}{1-\beta^2}. \tag{5}$$

При этом в переменных

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad y_2 = x_2, \qquad y_3 = x_3$$

функция $\psi_0(\vec{y})$ удовлетворяет классическому уравнению Гельмгольца

$$\Delta\psi_0(\vec{y}) + k_1^2\psi_0(\vec{y}) = 0. \tag{6}$$

Замена (4) и уравнение (6) показывают, что при принятой временной зависимости $e^{-i\omega t}$ искомая функция $\phi(\vec{x})$ на бесконечности должна удовлетворять условию

$$\phi(\vec{x}) \approx \frac{A_1(\vec{\theta_1})}{r_1}\exp(-ik\delta x_1)\exp(ik_1 r_1), \qquad r_1 \to \infty, \qquad \vec{\theta_1} = \frac{\vec{x}}{r_1}, \tag{7}$$

где

$$r_1^2 = \frac{x_1^2}{1-\beta^2} + x_2^2 + x_3^2, \qquad \delta = \delta(\beta) = \frac{\beta}{1-\beta^2}. \tag{8}$$

Условие (7) означает, что на больших расстояниях от источника искомое звуковое поле представляет собой уходящую звуковую волну, а волны, приходящие к источнику, отсутствуют. При этом множитель $\exp(-ik\delta x_1)$ определяет сдвиг фазы звуковой волны, распространяющейся вдоль направления потока [3].

Условие излучения (7) можно также получить, исходя непосредственно из уравнения (1). Так, согласно общим результатам [8, гл. 7], условия на бесконечности, обеспечивающие единственность решения внешних граничных задач для уравнения (1), имеют вид

$$\phi(\vec{x}) \approx \frac{A(\theta)}{r}\exp(-ik\delta x_1)\exp(\pm ik_1 r_1), \qquad r \to \infty. \tag{9}$$

Выбирая в показателе второго экспоненциального множителя знак “плюс” и замечая, что $\vec{\theta} = (r_1/r)\vec{\theta_1}$, а отношение

$$\frac{r_1}{r} = \left(\left(\frac{x_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{r_1}\right)^2\right)^{-1/2}$$

является функцией от $\vec{\theta_1}$, получаем из формулы (9) условие излучения (7). Аналогично можно совершить обратное преобразование. Таким образом, условия излучения (7) и (9) эквивалентны.

В данной статье при условии, что функция $u(\vec{\theta})$ является сужением на S полинома переменных x_1, x_2, x_3, строится асимптотическое по $\beta \to 0$ решение внешней граничной задачи (1), (3), (7):

$$\phi(\vec{x}) \approx \sum_{k=0}^{\infty}\beta^k\Phi_k(\vec{x};\beta). \tag{10}$$

При этом каждое из слагаемых ряда (10) точно удовлетворяет уравнению (1) и условию излучения (7), а граничное условие (3) выполняется в смысле асимптотического по $\beta \to 0$ равенства, т. е. равномерно по θ выполняются оценки

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\left(\phi(\vec{\theta}) - \sum_{k=0}^{N}\beta^k\Phi_k(\vec{\theta};\beta)\right) - u(\vec{\theta})\right| \le c_N\beta^{N+1}, \qquad N = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу нахождения функции $\phi(\vec{x})$, удовлетворяющей уравнению (1), условию излучения (7) и граничному условию (3). Воспользовавшись заменой (4), для функции $\psi(\vec{x})$ получаем уравнение (5) и граничное условие третьего рода на поверхности сферы:

$$G\psi(\vec{\theta}) := \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} - ik\delta x_1\psi - \exp(ik\delta x_1)u(\vec{\theta})\right)\Big|_{\vec{x}=\vec{\theta}\in S} = 0. \tag{12}$$

Так как

$$\delta = \delta(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}\beta^{2n+1}, \qquad |\beta| < 1,$$

$$\exp(ik\delta x_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ik\delta)^n x_1^n}{n!}$$

(см. соотношение (8)), то коэффициент и известная функция в неоднородном граничном условии (12) при фиксированном $\vec{x} \in S$ будут аналитическими функциями переменного β в окрестности $\beta = 0$. В связи с этим остановимся на уравнении (5) вместе с более общим, чем (12) граничным условием, а именно:

$$G_1\psi(\vec{\theta}) := \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} - g(\vec{\theta};\beta)\psi - \right.$$
$$\left. - f(\vec{\theta};\beta)\right)\Big|_{\vec{x}=\vec{\theta}\in S} = 0, \tag{13}$$

где предполагается, что заданные функции $g(\vec{\theta};\beta)$, $f(\vec{\theta};\beta)$ переменных $\vec{\theta}\in S$, $\beta\in(0,1)$ допускают равномерные по $\vec{\theta}$ асимптотические разложения [9, гл. 1, § 7]:

$$g(\vec{\theta};\beta) \approx \sum_{l=1}^{\infty}\beta^l g_l(\vec{\theta}),$$
$$f(\vec{\theta};\beta) \approx f_0(\vec{\theta}) + \sum_{l=1}^{\infty}\beta^l f_l(\vec{\theta}), \tag{14}$$
$$\beta \to 0.$$

Кроме того, предполагается, что функции $g_l(\vec{\theta})$, $f_l(\vec{\theta})$ в разложениях (14) являются сужениями на S полиномов переменных z_1, x_2, x_3.

При фиксированном $\beta\in[0,1)$ введем в рассмотрение фундаментальное решение уравнения (5):

$$\Psi(\vec{x};\beta) = \frac{\exp{(ik_1r_1)}}{r_1}, \tag{15}$$

где функция $r_1 = r_1(\vec{x})$ определена согласно формуле (8). Для фиксированного упорядоченного набора неотрицательных целых индексов $\{l,m,n\}$, положим функции

$$\Psi_{l,m,n}(\vec{x};\beta) = \frac{\partial^{l+m+n}\Psi(\vec{x};\beta)}{\partial x_1^l\partial x_2^m\partial x_3^n},$$
$$\Psi_{0,0,0}(\vec{x};\beta) = \Psi(\vec{x};\beta), \tag{16}$$
$$r>0.$$

Функции $\Psi_{l,m,n}(\vec{x};\beta)$ удовлетворяют уравнению (5) при $r>0$ и условию излучения

$$\Psi_{l,m,n} \approx \frac{A_{l,m,n}(\theta)}{r}\exp{(ik_1r_1)}, \qquad r\to\infty.$$

Асимптотическое решение задачи (5), (13) будем искать в виде асимптотического ряда, составленного из функций $\Psi_{l,m,n}(\vec{x};\beta)$. Для этого проведем необходимые предварительные вычисления, связанные с нормальными производными $\partial\Psi_{l,m,n}/\partial r$ на сфере S. В результате получим

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} = \frac{(ik_1r_1-1)x_1}{(1-\beta^2)r_1^3}\exp{(ik_1r_1)},$$
$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_j} = \frac{(ik_1r_1-1)x_j}{r_1^3}\exp{(ik_1r_1)}, \tag{17}$$

где $j=2$, 3.

Введем в рассмотрение функции

$$\Xi_{l,m,n}(\vec{x};\beta) = \frac{\partial}{\partial r}\Psi_{l,m,n}(\vec{x};\beta).$$

Тогда

$$r\Xi_{l,m,n} = \sum_{j=1}^{3}x_j\frac{\partial^{l+m+n}}{\partial x_1^l\partial x_2^m\partial x_3^n}\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\} =$$
$$= \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^{l+m+n}}{\partial x_1^l\partial x_2^m\partial x_3^n}\left\{x_j\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\} -$$
$$-(l+m+n)\frac{\partial^{l+m+n}\Psi}{\partial x_1^l\partial x_2^m\partial x_3^n} =$$
$$= \frac{\partial^{l+m+n}}{\partial x_1^l\partial x_2^m\partial x_3^n}\left\{\frac{(ik_1r_1-1)\exp{(ik_1r_1)}}{r_1}\right\} -$$
$$-(l+m+n)\Psi_{l,m,n}(\vec{x}).$$

Таким образом, справедлива формула

$$r\Xi_{l,m,n}(\vec{x};\beta) = -(l+m+n+1)\times$$
$$\times\Psi_{l,m,n}(\vec{x};\beta) + ik\Lambda_{l,m,n}(\vec{x};\beta), \tag{18}$$

где

$$\Lambda_{l,m,n} = \frac{\partial^{l+m+n}}{\partial x_1^l\partial x_2^m\partial x_3^n}\left\{\exp{(ik_1r_1)}\right\}.$$

Для вычисления функции $\Lambda_{l,m,k}(\vec{x})$ можно пользоваться следующими соотношениями (в зависимости от того, какой из индексов l, m или n больше нуля):

$$\Lambda_{l,m,n} = \frac{ik_1x_1}{(1-m^2)}\Psi_{l-1,m,n} +$$
$$+(l-1)\frac{ik_1}{(1-\beta^2)}\Psi_{l-2,m,n}, \qquad l\geq 1,$$

$$\Lambda_{l,m,n} = ik_1x_2\Psi_{l,m-1,n} +$$
$$+(m-1)ik_1\Psi_{l,m-2,n}, \qquad m\geq 1,$$

$$\Lambda_{l+m+n} = ik_1x_3\Psi_{l,m,n-1} +$$
$$+(n-1)ik_1\Psi_{l,m,n-2}, \qquad n\geq 1.$$

Можно доказать, что при $\beta = 0$ функция $\Xi_{l,m,n}(\vec{x}) = \Xi_{l,m,n}(\vec{x};0)$ является полиномом степени $q=l+m+n$ переменных x_1, x_2, x_3. При этом для фиксированного $q\geq 0$ и различных наборов индексов l, m, n полиномы $\Xi_{l,m,n}(\vec{x})$ линейно независимы. Таким образом, система функций

$$\{\Xi_{l,m,n}(\vec{x})\}_{l+m+n\leq q} \qquad (19)$$

образует базис в линейном пространстве всех полиномов переменных x_1, x_2, x_3 степени не больше q.

Приближенное (с точностью выполнения граничного условия до β^{q+1}, $\beta \to 0$) решение граничной задачи (5), (13) ищем в виде

$$\begin{gathered}\psi_q(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{q} \beta^k M_k(\vec{x};\beta),\\ M_k(\vec{x};\beta) = \sum_{l+m+n\leq k} a_{l,m,n}^{(k)} \Psi_{l,m,n}(\vec{x};\beta),\end{gathered} \qquad (20)$$

где коэффициенты $a_{l,m,n}^{(k)}$ подлежат определению, исходя из граничного условия (13). При этом функция $\psi_q(\vec{x})$ удовлетворяет уравнению (5) и

$$G_1\psi_q(\vec{\theta}) = \sum_{j=1}^{3} R_{q,j}(\vec{\theta};\beta),$$

где

$$R_{q,1} = \left(\sum_{k=0}^{q} \beta^k \frac{\partial M_k(\vec{\theta};\beta)}{\partial r} - \sum_{k=1}^{q} \beta^k g_l(\vec{\theta})\right) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{q} \beta^k M_k(\vec{\theta};\beta) - \sum_{k=0}^{q} \beta^k f_l(\vec{\theta});$$

$$R_{q,2} = -\left(g(\vec{\theta};\beta) - \sum_{k=1}^{q} \beta^k g_l(\vec{\theta})\right) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{q} \beta^k M_k(\vec{\theta};\beta);$$

$$R_{q,3} = -\left(f(\vec{\theta};\beta) - \sum_{k=0}^{q} \beta^k f_l(\vec{\theta})\right).$$

Далее оценки по β проводятся для $\beta \in [0,\beta_0)$ при фиксированном значении $\beta_0 \in (0,1)$. Согласно условию (14), имеем

$$\max_{\theta} |R_{q,j}(\vec{\theta};\beta)| \leq \widetilde{c}_q \beta^{q+1}, \qquad j = 2,3.$$

Покажем, что функции $M_k(\vec{x};\beta)$ можно выбрать таким образом, чтобы равномерно по $\vec{\theta} \in S$ выполнялось соотношение

$$G_1\psi_q(\vec{\theta}) = \mathrm{O}(\beta^{q+1}), \qquad \beta \to 0. \qquad (21)$$

Справедливо равенство

$$R_{q,1} = \sum_{k=0}^{q} \beta^k D_k + \beta^{q+1} R_{q,1}^0,$$

где

$$\max_{\vec{\theta}} |R_{q,1}^0(\vec{\theta};\beta)| \leq \widetilde{c}_q,$$

и функции

$$D_k(\vec{\theta}) = \frac{\partial M_k(\vec{\theta};0)}{\partial r} -$$

$$- \sum_{j+s=k,\ j\neq 0} \frac{\partial^j}{\partial \beta^j}\left(\frac{\partial M_s(\vec{\theta};0)}{\partial r}\right) -$$

$$- \sum_{j+s=k,\ j\neq 0} g_j(\vec{\theta}) \left(\sum_{l+i=s,\ l\neq 0} \frac{\partial^l M_i(\vec{\theta};0)}{\partial \beta^l}\right) -$$

$$- f_k(\vec{\theta}).$$

Таким образом, соотношение (20) будет иметь место, если функции

$$D_k(\vec{\theta}) \equiv 0, \qquad k = 0,1,\ldots q. \qquad (22)$$

Вспоминая определение функций $M_k(\vec{x};\beta)$ (см. формулу (19)), получаем, что для удовлетворения условию (21) необходимо и достаточно выполнения равенств

$$\begin{gathered}\sum_{l+m+n\leq k} a_{l,m,n}^{(k)} \Xi_{l,m,n}(\vec{\theta}) =\\ = \sum_{j+s=k,\ j\neq 0} \frac{\partial^j}{\partial \beta^j}\left(\frac{\partial M_s(\vec{\theta};0)}{\partial r}\right) +\\ + \sum_{j+s=k,\ j\neq 0} g_j(\theta) \left(\sum_{l+i=s,\ l\neq 0} \frac{\partial^l M_i(\vec{\theta};0)}{\partial \beta^l}\right) +\\ + f_k(\vec{\theta}),\end{gathered} \qquad (23)$$

где $k = 0,1,\ldots q$.

Можно убедиться, что функции

$$\frac{\partial^j}{\partial \beta^j}\left(\frac{\partial M_s(\vec{\theta};0)}{\partial r}\right), \qquad \frac{\partial^l M_i(\vec{\theta};0)}{\partial \beta^l}$$

являются сужениями на S полиномов переменных x_1, x_2, x_3. Тогда, поскольку система (18) – это базис в пространстве полиномов степени не больше q, то задача (22) разрешима. Сначала находятся коэффициенты $a_{l,m,n}^{(0)}$, затем $a_{l,m,n}^{(1)}$ и т. д., пока не определятся коэффициенты $a_{l,m,n}^{(q)}$.

Таким образом, внешняя граничная задача (5), (13), и в частности, задача (5), (12), допускает асимптотическое по $\beta \to 0$ решение, которое имеет вид (19). Отсюда следует (см. формулу (4)), что и для исходной граничной задачи о колеблющейся сфере в равномерно движущейся среде можно указать асимптотическое по $\beta \to 0$ решение. Оно имеет вид (10) с функциями

$$\Phi_k(\vec{x};\beta) = \exp\left[-\frac{ik\beta x_1}{1-\beta^2}\right] \times$$
$$\times \sum_{l+m+n\le k} a_{l,m,n}^{(k)} \Psi_{l,m,n}(\vec{x};\beta),$$

где $\Psi_{l,m,n}$ определены согласно выражениям (15), (16) и представляют собой различные частные производные от фундаментального решения обобщенного уравнения Гельмгольца (5).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ показывает возможность построения асимптотического по числу Маха решения внешней граничной задачи об излучении звука колеблющейся сферой в равномерно движущейся акустической среде. Указаны алгоритм и базисные функции, с помощью которых строится соответствующее асимптотическое решение.

1. *Morse Ph., Ingard U.* Linear acoustical theory.– Berlin: Springer-Verlag, 1961.– 128 p.
2. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородной движущейся среды.– М.: Наука, 1981.– 208 с.
3. *Шендеров Е. Л.* Излучение и рассеяние звука.– Л.: Судостроение, 1989.– 302 с.
4. *Leppington F. G., Levine H.* The sound field of a pulsating sphere in unsteady rectilinear motion // Proc. Roy. Soc. Lond.– 1987.– **A412**, N 1842.– P. 199–221.
5. *Bouchet L., Loyau T., Hamzaoui N., Boisson C.* Calculation of acoustic radiation using equivalent-sphere methods // J. Acoust. Soc. Amer.– 2000.– **107**, N 5.– P. 2387–2397.
6. *Hamilton J. A., Astley R. J.* Exact solution for transient spherical radiation // J. Acoust. Soc. Amer.– 2001.– **109**, N 5.– P. 1848–1858.
7. *Keiffer R. S., Novarini J. C., Scharstein R. W.* The role of the frozen surface approximation in small wave-height perturbation theory for moving surfaces // J. Acoust. Soc. Amer.– 2003.– **113**, N 3.– P. 1223–1229.
8. *Вайнберг Б. Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики.– М.: Изд-во МГУ, 1982.– 296 с.
9. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции.– М.: Наука, 1990.– 528 с.