

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ КВАДРАТНЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПЛАСТИН РЕЗОНАНСНЫМ МЕТОДОМ

В. А. АНДРУЩЕНКО, А. А. БОНДАРЕНКО,
В. В. МЕЛЕШКО, В. Н. НИКИТЕНКО

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Получено 30.10.2006

Предложена экспериментально-теоретическая методика определения упругих постоянных квадратных пьезокерамических пластин на основе анализа спектров их планарных колебаний и выделения характерных резонансных частот. Для квадратной пластины, изготовленной из круглого диска и покрытой сплошными или разрезными поверхностными электродами, определены коэффициент Пуассона и модуль Юнга. Рассмотрен вопрос об интенсивности возбуждения собственных форм симметричных колебаний. Показано, что из тринадцати возможных мод колебаний эффективно возбуждаются только шесть. Полученные данные хорошо согласуются с результатами эксперимента.

Запропоновано експериментально-теоретичну методику визначення пружних сталих квадратних п'єзокерамічних пластин на основі аналізу спектрів їхніх планарних коливань і визначення характерних резонансних частот. Для квадратної пластини, виготовленої з круглого диску і вкритої суцільними або розрізними поверхневими електродами, визначені коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга. Розглянуто питання про інтенсивність збудження власних симетричних форм коливань. Показано, що з тринадцяти можливих мод коливань ефективно збуджуються лише шість. Одержані дані добре узгоджуються з результатами експерименту.

The paper deals with the experimental-theoretical technique for determining the elastic constants of square piezoceramic plates based on analyzing their planar vibration spectra and distinguishing the characteristic resonant frequencies. The Poisson's ratio and Young's modulus are determined for a square plate made of a round disc and covered with solid or split surface electrodes. The problem on excitation strength of the natural forms of symmetrical vibrations is considered. It is shown that only six of thirteen possible modes are effectively excited. The obtained results are in good agreement with the experimental data.

ВВЕДЕНИЕ

Планарные колебания тонких пьезокерамических пластин традиционно встречаются при работе резонаторов [1], фильтров [2], тензотетрических датчиков [3], акселерометров, пьезотрансформаторов [4]. При разработке и проектировании подобных устройств важно знать упругие постоянные материала. Это стимулирует разработку методик их неразрушающего акустического определения для пластин конкретной геометрии. Основные результаты, полученные в этом направлении, относятся к круглым пластинкам [5, 6], для которых предложены эффективные методики определения механических постоянных (модуля Юнга $E = 1/s_{11}^E$ и коэффициента Пуассона $\sigma = -s_{12}^E/s_{11}^E$) по измерениям спектра первых собственных частот планарных колебаний. Они нашли отражение в ряде американских стандартов [7–9] и советском ГОСТе [10]¹.

Во многих практических приложениях исполь-

зуются прямоугольные (в частности, квадратные) пьезокерамические пластины. Имеется краткое указание [5, 7] (со ссылкой на малодоступный отчет [14]) на возможность экспериментального акустического определения коэффициента Пуассона по отношению частот четвертой и третьей контурных мод колебаний квадратной пластины. Приведенные в этих работах табличные данные относятся к диапазону $0.25 \leq \sigma \leq 0.35$ и не дают возможности измерять коэффициент Пуассона для новых составов пьезокерамик, содержащих синтетические добавки. Кроме того, в IEEE Std 176-1987 [9] отмечается, что принятые в стандарте [7] предположения для анализа контурных мод колебаний квадратных пластин не являются достаточно обоснованными. Исходя из того, что справедливость этих приближений не может быть установлена для всех случаев, измерение упругих постоянных пьезокерамики с использованием указанных мод не рекомендовано до разработки более точной методики. Что касается вопроса о нахождении величины модуля Юнга E материала квадратной пластины, то он исследован недостаточно.

Неразрушающее акустическое определение модуля Юнга и коэффициента Пуассона требует знания спектра собственных частот объекта. Следует

¹Согласно обзорной классификации существующих стандартов, составленной британской National Physical Laboratory [11], IEEE Standard-1987 уже отозван IEEE, хотя все еще используется, как представляющий исторический интерес (см., например, [12, 13]).

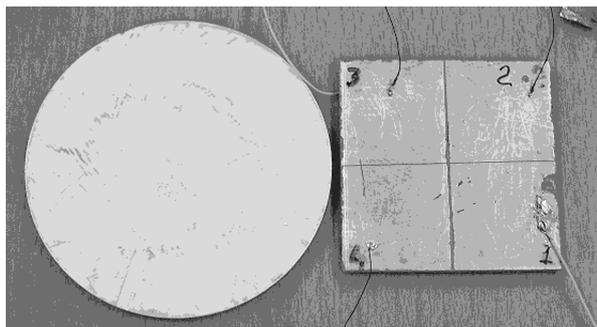


Рис. 1. Круглая и квадратная пластины из пьезокерамики состава типа ЦТС-19

отметить существование ряда приближенных решений [15, 16], относящихся к спектру собственных частот квадратной пластины. Кроме того, известны работы, в которых собственные частоты контурных колебаний прямоугольных пластин определялись с помощью вариационного подхода [17, 18] и конечно-разностного метода [19]. Тем не менее, в целом сравнительно мало сделано для получения ясного представления о том, что происходит в случаях, отличных от наиболее простых.

Исходя из этого, в предлагаемой статье на основе данных эксперимента и аналитического решения [20, 21] предложена методика, позволяющая определять упомянутые выше упругие характеристики квадратных пьезокерамических пластин и анализировать особенности их резонансного спектра колебаний. Ее суть состоит в измерении нескольких возбуждаемых резонансных частот и выборе из них таких характерных значений, по которым рассчитываются упругие константы материала. Результаты, полученные для исследуемой квадратной пластины, сравнивались с реперными значениями для круглой пластины, из которой она была изготовлена (рис. 1). Полученные данные не только полностью согласуются с приведенными в известных таблицах [5, 7], но и дополняют их для больших значений коэффициента Пуассона.

1. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Экспериментальные исследования планарных колебаний круглых и квадратных пластин заключались в измерении амплитудно-частотных характеристик, а также определении резонансных частот и форм колебаний резонансным методом.

Квадратная пластина с размерами $47.2 \times 47.2 \times 3.0$ мм была вырезана из круглого поляризованного по толщине диска диаметра 63.2 мм, изготовленного из промышленной пьезокерамики состава

типа ЦТС-19. Геометрические размеры пластины были измерены с точностью до 0.1 %, а неортогональность граней не превышала 1'. Плотность пьезокерамики $\rho = 7300$ кг/м³ рассчитывалась по весу круглого диска.

На пластину были нанесены посеребренные электроды, как показано на рис. 1. Разрезные электроды изготавливались по технологии фотолитографии с нанесением резистивного фотослоя, последующим его экспонированием и травлением серебра в 40 %-ой азотной кислоте.

Блок-схема аналогового варианта приборной части экспериментального стенда приведена на рис. 2. В состав стенда входят следующие приборы: 1 – генератор качающей частоты (в составе частотного характериографа Х1-46); 2 – широкополосный усилитель У7-3; 3 – генератор звуковых частот ГЗ-33 (высоковольтный выход); 4 – генератор звуковых частот ГЗ-117 (спектрально чистый); 5 – вибродемпфирующий предметный столик с исследуемым образцом и экранированными проводами соединений; 6, 10 – вольтметры для измерения эффективного значения амплитуд входных и выходных сигналов; 7, 11 – осциллографы для наблюдения за формой сигналов; 8 – двухкоординатный самописец Н-306 для записи амплитудно-частотных характеристик на бумагу формата А4.

На рис. 3 приведен упрощенный вариант схемы подключения пьезопластины, резисторов R_1 – R_3 номиналами 0.1, 1.0, 10.0 Ом для измерения тока через пьезоэлемент на резонансе и резистора R_4 номиналом 1 МОм для измерения антирезонансных частот. Здесь $R_{\text{вых}}$ – выходное сопротивление используемого генератора или усилителя (как правило, $R_{\text{вых}} \leq 5$ Ом); $R_{\text{вх}}$ – входное сопротивление измерительного прибора (как правило, $R_{\text{вх}} \geq 1$ МОм).

В силу того, что типичная добротность пьезокерамической пластины находится в диапазоне от 50 до 2000 единиц, ее активное сопротивление на резонансе составляет несколько десятков Ом. Поэтому для регистрации резонанса по току достаточно подключить пьезоэлемент через резистор номиналом несколько Ом, чтобы по максимуму напряжения на резисторе определить резонансную частоту. В этом режиме измерений возникают проблемы при визуализации форм колебаний. Дело в том, что при этом требуется получить большие перемещения (порядка нескольких микрон) и пьезоэлемент начинает интенсивно греться из-за диссипативных механических и электрических потерь. Максимальный темп нагрева наблюдается в узловых линиях, где возникают наибольшие цикличе-



Рис. 2. Блок-схема электрической части экспериментального стенда

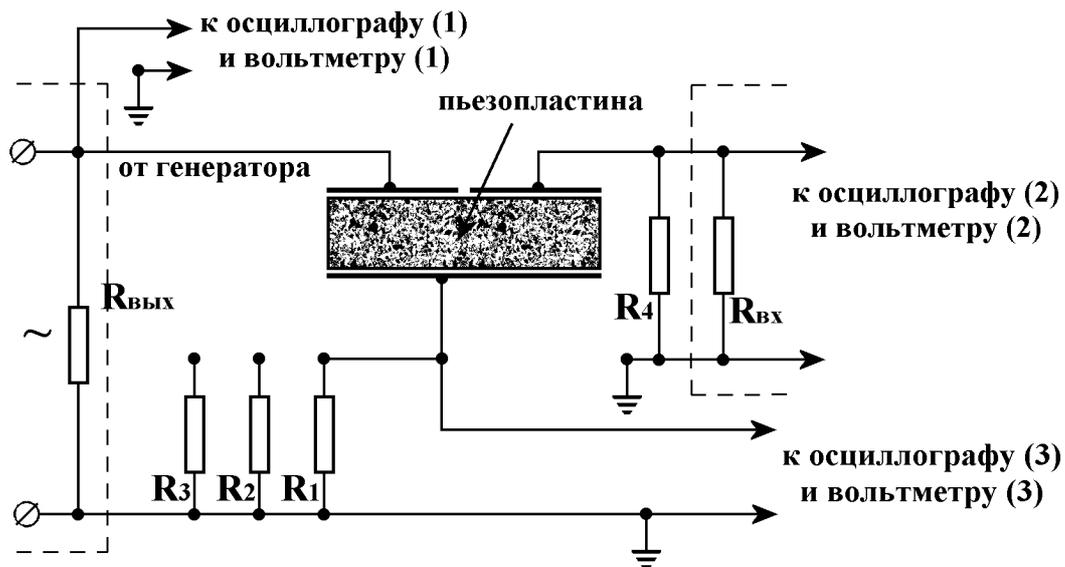


Рис. 3. Схема подключения пьезопластинки со сплошными или разрезными электродами

ские напряжения.

Формы колебаний на резонансных частотах визуализировались порошковыми фигурами Хладни, однако из-за расплывчатости узловых линий на больших поверхностях и низкой контрастности полученных фотографий они не приведены. Идентификация форм колебаний осуществлялась по четко выраженным узловым линиям на торце-

вых гранях квадратной пластины.

Измерения резонансных частот на образцах проводились в лабораторных условиях при комнатной температуре. Для исключения диссипативного разогрева пластин их колебания возбуждали напряжением на электродах с амплитудой, не превышающей 0.1 В (чтобы значение тока было не больше 10 мА). Пьезокерамические образцы по-

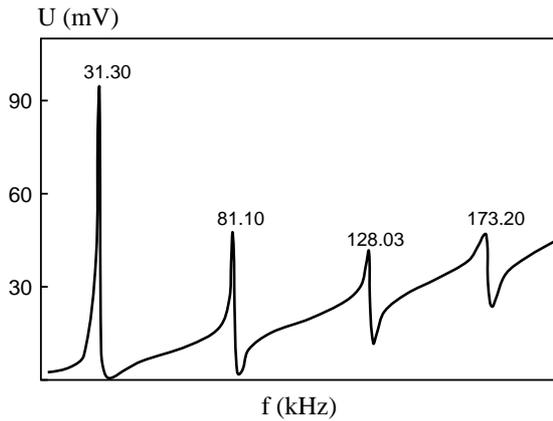


Рис. 4. Амплитудно-частотная характеристика круглой пластинки ($d=66.2$ мм, $h=3.0$ мм) со сплошными электродами

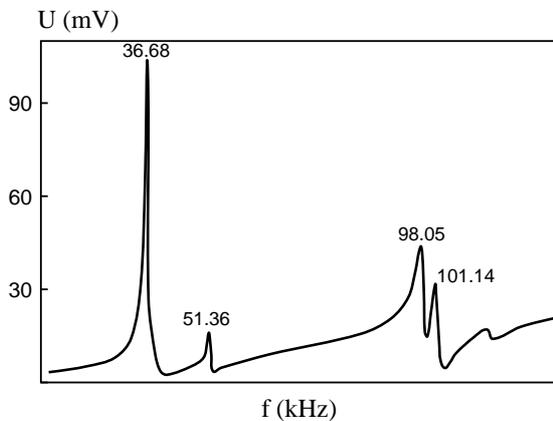


Рис. 5. Амплитудно-частотная характеристика квадратной пластины ($47.2 \times 47.2 \times 3.0$ мм) со сплошными электродами

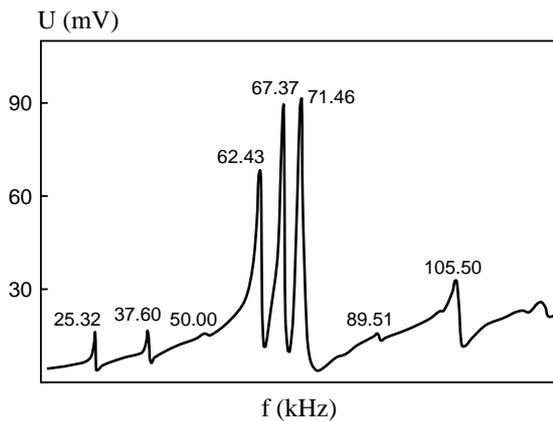


Рис. 6. Амплитудно-частотная характеристика квадратной пластины ($47.2 \times 47.2 \times 3.0$ мм) с разрезными электродами, разделенными посередине пластины и подключенными противофазно

двешивались на тонких проволочках с диаметром 0.07 мм, припаянных к электроду минимальным количеством олова (с целью избежания эффекта присоединенной массы). Таким образом обеспечивалось отклонение резонансных частот не более, чем на 0.01 %.

Амплитудно-частотные характеристики круглой, а также квадратной пластинок со сплошными и разрезными электродами приведены на рис. 4–6.

Заметим, что ключевым моментом представленного эксперимента является проведение всех измерений не на отдельно взятых круглой и квадратной промышленно изготовленных пьезопластинах (когда разброс параметров пьезокерамики может достигать 10 %), а на пластинах, изготовленных из одного образца. Это обеспечивает высокую точность при определении упругих постоянных экспериментально-расчетным методом.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Рассмотрим задачу об определении резонансных частот и форм планарных колебаний квадратной пьезокерамической пластины $-a \leq x \leq a$, $-a \leq y \leq a$, $-h \leq z \leq h$, поляризованной по толщине. Колебания возбуждаются разностью потенциалов, приложенной к электродам на торцах $z = \pm h$.

Уравнения, описывающие планарные колебания тонких пьезокерамических пластин, получаем на основе введения гипотез обобщенного плоского напряженного состояния в трехмерные уравнения пьезокерамической среды [22]. В результате для определения усредненных по толщине компонент вектора смещений $\bar{u}(x, y)$, $\bar{v}(x, y)$ и электростатического потенциала $\psi(x, y, z)$ имеем следующие соотношения:

$$\nabla^2 \bar{u} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\rho \omega^2}{G} \bar{u} + A \frac{\partial (\psi^+ - \psi^-)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \bar{v} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\rho}{G} \omega^2 \bar{v} + A \frac{\partial (\psi^+ - \psi^-)}{\partial y} = 0,$$

$$(1 - B_1) \nabla^2 \psi + B_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = z B_3 \nabla^2 \theta. \quad (2)$$

Здесь

$$\theta = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$m = 1 + \frac{1}{\sigma}; \quad \sigma = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E};$$

$$G = \frac{1}{2s_{11}^E(1 + \sigma)}; \quad A = \frac{d_{31}}{h} \frac{m}{m-2};$$

ψ^+ и ψ^- – значения потенциала на гранях $z = h$ и $z = -h$; $s_{11}^E, s_{12}^E, s_{13}^E$ – упругие податливости при постоянном электрическом поле; ρ – плотность материала; ω – круговая частота колебаний; B_1, B_2, B_3 – положительные постоянные, приведенные в работе [23].

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x = \bar{\tau}_{xy} = D_x = 0 & \quad \text{при } x = \pm a, \\ \bar{\sigma}_y = \bar{\tau}_{xy} = D_y = 0 & \quad \text{при } y = \pm a, \\ \psi = \psi^+(x, y) & \quad \text{при } z = h, \\ \psi = \psi^-(x, y) & \quad \text{при } z = -h, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= 2G \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\theta}{m-2} + d_{31} \frac{m}{m-2} \frac{\psi^+ - \psi^-}{2h} \right); \\ \bar{\sigma}_y &= 2G \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\theta}{m-2} + d_{31} \frac{m}{m-2} \frac{\psi^+ - \psi^-}{2h} \right); \\ \bar{\tau}_{xy} &= G \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Формулы для вычисления компонент вектора электрической индукции можно найти в [23].

Решение граничной задачи (1)–(3) дает полное количественное описание сопряженных электро-механических полей в квадратной пьезокерамической пластине. При определенном расположении электродов на ее гранях удастся разделить связанную задачу (1)–(3) на механическую и электрическую составляющие.

Если торцы пластины $z = \pm h$ покрыты сплошными электродами, то электрические граничные условия (3) принимают вид

$$\psi^+(x, y) = V_0, \quad \psi^-(x, y) = -V_0,$$

а уравнения (1) переходят в однородные уравнения движения Ламе для изотропной среды. При этом в пластине возбуждаются так называемые продольные моды, когда смещение \bar{u} нечетно по x и четно по y , а смещение \bar{v} четно по x и нечетно по y .

Таким образом, задача об электроупругих установившихся колебаниях пьезопластинки с учетом граничных условий (3) и выражений (4) сводится [23] к решению механической задачи о вынужденных колебаниях квадратной упругой пластины под действием равномерно распределенных нагрузок $f_0 = CV_0/h$ на ее боковых сторонах, где $C = -2d_{31}mG/(m-2)$.

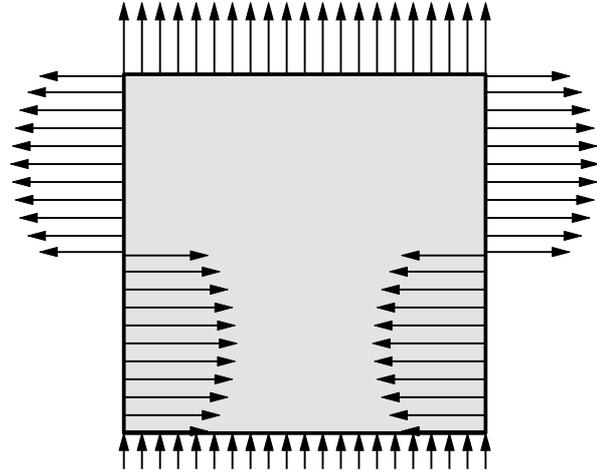


Рис. 7. Механическая нагрузка, эквивалентная разрезным электродам на торцах пьезопластины

В случае электродов, разрезанных на две части посередине пластины, электрические граничные условия имеют вид

$$\psi^+(x, y) = V_0 H(y), \quad \psi^-(x, y) = -V_0 H(y),$$

где $H(y)$ – функция Хевисайда. Уравнения движения (1) переходят в неоднородные уравнения Ламе для изотропной среды при действии нормальных нагрузок $CV_0 H(y)/h$ на сторонах $x = \pm a$ и $\pm CV_0/h$ при $y = \pm a$.

Посредством выбора частного решения

$$\bar{u}^* = 0, \quad \bar{v}^* = \frac{CV_0 a}{\Omega_1 k^2 h} \frac{\sin\left(1 - \frac{2y\Omega_1}{a}\right)}{\cos\frac{\Omega_1}{2}}, \quad (5)$$

где

$$k^2 = \frac{2(m-1)}{m-2}; \quad \Omega_1 = \frac{\omega a}{kc_2}; \quad c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

задача сводится к однородным уравнениям Ламе при нормальном разрывном нагружении сторон квадрата (рис. 7). При этом смещение \bar{u} нечетно по x и по y , а смещение \bar{v} четно по обеим координатам.

В рассмотренных случаях взаимосвязь электрического и механического полей сохраняется в уравнении (2), в правую часть которого входит механическое объемное расширение θ . Анализ решения для электростатического потенциала приведен в работе [23].

Решение задачи о вынужденных колебаниях изотропной прямоугольной пластины (призмы)

Табл. 1. Резонансные частоты (в Гц) пьезокерамических пластин со сплошными электродами при $\sigma = 0.36$

N	пластина I			пластина II	
	$f_{r,n}^{(a)}$	$f_{r,n}^{(r)}$	k_d^2	$f_{r,n}^{(r)}$	k_d^2
1	—	—	—	26249	0.0001
2	—	—	—	30482	0.00006
3	36820	36820	0.2742	36469	0.2741
4	51700	51535	0.0422	51019	0.0422
5	—	—	—	60990	0.000025
6	75690	75899	0.0004	75159	0.0005
7	—	—	—	78768	0.00001
8	—	—	—	94300	0.0002
9	—	—	—	96256	0.0022
10	98430	98422	0.0146	97620	0.0132
11	101490	101495	0.0506	100620	0.0486
12	—	—	—	105347	0.0010
13	112700	112134	0.0073	111011	0.0073

Табл. 2. Резонансные частоты (в Гц) квадратной пьезокерамической пластины с разрезанными посередине электродами при $\sigma = 0.36$

N	$f_{r,n}^{(a)}$	$f_{r,n}^{(r)}$
1	25320	25383
2	37600	37738
3	50000	50654
4	62430	62503
5	67370	67264
6	71460	71501
7	80900	80256
8	89510	89554
9	92140	91410
10	101900	101777
11	105500	105939

рассматривалось в работе [20], в которой развит эффективный метод определения резонансных частот и форм колебаний, используемый и в настоящем исследовании.

Для квадратной пластины с размерами $47.2 \times 47.2 \times 3$ мм (пластина I) были рассчитаны первые шесть (случай сплошных электродов, см. табл. 1) и одиннадцать (случай разрезных электродов, см. табл. 2) возбуждаемых резонансных частот соответственно.

Здесь $f_{r,n}^{(a)}$ – резонансная частота, определяемая по максимальному напряжению на резисторе и отвечающая n -ой моде; $f_{r,n}^{(r)}$ – соответствующее ра-

счетное значение; k_d^2 – динамический коэффициент электромеханической связи (КЭМС). Максимальное отклонение расчетных частот от экспериментальных составило 0.5 % для тринадцатой моды при сплошных электродах и 0.7 % для девятой моды при разрезных электродах. Хорошее согласование результатов характеризует как широкие возможности теоретического подхода, так и качество экспериментальной методики.

Полученное аналитическое решение позволяет построить табл. 3 для определения коэффициента Пуассона материала пластины по соотношению первых двух резонансных частот ($\Omega^{(n)} = 2\omega_n a / \pi c_2$), которые возбуждаются при соответствующем расположении электродов. В диапазоне $0.25 \leq \sigma \leq 0.35$ эти данные хорошо коррелируют с [7, Table III].

Известно, что в квадратной изотропной пластине равномерной нагрузкой на боковых сторонах не удается возбудить некоторые моды колебаний (например, эквиволломинальную моду Ламе). Поэтому возникает важный вопрос о надежности определения собственных форм при решении задачи о вынужденных колебаниях пластины.

Общая схема рассмотрения данного вопроса выглядит следующим образом [24]. Граничную задачу о вынужденных колебаниях упругого тела представим схематично как

$$\begin{aligned} \vec{L}(\vec{u}) + \rho\omega^2\vec{u} &= 0 \quad \text{в } V, \\ \vec{T}(\vec{u}) &= \vec{t} \quad \text{на } S. \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть известны наборы собственных частот колебаний ω_n и соответствующие векторы перемещений \vec{u}_n . Собственные перемещения обладают свойствами полноты и ортогональности [25]:

$$\int_V \rho \vec{u}_n \cdot \vec{u}_k dV = \begin{cases} S_n, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Тогда решение граничной задачи (6) о вынужденных колебаниях упругого тела может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}_{\text{stat}} - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vec{u}_n}{S_n (\omega^2 - \omega_n^2)} \times \\ &\times \int_V \rho \vec{u}_{\text{stat}} \cdot \vec{u}_n dV, \end{aligned} \tag{7}$$

где \vec{u}_{stat} – решение соответствующей статической

Табл. 3. Резонансные частоты $\Omega^{(n)}$, соответствующие n -ой моде колебаний, как функция коэффициента Пуассона σ

σ	сплошные электроды			разрезные электроды		
	$\Omega^{(3)}$	$\Omega^{(4)}$	$\Omega^{(4)}/\Omega^{(3)}$	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(2)}$	$\Omega^{(2)}/\Omega^{(1)}$
0.25	1.774	2.690	1.5163	1.309	1.995	1.5241
0.26	1.791	2.695	1.5047	1.314	1.997	1.5198
0.27	1.807	2.700	1.4942	1.318	1.998	1.5159
0.28	1.824	2.705	1.4830	1.322	2.000	1.5129
0.29	1.841	2.710	1.4720	1.326	2.002	1.5098
0.30	1.858	2.715	1.4612	1.330	2.004	1.5068
0.31	1.875	2.720	1.4507	1.334	2.005	1.5030
0.32	1.893	2.726	1.4400	1.338	2.007	1.5000
0.33	1.910	2.731	1.4298	1.342	2.009	1.4970
0.34	1.928	2.737	1.4196	1.346	2.010	1.4933
0.35	1.946	2.743	1.4096	1.350	2.012	1.4904
0.36	1.964	2.749	1.3997	1.354	2.013	1.4867
0.37	1.983	2.755	1.3893	1.358	2.015	1.4838
0.38	2.001	2.762	1.3803	1.362	2.016	1.4802
0.39	2.020	2.769	1.3708	1.365	2.017	1.4777
0.40	2.039	2.776	1.3615	1.369	2.019	1.4748
0.41	2.057	2.783	1.3529	1.373	2.020	1.4712
0.42	2.076	2.791	1.3444	1.376	2.021	1.4688
0.43	2.096	2.799	1.3354	1.380	2.023	1.4659
0.44	2.115	2.808	1.3277	1.383	2.024	1.4635
0.45	2.134	2.817	1.3201	1.387	2.025	1.4600

задачи при заданной нагрузке на торцах

$$\begin{aligned} \vec{L}(\vec{u}_{\text{stat}}) &= 0 \quad \text{в } V, \\ \vec{T}(\vec{u}_{\text{stat}}) &= \vec{t} \quad \text{на } S. \end{aligned} \quad (8)$$

Если частота вынужденных колебаний ω близка к какой-либо из собственных частот ω_n , то в форме вынужденных колебаний тела \vec{u} доминирует собственная форма \vec{u}_n . При этом амплитуда колебаний зависит от вида внешней нагрузки. Так, если значение соответствующего интеграла в разложении (7) обращается в нуль (т.е. в определенном смысле имеется ортогональность внешней силовой нагрузки к n -ой форме колебаний), то форма \vec{u}_n не возбуждается.

Применим эти соображения для исследования интенсивности возбуждения форм колебаний в тонкой квадратной пьезопластине. В этом случае, в силу дополнительной симметрии относительно диагоналей $y = \pm x$, продольные моды делятся на симметричные ($\vec{u}^s(x, y) = \vec{v}^s(y, x)$) и антисимметричные ($\vec{u}^a(x, y) = -\vec{v}^a(y, x)$). Ко второму классу относится мода Ламе – точное решение для частоты

ты $\Omega_L^{(1)} = \sqrt{2}$ с перемещениями [26]

$$\begin{aligned} \bar{u}_L(x, y) &= C_L \sin \frac{(2p-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2p-1)\pi y}{2a}, \\ \bar{v}_L(x, y) &= -C_L \cos \frac{(2p-1)\pi x}{2a} \sin \frac{(2p-1)\pi y}{2a}, \end{aligned} \quad (9)$$

где p – произвольное целое число.

Решение статической задачи (8) для квадратной пластины с равномерно распределенной нормальной нагрузкой f_0 на ее боковых сторонах $x = \pm a$ и $y = \pm a$ имеет вид

$$u_{\text{stat}} = \frac{f_0 - \sigma f_0}{E} x, \quad v_{\text{stat}} = \frac{f_0 - \sigma f_0}{E} y. \quad (10)$$

В разложении (7) весовые интегралы при антисимметричных продольных модах обращаются в нуль. Отсюда следует, что при возбуждении колебаний разностью потенциалов, подводимой к сплошным электродам, формы колебаний, обладающие свойством антисимметрии, не возбуждаются.

Полученный вывод подтверждается данными табл. 1 для квадратной (I) и почти квадратной (II, $48.2 \times 47.2 \times 3$ мм – соотношение сторон 1.02)

пьезокерамических пластин с $\sigma=0.36$, покрытых сплошными электродами. Например, в квадратной пластине I не возбуждаются семь из тринадцати форм колебаний. В пластине II теоретически могут проявляться все формы колебаний. Тем не менее, ввиду незначительного отклонения размеров пластины от квадратных и малой интенсивности возбуждения зафиксировать соответствующие частоты экспериментально не удалось.

Для оценки эффективности возбуждения колебаний пьезокерамических тел на различных модах используется динамический КЭМС, который рассчитывался по формуле [6]

$$k_{d,n}^2 = \frac{f_{a,n}^2 - f_{r,n}^2}{f_{a,n}^2}, \quad (11)$$

где $f_{r,n}$ и $f_{a,n}$ – частоты резонанса и антирезонанса. Последняя определялась по нулевому суммарному току. В данном случае, КЭМС служит мерой резонансного отклика каждой моды колебаний при условии постоянства механической добротности в рассматриваемом диапазоне частот. Значения динамического КЭМС, приведенные в табл. 1, хорошо согласуются с экспериментальными данными рис. 5. Например, измеренное отношение амплитуд третьей и четвертой мод колебаний равно 6.7, в то время как расчетная величина $k_{d,3}^2/k_{d,4}^2 = 6.5$.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ МАТЕРИАЛА

Наиболее распространенной экспериментальной методикой определения основных механических характеристик пьезокерамики является обертоновый (резонансный) метод, детально описанный в работах [1, 5, 6]. Согласно ему коэффициент Пуассона σ можно определить по отношению первых двух резонансных частот радиальных мод диска или форм планарных колебаний квадратной пластины [5, 7].

По данным рис. 4 соотношение первых двух резонансных частот колебаний круглого диска f_{n2}/f_{n1} равно 2.591, что соответствует коэффициенту Пуассона материала $\sigma=0.36$ [5]. В диапазоне, отвечающем первым трем резонансным частотам диска, квадратная пластина имеет уже более десятка близко расположенных резонансных частот (см. рис. 5, 6). Это существенно усложняет трактовку получаемого спектра и соответствующих форм колебаний.

Анализируя спектр резонансных частот колебаний квадратной пластины со сплошными электродами, заметим, что две низшие возбуждаемые

формы колебаний (соответствующие по табл. 1 третьей и четвертой модам колебаний) имеют наибольшую амплитуду резонансного отклика и отделены от остальных мод. Поэтому они наиболее подходят для определения коэффициента Пуассона. Эпюры этих мод приведены в работе [7]. Экспериментально полученное отношение указанных резонансных частот равно 1.405. Используя данные табл. 3, имеем значение коэффициента Пуассона $\sigma=0.36$. Этот результат полностью согласуется с тестом, проведенным на круглом диске.

Исследования пьезокерамических пластин с разрезными электродами потребовались для идентификации частотного спектра, выделения требуемых мод колебаний и проведения более тщательного анализа спектра в самой низкочастотной области (т. е. до нижней резонансной частоты пластины со сплошными электродами). Видно, что здесь первые моды снова являются наиболее чистыми. Это делает их максимально пригодными для определения упругих постоянных, несмотря на меньшую интенсивность возбуждения по сравнению со случаем продольных мод. Отношение первых двух экспериментально установленных резонансных частот равно 1.485. Согласно табл. 3, это вновь соответствует значению коэффициента Пуассона $\sigma=0.36$.

Особенностью частотного спектра квадратной пластины с разрезными электродами является наличие трех интенсивных близко расположенных резонансных откликов на частотах 62.43, 67.37 и 71.46 кГц (четвертая, пятая и шестая моды соответственно). Кроме того, отметим наличие также самого низкочастотного пика при 25.32 кГц. В виду интенсивного возбуждения указанных мод колебаний представляется интересной разработка метода определения коэффициента Пуассона по соотношению именно этих резонансных частот. Однако это требует выделения и детального изучения соответствующих форм колебаний.

Второй основной механической характеристикой пьезокерамической пластины является модуль Юнга E (или модуль сдвига G). Для ее нахождения представляется интересным использовать колебания пластины на частоте моды Ламе, которая определяется точно и, что более важно, не зависит от коэффициента Пуассона. Однако, как указывалось выше, при рассмотренном расположении электродов модуль Ламе возбудить не удастся.

Модуль сдвига G предлагается вычислять следующим образом. Сначала определяется коэффициент Пуассона σ материала пластины со сплошными или разрезными электродами. Затем экспериментальные значения первой или второй ре-

зонансных частот подставляются в выражение

$$G = \rho \left(4a \frac{f_r^{(e)}}{\Omega^{(n)}} \right)^2. \quad (12)$$

Модуль Юнга E связан с модулем сдвига G известным соотношением $E = 2G(1 + \sigma)$.

Вычисленный таким способом модуль Юнга для двух случаев расположения электродов равен $E = 6.17 \cdot 10^{10}$ Н/м², что хорошо согласуется с табличными данными для пьезокерамики типа ЦТС-19 [5].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье изложена экспериментально-теоретическая методика определения упругих характеристик пьезокерамических материалов по первым двум резонансным частотам планарных колебаний квадратных пластин, возбуждаемых сплошными и разрезными электродами.

Эффективность методики и высокая точность полученных результатов (значение ошибки менее 0.5 %) подтверждаются согласованием расчетных и экспериментальных результатов, а также исследованиями, проведенными на круглых пластинах, из которых изготавливались квадратные образцы.

Основным преимуществом предложенной методики является возможность получения исходных данных в широком диапазоне частот по выбранной паре мод. Это особенно важно для случаев разрезных электродов, когда возбуждаются различные типы несимметричных планарных колебаний квадратной пластины.

1. *Пьезоэлектрические резонаторы: Справочник* / Под ред. П. Е. Кандыбы и П. Г. Позднякова. – М.: Радио и связь, 1992. – 392 с.
2. *Джонсон Р. Механические фильтры в электронике.* – М.: Мир, 1986. – 406 с.
3. *Малов В. В. Пьезорезонансные датчики.* – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 272 с.
4. *Климашин В. М., Никифоров В. Г., Сафонов А. Я., Казаков В. К. Новые области применения пьезотрансформаторов* // Компоненты и технологии. – 2004. – 1. – С. 56–60.
5. *Пьезокерамические преобразователи: Справочник* / Под ред. С. И. Пугачева. – Л.: Судостроение, 1984. – 256 с.
6. *Физическая акустика. Методы и приборы ультразвуковых исследований* / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – 592 с.
7. *IRE standards on piezoelectric crystals: Determination of the elastic, piezoelectric, and dielectric constants – The electromechanical coupling factor, 1958* // Proc. IRE. – 1958. – 46. – P. 764–778.
8. *IRE standards on piezoelectric crystals: Measurements of piezoelectric ceramics, 1961* // Proc. IRE. – 1961. – 49. – P. 1161–1169.
9. *IEEE Standard on piezoelectricity. ANSI/IEEE Standard 176-1987.* – New York: ANSI/IEEE, 1987. – 74 p.
10. *ГОСТ 12370-80 Материалы пьезокерамические. Методы испытаний.* – М.: Изд-во стандартов, 1980. – 30 с.
11. <http://www.npl.co.uk/materials/functional/standards.html>.
12. *Alguéro M.A., Alemany C., Pardo L., González A.M. Method for obtaining the full set of linear electric, mechanical, and electromechanical coefficients and all related losses of a piezoelectric ceramics* // J. Amer. Ceram. Soc. – 2004. – 87. – P. 209–215.
13. *Pardo L., Alguéro M.A., Brebøl K. Resonance method in the standard characterization of ferr-piezoceramic samples: A discussion based on modelling by finite element analysis* // Ferroelectrics. – 2006. – 336. – P. 181–190.
14. *Baerwald H. G., Libove C. Breathing vibrations of planary isoptopic square plates* // Tech. Rept 8, Contr. No. 1055(00). – Cleveite Reseach Center, Cleveland, Ohio. – 1955.
15. *Bechmann R. Contour modes of square plates excited piezoelectrically and determination of elastic and piezoelectric coefficients* // Proc. Phys. Soc. – 1951. – 64. – P. 323–337.
16. *Bechmann R. An improved frequency equation for contour modes of square plates of anisotropic material* // Proc. Phys. Soc. – 1952. – 65. – P. 368–374.
17. *Holland R. Contour extensional resonant properties of rectangular piezoelectric plates* // IEEE Trans. Son. Ultrason. – 1968. – SU-15. – P. 97–105.
18. *EerNisse E. P. Coupled-mode approach to elastic vibration analysis* // J. Acoust. Soc. Amer. – 1966. – 40. – P. 1045–1050.
19. *Lloyd P., Redwood M. Finite-difference method for the investigation of the vibrations of solids and the evaluation of the equivalent-circuit characteristics of piezoelectric resonators. I, II* // J. Acoust. Soc. Amer. – 1966. – 39. – P. 346–361.
20. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Динамическая задача теории упругости для прямоугольной призмы* // Прикл. мех. – 1976. – 7, N 9. – С. 50–65.
21. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.* – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
22. *Улитко А. Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел* // Тепл. напр. элем. констр. – 1975. – N 15. – С. 90–99.
23. *Гринченко В. Т., Карлаш В. Л., Мелешко В. В., Улитко А. Ф. Исследование планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин* // Прикл. мех. – 1976. – 12, N 5. – С. 71–78.
24. *Мелешко В. В., Бондаренко А. А., Lin H.Y., Ma C.C. О возбуждении форм колебаний в квадратных пьезокерамических пластинах* // Теор. прикл. мех. – 2006. – 42. – С. 130–135.
25. *Clebsch A. Theorie der Elasticität fester Körper.* – Leipzig: Teubner, 1862. – 424 s.
26. *Бондаренко А. О. Моды Ламе для пружного прямоугольника* // Вісн. Київ. ун-ту. – 2006. – 17 [подана до друку].