

УДК 534.222.2

ДИНАМИКА ЗАТОПЛЕННОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУЙНОЙ ОБОЛОЧКИ

Ю. М. ДУДЗИНСКИЙ

Одесский национальный политехнический университет

Получено 05.06.2006

В качестве модели противоточного осесимметричного гидродинамического излучателя рассмотрены собственные колебания упругой затопленной конической струйной оболочки кругового сечения. Вычислена частота основной гармоники как функция геометрических и гидродинамических параметров оболочки. Показана принципиальная возможность плавного регулирования основной гармоники акустического сигнала путем замены рабочей пары сопло – отражатель, изменения расстояния между соплом и отражателем, а также регулирования скорости струи на выходе из сопла. Выполнено сравнение теоретических данных с результатами экспериментальных исследований.

У якості моделі протиточного осесимметричного гідродинамічного випромінювача розглянуті власні коливання пружної зануреної конічної струйної оболонки колового перерізу. Обчислено частоту основної гармоніки як функцію геометричних і гідродинамічних параметрів оболонки. Показано принципову можливість плавного регулювання основної гармоніки акустичного сигналу шляхом заміни робочої пари сопло – відбивач, зміни відстані між соплом і відбивачем, а також регулювання швидкості струменя на виході з сопла. Виконано порівняння теоретичних даних з результатами експериментальних досліджень.

Natural oscillations of an elastic flooded conic jet shell of a circular cross-section are considered as a model of a counter-flow axially symmetric hydrodynamic radiator. The fundamental harmonic frequency is calculated as a function of geometric and hydrodynamic parameters of the jet shell. The principal possibility is shown for gradual tuning the fundamental harmonic of the acoustic signal by changing a nozzle – reflector working pair, varying the distance between the nozzle and reflector, and regulating jet velocity at a nozzle outlet. The theoretical data are compared with experimental results.

ВВЕДЕНИЕ

Затопленные струйные оболочки и вихри можно эффективно использовать в осесимметричных гидродинамических излучателях (ГДИ) для генерирования тонального сигнала высокой интенсивности [1]. В таких излучающих системах часть кинетической энергии затопленной струи преобразуется в энергию акустических волн. При натекании кольцевой струи вытекающей из сопла жидкости на препятствие определенной формы и размеров, между их торцами может быть сформирована вихревая тороидальная зона развитой кавитации. Периодический выброс ее содержимого в окружающее пространство и синфазное схлопывание каверн генерируют акустические волны высокой интенсивности. При этом частоту основного тона задает “упругая” струйная оболочка, а накопителем энергии является тороидальный вихрь. Последний отсекается от окружающего пространства вытекающей из сопла кольцевой струей (прямоточный ГДИ) или струей, отраженной от преграды с параболической лункой и замыкающейся на наружную кромку сопла (противоточный ГДИ) [2–6]. В первом случае затопленная струя жидкости имеет форму цилиндрической [2, 3], а во втором – конической оболочки [5, 6].

Если в излучателях противоточного типа длина

струи (характеризуемая расстоянием между торцами сопла и отражателя) меньше диаметра ее сечения, то струйная оболочка имеет среднюю длину и в первом приближении ее также можно считать цилиндрической [5, 7]. Однако при возрастании этого геометрического соотношения увеличивается погрешность вычислений и в качестве модели ГДИ уже необходимо рассматривать усеченную коническую оболочку. Поэтому интерес представляет решение задачи о собственных колебаниях затопленной осесимметричной струйной оболочки в виде усеченного конуса, а также установление зависимости частоты основного тона излучаемого звука от геометрических параметров системы и характеристик рабочей жидкости. Это даст возможность задавать частотный диапазон реальных осесимметричных гидродинамических излучателей противоточного типа еще на стадии проектирования.

Некоторые проблемы взаимодействия упругих тел с жидкостью рассмотрены в работах [8–10]. В данной статье рассматривается задача о колебаниях упругой конической струйной оболочки, затопленной в плохо сжимаемой жидкости с теми же свойствами. Такое приближение означает отсутствие некоторых деформаций, усилий и моментов, что, в свою очередь, приводит к модификации уравнений движения оболочки.

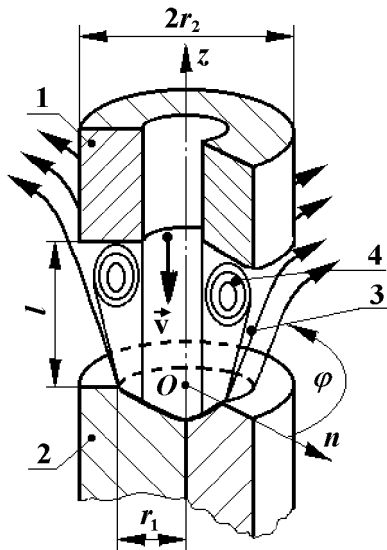


Рис. 1. Физическая модель противоточного осесимметричного гидродинамического излучателя

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим физическую модель противоточного ГДИ (рис. 1). Затопленная струя, вытекающая из сопла 1, формируется отражателем с параболической лункой 2 в осесимметричную струйную оболочку 3 в форме усеченного конуса. При натекании конической струи на наружную кромку сопла часть ее кинетической энергии расходуется на формирование вихря 4, внутри которого за счет эффекта Бернулли возникает кавитация. Часть потока струи уходит в окружающее пространство и в автоколебаниях не участвует, поэтому высота оболочки l определяется расстоянием от торца отражателя до торца сопла. Пульсации вихря возбуждают колебания струйной оболочки на собственной частоте. Оптимальный режим гидродинамического звукообразования, при котором наблюдается максимальный акустический сигнал, соответствует совпадению частоты пульсаций торoidalного вихря с частотой основной гармоники колебаний оболочки [4].

В качестве математической модели примем круговую усеченную коническую оболочку с радиусами оснований r_1 и r_2 , высотой l , толщиной стенки h , углом наклона образующей к оси θ (рис. 2). На торце отражателя (меньшее основание) оболочка жестко закреплена, а на другом отсутствуют продольное смещение, перерезывающее усилие и кру-

тящий момент. Пусть при деформировании оболочки точки ее срединной поверхности получают перемещения $\vec{D}(\alpha, \beta, \vec{n})$. Обозначим проекции вектора \vec{D} на координатные оси через деформацию сжатия-растяжения u , деформацию кручения v и деформацию прогиба w :

$$\vec{D} = \vec{e}_1 u + \vec{e}_2 v + \vec{n} w.$$

В произвольной криволинейной системе координат (α, β, \vec{n}) , где \vec{n} – нормаль к срединной поверхности оболочки, пренебрегая инерцией вращения, имеем систему уравнений движения оболочки [11]:

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{u} - \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_1) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} (AS) + S \frac{\partial A}{\partial \beta} \right] + k_1 Q_1 = 0, \\ \rho h \ddot{v} - \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (AN_2) - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BS) + S \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right] + k_2 Q_2 = 0, \\ \rho h \ddot{w} - \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (BQ_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AQ_2) \right] - \\ - k_1 N_1 - k_2 N_2 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь A, B – коэффициенты Ламе оболочки; k_1, k_2 – нормальные кривизны координатных линий.

Нормальные (N_1, N_2) и перерезывающие (Q_1, Q_2) силы, а также касательное усилие S , отнесенные к единице длины координатных линий и приложенные к срединной поверхности оболочки, будут [11]

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \\ N_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \\ Q_1 &= -\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial (BM_1)}{\partial \alpha} - M_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial (AH)}{\partial \beta} + H \frac{\partial A}{\partial \beta} \right], \\ Q_2 &= -\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial (AM_2)}{\partial \beta} - M_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial (BH)}{\partial \alpha} + H \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right], \\ S &= \frac{Eh}{2(1-\nu)} \gamma, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma$ – компоненты деформаций; E – модуль упругости материала оболочки; ν – коэффициент Пуассона. Удельные изгибающие моменты M_1, M_2 и крутящий момент H соответственно имеют вид [11]

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_1 + \nu\kappa_2), \\ M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_2 + \nu\kappa_1), \\ H &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + k_1 u \right) + \\ &+ \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + k_2 v \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + k_2 v \right) + \\ &+ \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + k_1 u \right); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \\ &- k_1 \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right) - \\ &- k_2 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right). \end{aligned}$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНИЧЕСКОЙ СТРУЙНОЙ ОБОЛОЧКИ

Методика решения рассматриваемой задачи основана на применении подхода, изложенного ранее в работах [3, 5, 7]. Для конической оболочки кругового сечения (рис. 2) произведем замену координат $\alpha \rightarrow x, \beta \rightarrow \varphi$. Параметры Ламе A, B , нормальная кривизна координатных линий k_1, k_2 и углы поворота нормали к срединной поверхности оболочки θ_1, θ_2 , соответственно, принимают зна-

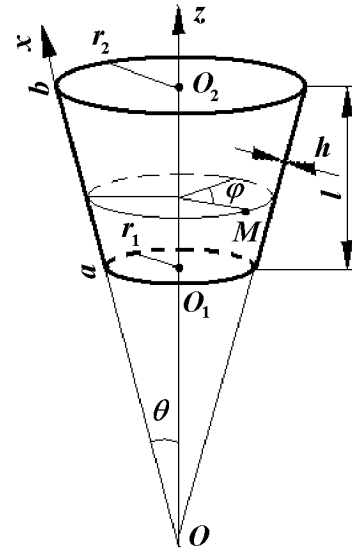


Рис. 2. Коническая затопленная струйная оболочка

чения

$$\begin{aligned} A &= 1, & B &= x \sin \theta, \\ k_1 &= 0, & k_2 &= \frac{\operatorname{ctg} \theta}{x}, \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha} &= \frac{\partial B}{\partial x} = \sin \theta; \\ \frac{\partial A}{\partial \beta} &= \frac{\partial(1)}{\partial \varphi} \equiv 0; \\ \theta_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + k_1 u = \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \theta_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + k_2 v = \frac{1}{x \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{x} v. \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом соотношений (5) коэффициенты (4) примут вид

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \kappa_2 &= \frac{1}{x^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \tau &= \frac{1}{x \sin \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} - \frac{1}{x^2 \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (6)$$

Воспользовавшись выражениями для деформации срединной поверхности [11], с учетом выраже-

ний (5) после очевидных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{x \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{x} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{x} w, \\ \gamma &= \frac{1}{x \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{x}. \end{aligned} \quad (7)$$

Принимая во внимание соотношения (6) и (7), преобразуем выражения для усилий (2) и моментов (3), отнесенных к единице длины координатных линий конической оболочки:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \times \\ &\quad \times \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{x} u + \frac{\nu}{x \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\nu \operatorname{ctg} \theta}{x} w \right), \\ N_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \times \\ &\quad \times \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{x} + \frac{1}{x \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{x} w \right), \\ S &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{x} + \frac{1}{x \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right), \\ M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \times \\ &\quad \times \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\nu}{x^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \\ M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \times \\ &\quad \times \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{x^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \\ H &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{x \sin \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} - \frac{1}{x^2 \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \\ Q_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1+\nu}{x^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \varphi^2} - \frac{2+\nu}{x^3 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \\ Q_2 &= \frac{1}{x \sin \theta} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + (1+\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставим величины (8) в выражения (1). Принимая во внимание, что материалом оболочки яв-

ляется жидкость в затопленной струе, можно пренебречь влиянием поперечных сил на деформации сжатия–растяжения и кручения, т. е. исключить из первых двух уравнений системы (1) Q_1 и Q_2 . После преобразований получим следующую систему уравнений движения конической оболочки:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1-\nu}{2x^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u + \\ &\quad + \left[\frac{1+\nu}{2x \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} - \frac{3-\nu}{2x^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] v + \\ &\quad + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{x} \left[\frac{1}{x} - \nu \frac{\partial}{\partial x} \right] w = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \ddot{u}, \\ &\frac{1}{2x \sin \theta} \left[(1+\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} - \frac{3-\nu}{x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] u + \\ &\quad + \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] v - \\ &\quad - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{x^2 \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \ddot{v}, \\ &-\Delta^2 w + \frac{12 \operatorname{ctg} \theta}{h^2 x} \left[\left(\frac{1}{x} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \right) u + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{x} w \right] = \frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^3} \ddot{w}. \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая, что при осевой симметрии ни одна из упругих величин не зависит от угловой координаты φ , перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} \right) u + \\ &\quad + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{x} \left(\frac{1}{x} - \nu \frac{\partial}{\partial x} \right) w = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \ddot{u}, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{x^2} v = \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \ddot{v}, \\ &-\Delta^2 w + \frac{12 \operatorname{ctg} \theta}{h^2 x} \left[\left(\frac{1}{x} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \right) u - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{x} w \right] = \frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^2} \ddot{w}. \end{aligned} \quad (10)$$

Примем коэффициент Пуассона $\nu=0$, что обуслов-

лено моделью – струйная коническая оболочка в затопленном состоянии находится в плохо сжимаемой жидкости с теми же свойствами. Поскольку по смыслу задачи меньшее основание оболочки жестко зашпелено, а на другом конце отсутствуют продольное смещение, перерезывающее усилие и крутящий момент, то смещениями u и v пренебрегаем. Тогда для определения частот собственных колебаний следует воспользоваться третьим уравнением системы (10):

$$-\Delta^2 w - \frac{12ctg^2\theta}{h^2 x^2} w = \frac{12\rho}{Eh^2} \ddot{w}, \quad (11)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Граничные условия на зашпеленном крае имеют вид

$$\left(x = a = \frac{r_1}{\sin\theta}\right) \rightarrow w(a) = 0, \quad w'(a) = 0, \quad (12)$$

$$N_1 = S = S^* = (S - Hx \sin\theta) = 0$$

(последнее выполняется автоматически при $w(a) = 0$), а на свободном –

$$\left(x = b = \frac{r_2}{\sin\theta}\right) \rightarrow M_1 = 0,$$

$$Q = 0, \quad w(b) = 0, \quad w'(b) = 0, \quad (13)$$

$$w'''(b) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right] w(b) = 0.$$

Решение уравнения (11) представим в виде гармонической функции

$$w(x, t) = W(x) \exp(i\omega t),$$

где $\omega = 2\pi f$ – круговая частота изгибных колебаний оболочки. Тогда уравнение колебаний (11) примет вид

$$\Delta^2 W + \frac{12ctg^2\theta}{h^2 x^2} W - \frac{12\rho\omega^2}{Eh^2} W = 0. \quad (14)$$

Введем безразмерные координаты и функции

прогиба:

$$x = (b - a)\eta = \ell\eta,$$

$$W(x) = \ell U\left(\frac{x}{\ell}\right),$$

$$\frac{dW}{dx} = \frac{dU}{d\eta},$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = \frac{1}{\ell} \frac{d^2 U}{d\eta^2},$$

$$\frac{d^3 W}{dx^3} = \frac{1}{\ell^2} \frac{d^3 U}{d\eta^3},$$

$$\Delta W = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right) W = \frac{1}{\ell} \Delta U,$$

$$\Delta^2 W = \frac{1}{\ell^3} \Delta^2 U.$$

Тогда соотношение (14) можно переписать как

$$\Delta^2 U + \frac{k^2}{\eta^2} U - \gamma U = 0, \quad (15)$$

где

$$k^2 = \frac{12ctg^2\theta}{\varepsilon^2}; \quad (16)$$

$$\gamma = \frac{12\rho\ell^2\omega^2}{E\varepsilon^2} > 0; \quad \varepsilon^2 = \frac{h^2}{\ell^2}.$$

Соответственно, граничные условия (12) и (13) на зашпеленном и свободном краях трансформируются в

$$U(\alpha) = 0, \quad U'(\alpha) = 0,$$

$$U(\beta) = 0, \quad U'''(\beta) + \frac{1}{\beta} U(\beta) - \frac{1}{\beta^2} U'(\beta) = 0,$$

где $\alpha = a/\ell$; $\beta = b/\ell$.

Решение безразмерного уравнения собственных колебаний конической оболочки проведем методом Рунта:

$$U(\eta) = \sum_{m=1}^n C_m \varphi_m(\eta),$$

где

$$\varphi_m(\eta) = (\eta - \alpha)^2 (\eta - \beta)^3 \eta^{m-1}.$$

Тогда формула (15) примет вид

$$\sum_{m=1}^n C_m \left[\Delta^2 \varphi_m(\eta) + \frac{k^2}{\eta^2} \varphi_m(\eta) - \gamma \varphi_m(\eta) \right] = 0.$$

Последнее выражение умножаем на функцию $\varphi_j(\eta)$, $j \in [1; n]$, и интегрируем в пределах $\eta \in [\alpha; \beta]$:

$$\sum_{m=1}^n C_m \left[\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_j(\eta) \Delta^2 \varphi_m(\eta) d\eta + k^2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi_j(\eta) \varphi_m(\eta)}{\eta^2} d\eta - \gamma \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_j(\eta) \varphi_m(\eta) d\eta \right] = 0. \quad (17)$$

Введем операторы

$$A_{jm} = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_j(\eta) \Delta^2 \varphi_m(\eta) d\eta,$$

$$B_{jm} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi_j(\eta) \varphi_m(\eta)}{\eta^2} d\eta,$$

$$D_{jm} = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_j(\eta) \varphi_m(\eta) d\eta.$$

Тогда безразмерное уравнение конической оболочки (17) переходит в выражение вида

$$\sum_{m=1}^n (A_{jm} + k^2 B_{jm} - \gamma D_{jm}) C_m = 0.$$

Нетривиальное решение последнего соотношения соответствует условию, когда определитель матрицы размерностью $(n \times n)$ равен нулю:

$$\det(A_{jm} + k^2 B_{jm} - \gamma D_{jm}) = 0. \quad (18)$$

В результате численного анализа можно получить параметр γ , а затем перейти к физической величине – собственной частоте затопленной конической струйной оболочки согласно формуле (16):

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma E \varepsilon^2}{12 \rho \ell^2}}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

При этом частоте f_0 основной гармонике генерируемых осесимметричным ГДИ акустических волн соответствует минимальное действительное положительное значение из полученного ряда f_i . Сравнение результатов вычислений с экспериментальными данными позволило сделать вывод, что достаточная для практики точность соответствует матрице (5×5) .

3. АНАЛИЗ РАСЧЕТНЫХ ДАННЫХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как следует из выражений (16), (18) и (19), частота колебаний затопленной конической струйной оболочки зависит от ее геометрических параметров (r_1, θ, h) и свойств жидкости (E, ρ) . Ранее было показано, что следует учитывать также внешние условия в среде (гидростатическое давление) [2, 7]. Для проверки соответствия приведенной математической модели параметрам реального устройства были исследованы частотные диапазоны осесимметричных противоточных ГДИ (см. рис. 1). Вначале использовалась отстоянная в течение трех недель водопроводная вода, имеющая плотность $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$; прочность жидкости на разрыв (порог кавитации) $P_* = 5.1 \cdot 10^5 \text{ Па}$; линейный и первые два нелинейные параметры в модели Тэта $\chi_1 = 7.5$, $\chi_2 = 8 \cdot 10^{-6}$, $\chi_3 = 1.2 \cdot 10^{-11}$. Еще одной рабочей жидкостью служило трансформаторное масло: $\rho = 940 \text{ кг/м}^3$; $P_* = 2.55 \cdot 10^5 \text{ Па}$; $\chi_1 = 7.1$; $\chi_2 = 8 \cdot 10^{-6}$; $\chi_3 = 10^{-11}$ [12–14].

Заметим, что модуль упругости струйной оболочки E выражается через адиабатический модуль объемной упругости жидкости (с учетом того, что струйная оболочка находится в условиях затопления в той же плохо сжимаемой жидкости – $\nu = 0$) [12, 14]:

$$E = \frac{K}{3(1-2\nu)} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \chi_i (P_* + \Delta P_{st})^i. \quad (20)$$

Здесь ΔP – статическое давление в невозмущенной жидкости, избыточное по сравнению с атмосферным. Во всех экспериментах давление в жидкости было близко к атмосферному. Пренебрежимость статической добавки ($\Delta P_{st} \approx 3 \text{ кПа}$) обуславливалась малой глубиной погружения пары сопло – отражатель в рабочей емкости.

Ранее проведенные исследования [2, 4] показали, что в противоточных осесимметричных гидродинамических излучающих системах наибольший уровень акустического сигнала соответствует диапазону отношений длины к радиусу меньшего основания струйной оболочки $\ell = (0.9 \div 1.1)r_1$. Вместе с тем, обнаружена возможность существенно изменять частоту основной гармоник акустического сигнала путем регулировки в широком диапазоне значений расстояния между соплом и отражателем противоточного ГДИ. На рис. 3 кривыми представлены результаты расчетов нижней собственной частоты затопленной осесимметричной струйной оболочки от ее длины. Экспериментальные зависимости частоты основной гар-

Табл 1. Геометрические характеристики струйной оболочки для различных значений ℓ

ℓ , мм	r_2 , мм		θ		h , мм	
	Вода	Минерал. масло	Вода	Минерал. масло	Вода	Минерал. масло
2.0	5.65	5.5	47.1°	45.6°	0.46	0.14
2.5			40.7°	39.2°		
3.0			35.6°	34.2°		
3.5			31.6°	30.2°		
4.0			28.3°	27.0°		
4.5			25.6°	24.4°		
5.0			23.3°	22.2°		

Табл 2. Геометрические характеристики струйной оболочки для различных значений r_1

r_1 , мм	r_2 , мм		θ		h , мм	
	Вода	Минерал. масло	Вода	Минерал. масло	Вода	Минерал. масло
1.5	2.42	—	31.6°	29.5°	0.200	—
2.0	3.23	3.16			0.260	0.061
2.5	4.03	3.96			0.310	0.079
3.0	4.84	4.75			0.350	0.094
3.5	5.65	5.54			0.460	0.106
4.0	6.45	6.33			0.540	0.140
4.5	7.26	7.12			0.610	0.164
5.0	8.06	7.91			0.600	0.185
6.0	9.68	—			0.850	—
7.0	11.29	—			1.300	—

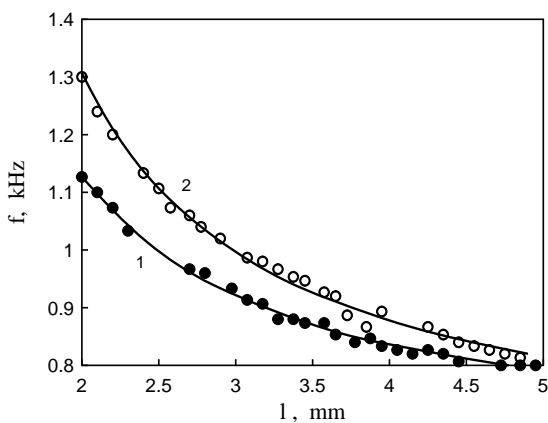


Рис. 3. Зависимость собственной частоты от длины затопленной конической струйной оболочки

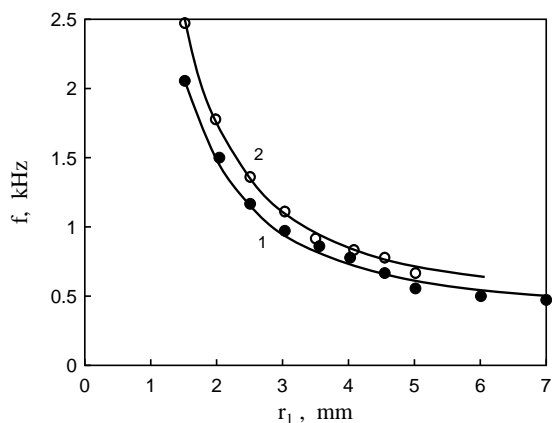


Рис. 4. Зависимость собственной частоты от радиуса меньшего основания затопленной конической струйной оболочки

моники генерируемого звука от расстояния ℓ между соплом и отражателем реального излучателя представлены точками. Кривая 1 соответствует работе устройства в отстоянной в течение трех

недель водопроводной воде, а кривая 2 – в трансформаторном масле. В первом случае использовалась пара сопло – отрагатель, для которых $r_1 = 3.50$ мм, $r_2 = 5.65$ мм, во втором – $r_1 = 3.50$ мм,

$r_2 = 5.54$ мм. При этом поддерживался постоянным расход жидкости через проходное отверстие сопла (см. рис. 1) после настройки излучателя в оптимальном режиме. В табл. 1 приведены геометрические параметры наблюдавшихся струйных оболочек. Очевидно, с уменьшением ℓ возрастает их конусность. Кроме того, увеличение габаритов струи естественным образом приводит к снижению частоты сигнала.

Интересно, что при прочих равных условиях собственная частота водяной оболочки оказывается меньше, по сравнению с масляной. Объяснить это можно тем, что при замене рабочей жидкости имеют место две противоположные тенденции. У водяной струи больше выше предел прочности P_* . Как следует из формул (20) и (19), с увеличением модуля упругости E частота собственных колебаний должна возрастать. В то же время, большая плотность ρ воды и одновременно большая толщина h струи (см. табл. 1) приводят к увеличению удельной массы единицы площади оболочки. Это, в свою очередь, должно привести к понижению собственной частоты (см. выражение (19)). Вероятно, вклад второй тенденции оказывается более существенным.

На рис. 4 представлены расчетные зависимости собственной частоты конической струйной оболочки от радиуса ее меньшего основания для воды (кривая 1) и трансформаторного масла (кривая 2). Экспериментальные данные о частоте основной гармоники акустического сигнала для различных радиусов r_1 лунки на торце отражателя реального ГДИ представлены маркерами. Вследствие разной вязкости воды и минерального масла [2] одному профилю лунки соответствуют различные углы конусности θ . Как было показано ранее, максимальный уровень звука достигается при определенных отношениях радиусов и высоты оболочки к диаметру проходного отверстия сопла d [2, 5]:

$$r_1 \approx d, \quad r_2 = (3.2 \div 3.4)d, \quad \ell = (0.9 \div 1.1)d.$$

Кроме того, максимальный уровень акустического сигнала соответствует оптимальной скорости струи v на выходе из сопла. При неизменной скорости с увеличением диаметра проходного отверстия сопла возрастает расход жидкости, что, в свою очередь, приводит к увеличению толщины оболочки h . Радиусы конической оболочки варьировались путем замены рабочей пары сопло – отражатель гидродинамического излучателя. Оптимальные длина оболочки (иначе, расстояние между соплом и отражателем) и ее толщина (за счет скорости истечения жидкости) соответствовали максимальному уровню звука. Геометрические соотношения для исследованных ГДИ

отражены в табл. 2. Как и в первом эксперименте, увеличение габаритов струи приводило к снижению собственной частоты. Кроме того, при прочих равных условиях, собственная частота водяной оболочки оказывалась меньше, по сравнению с масляной.

ВЫВОДЫ

По результатам выполненных исследований могут быть сделаны следующие выводы.

1. Рассмотрена модель осесимметричного проточного гидродинамического излучателя в виде затопленной круговой конической струйной оболочки. Это уточнение позволит с высокой точностью задавать рабочую частоту генерируемого данными системами акустического сигнала для конкретного устройства на стадии их проектирования.
2. Выведена зависимость частоты основного тона генерируемого акустического сигнала от геометрических параметров струйной оболочки и гидродинамических параметров жидкости.
3. Получено не только качественное, но и количественное соответствие между теоретическими и экспериментальными данными.
4. Показаны две возможности плавной регулировки основной гармоники генерируемого звука: заменой рабочей пары сопло – отражатель и регулировкой расстояния между ними.

1. Назаренко А. Ф. Гидродинамические излучатели // Ультразвук: маленькая энциклопедия / Под ред. И. П. Голяминой. – М.: Сов. энцикл., 1979. – С. 79–81.
2. Дудзинский Ю. М. Осесимметричные гидродинамические излучатели в условиях статического давления. – Одесса: Дисс. канд. техн. наук, 1997. – 170 с.
3. Дудзинский Ю. М., Назаренко О. А. Колебания затопленной осесимметричной струи-оболочки // Акуст. вісн. – 2001. – 3, N 4. – С. 27–35.
4. Дудзинский Ю. М., Маничева Н. В., Назаренко О. А. Оптимизация параметров широкополосного акустического излучателя в условиях избыточных статических давлений // Акуст. вісн. – 2001. – 4, N 2. – С. 38–46.
5. Дудзинский Ю. М., Попов В. Г. Вынужденные колебания осесимметричной затопленной струйной оболочки // Прикл. мех. – 2005. – 41, N 4. – С. 60–65.

6. Дудзинский Ю. М., Слиозберг Т. М., Назаренко А. А. Анализ давления в гидродинамической излучающей системе на протяжении периода колебаний // Зб. праць акустичного симпозиуму "КОНСОНАНС-2003". – К.: ІГМ НАНУ, 2003. – С. 84–88.
7. Дудзинский Ю. М., Дашенко А. Ф. Собственные колебания струйной оболочки в условиях гидростатического давления // Прикл. мех. – 2004. – 40, N 12. – С. 92–98.
8. Guz A. N., Kubenko V. D., Babaev A. E. Dynamics of the system of shells interacting with a liquid // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N 3. – P. 260–301.
9. Guz A. N., Zhuk A. P. Motion of solid particles in a liquid under the action of an acoustic field: The mechanism of radiation pressure // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 3. – P. 246–265.
10. Koval'chuk P. S., Filin V. G. Circumferential traveling waves in filled cylindrical shells // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N 2. – P. 192–196.
11. Перцев А. К., Платонов Э. Г. Динамика оболочек и пластин. – Л.: Судостроение, 1987. – 400 с.
12. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. – М.: Наука, 1966. – 520 с.
13. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. – М.: Мир, 1974. – 688 с.
14. Корнфельд М. Упругость и прочность жидкостей. – М.: ГИТТЛ, 1951. – 200 с.