

УДК 534.1:534.232

# СВОЙСТВА ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В ЗАПОЛНЕННОМ ЖИДКОСТЬЮ ЦИЛИНДРЕ

В. Т. ГРИНЧЕНКО\*, Г. Л. КОМИССАРОВА\*\*

\*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

\*\*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

Получено 30.01.2006

Исследованы свойства гармонических поверхностных волн в упругом цилиндре, заполненном жидкостью. Описание волнового движения проведено на основе полной системы уравнений динамической теории упругости и уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости. Асимптотический анализ дисперсионных соотношений в области больших волновых чисел и качественный анализ дисперсионного спектра позволил установить принципиальные различия между свойствами поверхностных волн в волноводах с жесткими и мягкими стенками. В обоих случаях первая нормальная волна с увеличением волнового числа формирует в пределе волну Стоунли на внутренней поверхности цилиндра. Для мягкого материала цилиндра вторая нормальная волна формирует в пределе волну Рэлея на внешней поверхности. В случае жесткого цилиндра поверхностная волна на внешней поверхности как предельное состояние одной из нормальных волн волновода не существует, а движения типа волны Рэлея формируются лишь на отдельных участках различных дисперсионных кривых. Для мягких и жестких материалов цилиндров наблюдается также существенное различие в предельных значениях фазовых скоростей волн высших порядков.

Досліджені властивості гармонічних поверхневих хвиль у пружному циліндрі, заповненому рідиною. Для опису хвильових рухів використано повну систему рівнянь динамічної теорії пружності та рівняння руху ідеальної стислої рідини. Асимптотичний аналіз дисперсійних співвідношень в області великих хвильових чисел та якісний аналіз дисперсійного спектра дозволив установити принципові відмінності між властивостями поверхневих хвиль у хвилеводах із жорсткими та м'якими стінками. В обох випадках перша нормальна хвиля зі збільшенням хвильового числа у граничному наблизненні формує хвилю Стоунлі на внутрішній поверхні циліндра. Для м'якого матеріалу циліндра друга нормальна хвиля на зовнішній поверхні формує у граничному наблизненні хвилю Релея. У випадку жорсткого циліндра поверхнева хвиля на зовнішній поверхні як граничний стан однієї із нормальних хвиль хвилеводу не існує, а рухи типу хвилі Релея формуються лише на окремих ділянках різних дисперсійних кривих. Для м'яких та жорстких матеріалів циліндрів спостерігається також суттєва різниця у граничних значеннях фазових швидкостей хвиль вищих порядків.

Properties of harmonic surface waves in a fluid-filled elastic cylinder are investigated. Wave motion in a composite waveguide is described on the basis of the complete systems of equations of dynamic elasticity theory and equations of motion of ideal compressed liquid. An asymptotic analysis of the dispersion relations for large wave numbers and quantitative analysis of the dispersion spectrum show the fundamental difference between the properties of the surface waves in the waveguides with the compliant and rigid walls. In both cases, with increasing wavenumber, the first normal mode on the internal surface of the cylinder forms at the limit the Stoneley wave. For the compliant cylinder's material, the second normal wave on the external surface forms at the limit the Rayleigh wave. In the case of the rigid cylinder, the surface wave on the external surface does not exist as a limiting form of one of the normal waves of the waveguide, but the motions like the Rayleigh wave are formed only on separate segments of different dispersion curves. Moreover, for the compliant and rigid materials of the cylinders the essential distinction is also observed in the limiting values of phase velocities for the waves of higher orders.

## ВВЕДЕНИЕ

Наличие поверхностных волн как особого типа волновых движений, локализованных вблизи свободной поверхности упругого изотропного полупространства, впервые было отмечено Рэлеем [1]. Позже возможность локализации волновых движений вблизи поверхности контакта двух упругих сред показана Стоунли [2]. В случае полного (без проскальзывания) контакта двух упругих сред поверхностная волна существует только при определенных соотношениях между их жесткостными характеристиками [3]. Количество комбинаций пар материалов, допускающих существование волны Стоунли при их полном сцеплении весьма ограничено, а в случае скользящего контакта оно зна-

чительно расширяется [4]. При контакте упругой и жидкой сред поверхностная волна Стоунли существует всегда [5]. Волну Стоунли при контакте упругое тело – жидкость иногда называют “волной Шолте” или “волной Стоунли – Шолте”.

При рассмотрении нормальных волн на границе контакта упругое тело – жидкость обычно различают два типа пар материалов [6, 7]. Пара жесткое упругое тело – жидкость характеризуется тем, что скорость волны сдвига материала упругого тела превышает скорость звука в жидкости ( $V_S > C_0$ ). Для пары мягкое упругое тело – жидкость наоборот, скорость волны сдвига меньше скорости звука в жидкости ( $V_S < C_0$ ).

Поверхностные волны Рэлея и Стоунли являются бездисперсионными. Их фазовые скорости

не зависят от значений частоты и волнового числа. Поверхностные волны характеризуются специфической кинематикой частиц вблизи границы, а также определенным соотношением продольных и поперечных компонент вектора смещений [5]. Отметим, что исследованию свойств поверхностных волн в упругих телах посвящено большое количество работ. Современный уровень понимания явления локализации волновых движений в таких средах изложен в монографии [5].

Волны упомянутых типов широко используются в сейсмологии и сейсморазведке (как средство неразрушающего контроля поверхностей и поверхностного слоя образцов), а также в акустоэлектронике. Распространяющиеся волны Рэлея и Стоунли, излучаемые от поверхности раздела жидкость – упругое тело, используются как эффективный способ обнаружения поверхностных и подповерхностных дефектов [8]. В работе [9] изложен экспериментальный метод определения динамических упругих характеристик материалов образцов, основанный на измерении дисперсионных и кинематических характеристик возбуждаемой поверхностной волны Рэлея.

Систематизация накопленных данных позволяет строить качественные предположения о характере поверхностных волн в составных волноводах различных типов. Следует отметить, что практическое использование сведений о таких волновых движениях возможно лишь при наличии достаточно полных количественных оценок их характеристик в зависимости от геометрических и физических параметров волновода. В данной работе рассматриваются особенности локализации волновых движений на поверхностях заполненного жидкостью цилиндра.

Известно, что поля в волноводах формируются как суперпозиция сложных по своим свойствам нормальных волн. Некоторые из них с увеличением волнового числа (частоты) преобразуются в поверхностные волны, локализованные вблизи свободных поверхностей либо поверхностей контакта упругих сред. В таких системах как упругий слой и сплошной цилиндр поверхностные волны формируются на основе низших распространяющихся волн [10–12].

В сплошном цилиндре существует одна нормальная волна с нулевой частотой запертия для осесимметричных волн, которая в области больших волновых чисел трансформируется в поверхностную волну Рэлея [11, 12]. В полом цилиндре также имеется одна нормальная волна с нулевой частотой запертия, однако наличие двух поверхностей предполагает существование уже двух по-

верхностных волн. Отсутствие симметрии между стенками полого цилиндра указывает на то, что искомые волны должны отличаться от волн в слое. В работе [13] на основе конкретных вычислений показано, что фазовая скорость низшей нормальной волны полого цилиндра с уменьшением длины волны (увеличением волнового числа) стремится к скорости волны Рэлея как для осесимметричных, так и для неосесимметричных волн ( $n = 1, 2$ ). Ее кинематические характеристики в этой публикации не исследовались. В статье [14] впервые указывалось на существование в полом цилиндре второй нормальной волны, фазовая скорость которой с повышением частоты стремится к скорости волны Рэлея. Данные конкретных вычислений кинематических характеристик первых двух нормальных волн позволили утверждать, что в рассмотренной области сравнительно невысоких частот в полом цилиндре, в отличие от слоя, нет обмена энергии между локализованными волновыми движениями на его поверхностях. Однако было выдвинуто предположение, что такой обмен может возникнуть при дальнейшем повышении частоты.

Существенное отличие дисперсионных свойств осесимметричных волн в полом цилиндре от волн в слое и сплошном цилиндре обнаруживается уже при качественном анализе дисперсионных соотношений [15]. Так, помимо коэффициента Пуассона, дисперсионные характеристики волн в полом цилиндре зависят еще и от двух геометрических параметров – радиуса кривизны и толщины стенки. Влияние толщины стенки цилиндра особенно сильно сказывается на свойствах первой нормальной волны. Дисперсионные свойства низшей нормальной волны тонких цилиндров характеризуются специфической особенностью: при малых изменениях частоты длина волны изменяется весьма существенно [16, 17].

Проведенный в [18] асимптотический анализ дисперсионного уравнения для полого цилиндра в области больших волновых чисел позволил выделить два независимых уравнения для определения фазовых скоростей двух низших нормальных волн. Они отличаются от классического уравнения Рэлея наличием слагаемых, обратно пропорциональных волновому числу. Одно уравнение с положительной добавкой определяет скорость волны, локализованной вблизи внешней поверхности цилиндра. Ее значение приближается к скорости волны Рэлея снизу. Второе уравнение с отрицательной добавкой определяет фазовую скорость волны, локализованной вблизи внутренней поверхности цилиндра. Ее величина стремится к скорости волны Рэлея сверху. Следовательно, поверхно-

стные волны в полом цилиндре формируются по отдельности на внешней и внутренней поверхностях цилиндра. В отличие от слоя, в полом цилиндре при произвольном значении частоты не наблюдается обмена энергией между волновыми движениями, локализованными вблизи его поверхностей.

Кажется очевидным, что в волноводной структуре, представляющей собой заполненный жидкостью полый цилиндр, должны существовать две поверхностные волны: вблизи внешней свободной поверхности цилиндра и поверхности контакта жидкость – упругое тело. Однако данные о дисперсионных свойствах составных волноводов [16, 19] показывают, что для таких локализованных волновых движений они могут быть довольно сложными. Эффекты упруго-жидкостного взаимодействия существенно зависят также от соотношения жесткости материала цилиндра и волнового сопротивления жидкости. Влияние этого параметра рассмотрено в данной работе. Кроме того, существенное внимание уделено анализу кинематических и энергетических характеристик нормальных волн, вырождающихся с увеличением волнового числа (частоты) в поверхностные волны.

## 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА СМЕЩЕНИЯ И АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Характеристики нормальных осесимметричных волн, распространяющихся в бесконечном упругом цилиндре, заполненном идеальной сжимаемой жидкостью, зависят от четырех параметров. Помимо величин относительного внутреннего радиуса  $r_1$  и числа Пуассона  $\nu$ , как это было в случае пустого цилиндра, к ним добавляются отношения скоростей  $V_S/C_0$  и плотностей  $\rho_0/\rho_1$  упругой и жидкой составляющих волновода. Здесь  $r_1 = R_1/R$ ;  $R_1$  и  $R$  – внутренний и внешний радиусы полого цилиндра соответственно.

Значительный объем результатов исследований свойств цилиндрических упруго-жидкостных волноводов представлен в работах [15–17, 19–21]. В них основное внимание уделено анализу особенностей упруго-жидкостного взаимодействия в волноводе и его влияния на дисперсионные, кинематические и энергетические характеристики нормальных волн. Рассматривался диапазон волновых чисел (частот), при которых в составном волноводе еще не сформировались поверхностные волны. В данной работе основное внимание будет уделено волновому движению, локализованному вблизи поверхностей цилиндра.

Подобно случаю относительно простых систем (таких как слой, слой на жидком полупространстве и полый цилиндр), поверхностные волны в цилиндре с жидкостью должны формироваться как некоторые предельные волновые движения в низших нормальных волнах. Изучение таких предельных ситуаций может дать дополнительные сведения об особенностях упруго-жидкостного взаимодействия в составных волноводах. Основанием для такого предположения является то, что в пустом цилиндре имеются две независимые поверхностные волны [18]. Добавление в систему жидкости должно приводить к появлению поверхностной волны типа Стоунли. Таким образом, упруго-жидкостное взаимодействие может существенно повлиять на процесс локализации волновых движений в заполненном жидкостью цилиндре.

Исследование характеристик гармонических поверхностных волн проведено с использованием полной системы уравнений динамической теории упругости и уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости. Компоненты вектора перемещений, описывающие осесимметричное волновое поле упругого цилиндра и удовлетворяющие уравнениям движения, имеют вид [15]

$$u_j = U_j(r) \exp[i(\zeta z - \omega t)], \quad j = r, z,$$

$$U_r(r) = -\alpha [A_1 J_1(\alpha r) + A_2 Y_1(\alpha r)] + \beta [B_1 J_1(\beta r) + B_2 Y_1(\beta r)], \quad (1)$$

$$U_z(r) = i\zeta [A_1 J_0(\alpha r) + A_2 Y_0(\alpha r)] + i \frac{\beta^2}{\zeta} [B_1 J_0(\beta r) + B_2 Y_0(\beta r)],$$

где

$$\alpha^2 = \gamma_1^2 - \zeta^2; \quad \beta^2 = \gamma_2^2 - \zeta^2;$$

$$\gamma_1 = \frac{\omega R}{V_D}; \quad \gamma_2 = \frac{\omega R}{V_S}; \quad \gamma_1^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \gamma_2^2.$$

Потенциал скорости идеальной сжимаемой жидкости, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца, записывается как [15]

$$\varphi_0 = D_0 J_0(\chi_0 r) \exp[i(\zeta z - \omega t)],$$

$$\chi_0 = \sqrt{\gamma_2^2 \left(\frac{V_S}{C_0}\right)^2 - \zeta^2} = \frac{V_S}{C_0} \zeta \sqrt{\left(\frac{C}{V_S}\right)^2 - \left(\frac{C_0}{V_S}\right)^2}. \quad (2)$$

Здесь  $\zeta$  – безразмерное волновое число;  $\omega$  – круговая частота;  $V_D$  – скорость волны расширения;  $C$  – фазовая скорость нормальной волны;  $J_n, Y_n$  ( $n=0, 1$ ) – функции Бесселя;  $A_1, A_2, B_1, B_2, D_0$  – произвольные постоянные.

Дисперсионное уравнение для упругого цилиндра, заполненного идеальной сжимаемой жидкостью, получено в статье [15]. В работах [15–17, 19] проведено довольно подробное исследование поведения дисперсионных кривых в области относительно малых волновых чисел и частот. Используя уже апробированный в [18] математический аппарат, рассмотрим возможность формирования волновых полей, локализованных возле поверхностей заполненного жидкостью цилиндра. Ясно, что такая локализация может проявиться только в области больших волновых чисел и высоких частот. Как видно из результатов, полученных для пустого цилиндра, область формирования поверхностных волн существенно зависит от толщины его стенки.

Проведем асимптотический анализ дисперсионного уравнения. Для этого на плоскости  $(\zeta, \gamma_2)$  выделим характерные области. При изучении поверхностных волн следует ограничиться тем диапазоном частот и волновых чисел, в котором фазовые скорости нормальных волн меньше скорости волны сдвига. Здесь для пустого цилиндра существуют две поверхностные волны Рэлея [18], а величины  $\alpha$  и  $\beta$  являются мнимыми.

Асимптотический анализ дисперсионного уравнения следует проводить отдельно для случаев жесткого и податливого (мягкого) материалов цилиндра. Объясняется это тем, что на плоскости  $(\zeta, \gamma_2)$  прямая  $\chi_0 = 0$  в случае жесткого материала цилиндра расположена значительно ниже прямой  $\beta = 0$  [16], а в случае податливого материала – выше прямых  $\alpha = 0$  и  $\beta = 0$  [19].

Для жесткого материала цилиндра в области частот и волновых чисел, расположенной ниже прямой  $\beta = 0$ , дисперсионное уравнение, приведенное в [15], после ряда преобразований с учетом асимптотики модифицированных функций Бесселя большого аргумента принимает вид

$$b_{55}[\Delta_{R,1}\Delta_{2,1} + \delta_1] - b_{45}[\Delta_{R,1}\Delta_{2,2} + \delta_2] = 0, \quad (3)$$

где

$$\Delta_{2,1} = -\frac{\beta^*}{4}\zeta^4\Delta_{R,2};$$

$$\Delta_{2,2} = -\frac{1}{2}\alpha^*\beta^*\gamma_2^2;$$

$$\Delta_{R,1} = \frac{\beta^*}{4}\zeta^4 \left[ \left( 2 - \left( \frac{C}{V_S} \right)^2 \right)^2 - 4\alpha^*\beta^* + 2\frac{\alpha^*}{\zeta} \left( \frac{C}{V_S} \right)^2 \right];$$

$$\Delta_{R,2} = \left[ \left( 2 - \left( \frac{C}{V_S} \right)^2 \right)^2 - 4\alpha^*\beta^* - 2\frac{\alpha^*}{\zeta r_1} \left( \frac{C}{V_S} \right)^2 \right];$$

$$b_{45} = \frac{i\gamma_2}{2}G_1\frac{C_0}{V_S}J_0(\chi_0 r_1); \quad b_{55} = \frac{i}{\gamma_2}\frac{C_0}{V_S}\chi_0 J_1(\chi_0 r_1);$$

$$\alpha^* = \sqrt{1 - \left( \frac{C}{V_S}k \right)^2}; \quad \beta^* = \sqrt{1 - \left( \frac{C}{V_S} \right)^2};$$

$$k = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}}; \quad G_1 = \frac{\rho_0}{\rho_1}.$$

Здесь  $\delta_j$  ( $j = 1, 2$ ) представляют собой добавки в классические уравнения для поверхностных волн, содержащие произведения множителей  $\exp[-\alpha^*(1-r_1)]$  и  $\exp[-\beta^*(1-r_1)]$ .

В выбранном диапазоне частот и волновых чисел рассмотрим вначале тот поддиапазон, в котором существует поверхностная волна Стоунли. Эта область на плоскости  $(\zeta, \gamma_2)$  расположена ниже прямой  $\chi_0 = 0$ . Поскольку здесь  $\chi_0$  является мнимым, то коэффициенты  $b_{45}$  и  $b_{55}$  выражаются через модифицированные функции Бесселя. При стремлении волнового числа к бесконечности ( $\zeta \rightarrow \infty$ ), с учетом асимптотики модифицированных функций Бесселя и малости в этой частотной области слагаемых  $\delta_j$ , дисперсионное уравнение (3) вырождается в два алгебраических уравнения:

$$\Delta_{R,1} = 0,$$

$$\left[ \left( 2 - \left( \frac{C}{V_S} \right)^2 \right)^2 - 4\alpha^*\beta^* - \frac{2}{\zeta r_1}\alpha^* \left( \frac{C}{V_S} \right)^2 \right] \chi_0^* + G_1\alpha^* \left( \frac{C}{V_S} \right)^4 = 0, \quad (4)$$

где

$$\chi_0^* = \sqrt{1 - \left( \frac{C}{V_S} \right)^2 \left( \frac{V_S}{C_0} \right)^2}.$$

Первое из них совпадает с уравнением, полученным в [18] и определяющим фазовую скорость вол-

ны Рэлея на внешней поверхности полого цилиндра. В рассматриваемой области частот и волновых чисел оно не имеет корней. Второе уравнение отличается от классического уравнения Стоунли наличием в квадратных скобках третьего слагаемого и определяет фазовую скорость нормальной волны, несколько превышающую скорости волны Стоунли. Согласно этому уравнению, для стального цилиндра с  $r_1=0.3$ , заполненного водой, при  $\zeta=100$  фазовая скорость волны типа Стоунли равна  $C/V_S=0.46716$ .

Далее обратимся к области частот и волновых чисел, в которой  $\chi_0$  является вещественным, а  $\alpha$  и  $\beta$  – мнимыми. Она расположена на плоскости  $(\zeta, \gamma_2)$  в секторе между прямыми  $\chi_0=0$  и  $\beta=0$ . В том диапазоне частот и волновых чисел, где фазовая скорость нормальной волны меньше скорости волны Рэлея, величины  $\delta_j$  малы по сравнению с первыми членами, стоящими в квадратных скобках в дисперсионном уравнении (3). Тогда второе уравнение в (4) следует заменить на

$$\chi_0 J_1(\chi_0 r_1) \Delta_{R,2} - J_0(\chi_0 r_1) G_1 \alpha^* \left( \frac{C}{V_S} \right)^4 = 0. \quad (5)$$

При стремлении волнового числа к бесконечности уравнение (5) с учетом асимптотики функций Бесселя большого аргумента записывается как

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\chi_0 r_1 - \frac{\pi}{4}) &= \frac{1}{\chi_0} k_1, \\ k_1 &= G_1 \frac{\alpha^*}{\Delta_{R,2}} \left( \frac{C}{V_S} \right)^4. \end{aligned} \quad (6)$$

С увеличением волнового числа корни этого уравнения приближаются к прямой  $\chi_0=0$ . Следовательно, фазовые скорости жидкостных нормальных волн в этом секторе приближаются сверху к скорости звука в жидкости.

Качественный анализ дисперсионного уравнения цилиндра, заполненного жидкостью, не позволил выяснить, возможно ли формирование поверхностной волны типа Рэлея в составном волноводе в случае жесткого материала цилиндра. Область частот и волновых чисел, где фазовая скорость нормальной волны близка к скорости волны Рэлея, расположена в окрестности прямой  $\beta=0$ . Здесь величины  $\delta_j$  ( $j=1, 2$ ) в уравнении (3) не являются малыми. Возможность существования волны Рэлея следует выяснять, проанализировав структуру дисперсионного спектра заполненного жидкостью цилиндра.

В случае податливого материала цилиндра в диапазоне частот и волновых чисел, лежащих на плоскости  $(\zeta, \gamma_2)$  ниже прямой  $\beta=0$ , величины  $\alpha$ ,

$\beta$  и  $\chi_0$  являются мнимыми. Проведенный ранее асимптотический анализ дисперсионного уравнения остается в силе. Тогда первое уравнение (4) в этой области определяет фазовую скорость волны Рэлея на внешней поверхности цилиндра. Второе же уравнение определяет фазовую скорость волны Стоунли. Таким образом, здесь оба уравнения имеют вещественные корни. Следовательно, для цилиндра из податливого материала асимптотический анализ дисперсионного уравнения указывает на то, что в заполненном жидкостью цилиндре существуют две поверхностные волны: типа Стоунли и типа Рэлея.

## 2. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО СПЕКТРА ЗАПОЛНЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ ЦИЛИНДРА

Количественные данные и некоторый качественный анализ дисперсионных свойств нормальных волн в цилиндре с жидкостью проводился в работах [15–17, 19–21]. Здесь получены данные для заполненных жидкостью цилиндров из жесткого [15–17, 20] и податливого (мягкого) [19, 21] материалов в довольно широком диапазоне частот и волновых чисел. Исследовалось также влияние толщины стенки цилиндра на дисперсионные свойства нормальных волн в диапазоне изменения относительного внутреннего радиуса  $r_1=1-h/R$  от 0.3 до 0.99 [16, 17]. Здесь  $h$  – толщина стенки цилиндра.

### 2.1. Дисперсионный спектр заполненного жидкостью цилиндра из жесткого материала

Типичная картина, отражающая дисперсионные свойства распространяющихся волн в жестком цилиндре (зависимость безразмерной частоты  $\gamma_2$  от безразмерного волнового числа  $\zeta$ ), приведена на рис. 1. Вычисления выполнены для толстостенного стального цилиндра ( $r_1=0.3$ ), заполненного водой ( $\nu=0.29$ ,  $V_S/C_0=2.14$ ,  $\rho_0/\rho_1=0.13$ ).

Методической основой для систематизации данных расчетов является использование понятия парциальных подсистем, в качестве которых в данном случае приняты свободный упругий полый цилиндр и акустический волновод с жесткими стенками. Дисперсионные зависимости нормальных волн в парциальных подсистемах изображены на рис. 1 сплошными линиями. Первая дисперсионная кривая акустического волновода представляет собой прямую  $OC$  ( $\chi_0=0$ ). Все последующие дисперсионные кривые акустического волновода являются гиперболами. Дисперсионные кри-

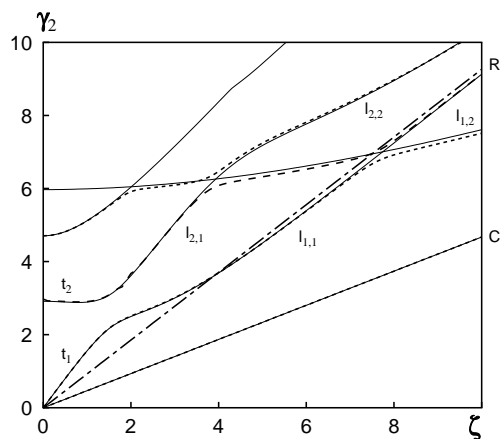


Рис. 1. Дисперсионные ветви распространяющихся волн в заполненном водой стальном цилиндре с  $r_1 = 0.3$

вые составного волновода представлены штриховыми линиями.

Согласно графику, в широкой области частот и волновых чисел дисперсионные кривые составного волновода расположены вблизи дисперсионных кривых парциальных подсистем. В этих областях кинематические и энергетические характеристики нормальных волн составного волновода практически совпадают с характеристиками нормальных волн в парциальных подсистемах. Взаимодействие упругих и жидкостных волновых полей проявляется в узких диапазонах частот и волновых чисел в окрестностях точек пересечения дисперсионных кривых для парциальных подсистем [15–17].

Естественно, что при анализе поверхностных волн, локализованных вблизи свободной поверхности и поверхности раздела, в составном волноводе следует рассматривать лишь нормальные волны, связанные с нижней нормальной волной жидкостного волновода и с двумя нижними волнами пустого упругого цилиндра. На рис. 1 им соответствуют прямая  $OC$  и сплошные кривые  $t_1$  и  $t_2$ .

В заполненном жидкостью цилиндре имеются две нормальные волны с нулевой частотой записания. Нижняя дисперсионная кривая составного волновода расположена несколько ниже прямой  $OC$  (на рис. 1 они практически совпадают). В области низких частот соответствующая фазовая скорость весьма близка к скорости звука в жидкости. Степень влияния упругих стенок на дисперсионные свойства этой волны при повышении волнового числа (частоты) зависит от толщины цилиндра. Для цилиндров с относительными внутренними радиусами в диапазоне от 0.3 до 0.8

фазовая скорость нижней волны остается близкой к скорости звука в жидкости во всем диапазоне частот [16, 17]. Следовательно, нижняя волна заполненного жидкостью толстостенного цилиндра из жесткого материала является практически бездисперсионной. Следует также отметить, что для рассматриваемого составного волновода фазовая скорость нижней волны акустического волновода составляет  $C_{\chi}/V_S = 0.46729$ , а фазовая скорость волны Стоунли при контакте стального и жидкого полупространств –  $C_{St}/V_S = 0.46715$  ( $C_{St}/C_0 = 0.99972$  – различие наблюдается только в четвертом знаке). Следовательно, можно считать, что нижняя нормальная волна составного волновода при  $\zeta \rightarrow \infty$  трансформируется в поверхностную волну Стоунли. Этот вывод согласуется с результатами, полученными при асимптотическом анализе второго из уравнений (4).

Общая структура приведенного на рис. 1 дисперсионного спектра указывает на существенные методические трудности, возникающие при изучении возможностей формирования поверхностных волн в составном волноводе и анализе их свойств. Видно, что здесь отсутствуют непрерывные дисперсионные кривые, близкие к первым двум кривым пустого цилиндра. Поскольку имеются отдельные участки разных дисперсионных ветвей, приближающиеся к парциальным кривым для пустого цилиндра, можно ожидать, что поверхностные волны будут формироваться лишь в некоторых интервалах частот и волновых чисел, соответствующих этим участкам.

Исходя из принципа непрерывности дисперсионных кривых, можно заключить, что в заполненном жидкостью цилиндре свойствами поверхностных волн типа Рэлея (штрих-пунктирная прямая  $OR$ ) могут обладать практически все нормальные волны в тех диапазонах частот, где соответствующие участки их дисперсионных кривых приближаются к первым двум дисперсионным кривым пустого цилиндра. На рис. 1 на кривой  $t_1$  показано два таких участка  $l_{1,1}$  и  $l_{1,2}$ , принадлежащих второй и третьей дисперсионным кривым составного волновода. На кривой  $t_2$  также показаны два участка  $l_{2,1}$  и  $l_{2,2}$ , принадлежащих третьей и четвертой дисперсионным кривым составного волновода. Все моды более высоких порядков также содержат участки, близкие к кривым  $t_1$  и  $t_2$ . Их границы определяются теми точками плоскости  $(\zeta, \gamma_2)$ , вблизи которых существенно проявляются эффекты упруго-жидкостного взаимодействия (точками пересечения дисперсионных кривых парциальных подсистем).

В соответствии с общей идеологией качественно-

го анализа волновых движений в составном волноводе, нормальные волны, соответствующие участкам  $l_{1,j}$ , могут формировать рэлеевскую волну вблизи внешней поверхности волновода. На внутренней поверхности рэлеевскую волну могут формировать нормальные волны, которые соответствуют участкам  $l_{2,j}$ .

Исходя из общих дисперсионных свойств нормальных волн составного волновода, можно сказать, что участки всех дисперсионных кривых, расположенных справа от ветви  $t_1$ , привязаны к дисперсионным кривым акустического волновода. Этим участкам соответствует волновое движение с предельным значением фазовой скорости, равным скорости звука в жидкости. Волновое движение в соответствующих им нормальных волнах практически полностью сосредоточено в жидкой части волновода и не характеризуется локализацией вблизи стенки цилиндра. Эти выводы также подтверждаются результатами качественного анализа дисперсионного уравнения (6).

Рассмотрим поведение дисперсионных кривых заполненного жидкостью цилиндра в области волновых чисел  $10 \leq \zeta \leq 18$ . На рис. 2, а показано поведение третьей, четвертой и пятой дисперсионных кривых составного волновода в окрестности пересечения первых двух дисперсионных кривых пустого цилиндра (кривые  $t_1$  и  $t_2$ ) с третьей дисперсионной кривой акустического волновода (кривая  $f_3$ ). Дисперсионные кривые парциальных подсистем вновь изображены сплошными линиями, а составного – штриховыми. На дисперсионных кривых составного волновода обозначены участки  $l_{1,2}$ ,  $l_{1,3}$  и  $l_{2,3}$ .

Степень взаимодействия между парциальными подсистемами можно оценить по расстоянию между дисперсионными кривыми в окрестности точки пересечения парциальных дисперсионных ветвей. Из приведенных на рис. 2, а данных видно, что степени упруго-жидкостного взаимодействия в областях пересечения третьей дисперсионной кривой акустического волновода с первой и второй дисперсионными кривыми пустого цилиндра заметно отличаются. В области пересечения парциальных дисперсионных кривых акустического волновода и второй кривой пустого цилиндра такое взаимодействие оказывается значительно более сильным. Этот результат указывает на то, что наличие жидкости влияет, прежде всего, на характер волнового движения в окрестности внутренней поверхности. Поскольку же первая дисперсионная ветвь пустого цилиндра описывает в пределе волну Рэля на внешней поверхности, можно заключить, что эта волна практически

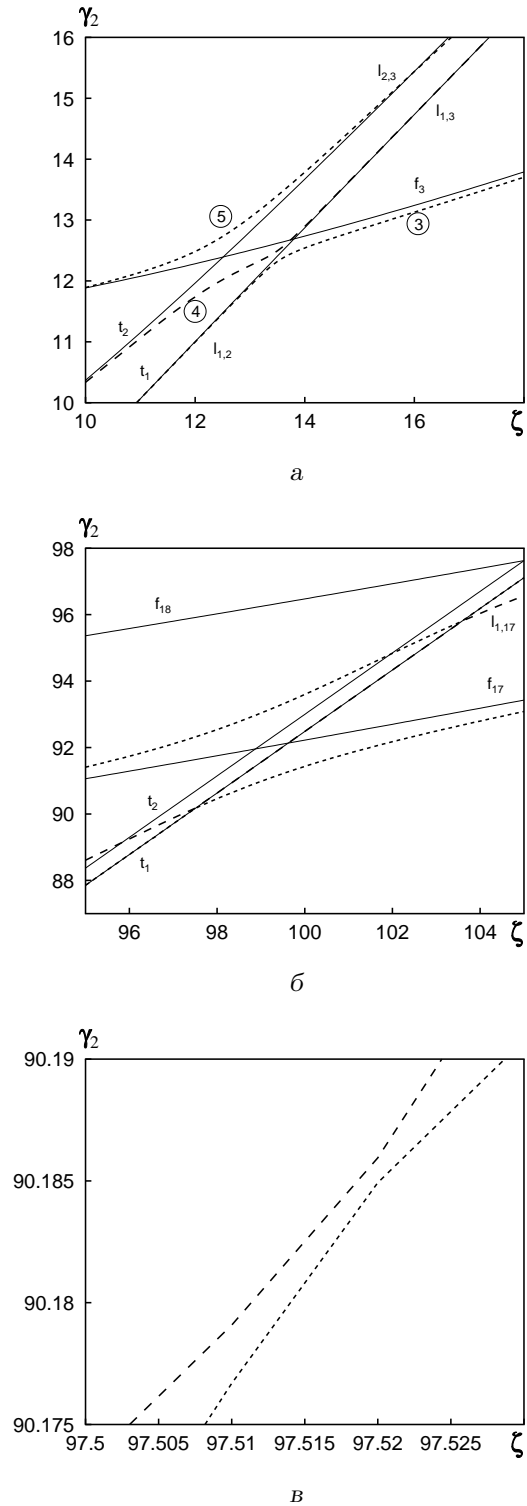


Рис. 2. Дисперсионные ветви распространяющихся волн в волноводе вода – сталь с  $r_1=0.3$  в области пересечения парциальных дисперсионных кривых: а – для третьей жидкостной и первых двух мод пустого цилиндра, б – для семнадцатой жидкостной и первых двух мод пустого цилиндра, в – в области сближения ветвей (увеличенный масштаб)

ки не чувствует наличия жидкости внутри цилиндра. Слабость взаимодействия с жидкостью выражается в том, что разрывы между отдельными участками кривой весьма малы. Поэтому можно считать, что поверхностная волна на внешней поверхности составного волновода существует практически на всех частотах.

При анализе упруго-жидкостного взаимодействия в области высоких частот следует иметь в виду, что с увеличением волнового числа первые две дисперсионные кривые пустого цилиндра сближаются (см. рис. 2, а). Обусловлено это тем, что фазовые скорости первых двух нормальных волн пустого цилиндра стремятся к скорости волны Рэлея (для первой волны – снизу, а для второй – сверху) [18]. Сближение дисперсионных кривых пустого цилиндра может оказать влияние на формирование поверхностных волн в составном волноводе и на степень связанности волновых движений парциальных подсистем.

Проведем анализ поведения дисперсионных кривых в области больших волновых чисел ( $95 \leq \zeta \leq 105$ ). На рис. 2, б представлены дисперсионные кривые составного волновода в окрестности пересечения первых двух ветвей пустого цилиндра ( $t_1$  и  $t_2$ ) с семнадцатой дисперсионной ветвью акустического волновода ( $f_{17}$ ). Здесь сохранены обозначения, принятые на рис. 2, а. Поведение дисперсионных кривых составного волновода в области их сближения ( $90.175 \leq \gamma_2 \leq 90.19$ ,  $97.5 \leq \zeta \leq 97.53$ ) в увеличенном масштабе показано на рис. 2, в. Дисперсионные кривые составного волновода в этой области вначале сближаются, а затем расходятся. Различия в степенях упруго-жидкостного взаимодействия в областях пересечения первой и второй дисперсионных кривых пустого цилиндра с кривой акустического волновода здесь более заметны, чем на рис. 2, а. Длина участка дисперсионной ветви составного волновода  $l_{1,17}$  не очень изменилась, по сравнению с длиной участка  $l_{1,3}$  на рис. 2, а. Следовательно, в области больших волновых чисел на участках типа  $l_{1,17}$  дисперсионных кривых составного волновода вблизи внешней поверхности цилиндра может формироваться поверхностная волна типа Рэлея.

В области пересечения второй дисперсионной ветви пустого цилиндра с ветвью акустического волновода дисперсионная кривая составного волновода не содержит участков типа  $l_{2,3}$  (см. рис. 2, а). Дисперсионная кривая составного волновода пересекает вторую дисперсионную ветвь пустого цилиндра и сразу же приближается к первой его дисперсионной ветви. Поэтому можно предположить, что наличие существенного

упруго-жидкостного взаимодействия на поверхности контакта жидкости и упругого тела не позволяет сформироваться поверхностной волне типа Рэлея вблизи внутренней поверхности цилиндра. Однако данный вопрос может быть решен окончательно только после анализа кинематических и энергетических характеристик волн.

## 2.2. Дисперсионный спектр заполненного жидкостью цилиндра из податливого материала

В случае заполненного жидкостью цилиндра из податливого (мягкого) материала можно ожидать, что в структуре дисперсионного спектра должны произойти качественные изменения. Поскольку для такого материала  $V_S/C_0 < 1$ , можно было бы предположить, что в области низких частот низшая нормальная волна связана со стержневым движением в упругом цилиндре. Однако на самом деле это неверно. Упруго-жидкостное взаимодействие существенно изменяет свойства жидкостной волны, так что она продолжает оставаться низшей волной. Для случая тонкостенных цилиндров, когда применима формула Кортвега, это утверждение легко проверить. Фазовая скорость низшей нормальной волны может быть определена как [22, с. 393]

$$C_1 = C_0 \left[ 1 + \frac{2R_1}{h} \frac{\rho_0 C_0^2}{E} \left/ \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{h}{2R_1} \right) \right. \right]^{-1/2}. \quad (7)$$

Формула Кортвега применима в области низких частот, в которой низшая нормальная волна является бездисперсионной (фазовая скорость волны не зависит от значения частоты и волнового числа). Здесь этой волне соответствует прямолинейный участок на дисперсионной кривой. Принимая во внимание, что

$$\frac{R_1}{h} = \frac{r_1}{1 - r_1}, \quad \frac{\rho_0 C_0^2}{E} = \frac{\rho_0}{\rho_1} \frac{C_0^2}{C_r^2}, \quad (8)$$

и что для тонкостенных цилиндров в формуле (7) выражение в круглых скобках близко к единице, формулу Кортвега можно представить следующим образом:

$$C_1 = C_r \left( \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{1 - r_1}{2r_1} \right)^{1/2} (1 + \varepsilon)^{-1/2},$$

$$\varepsilon = \left( \frac{C_r}{C_0} \right)^2 \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{1 - r_1}{2r_1}, \quad (9)$$

$$\frac{C_r}{C_0} = \sqrt{2(1 + \nu)} \frac{V_S}{C_0}.$$



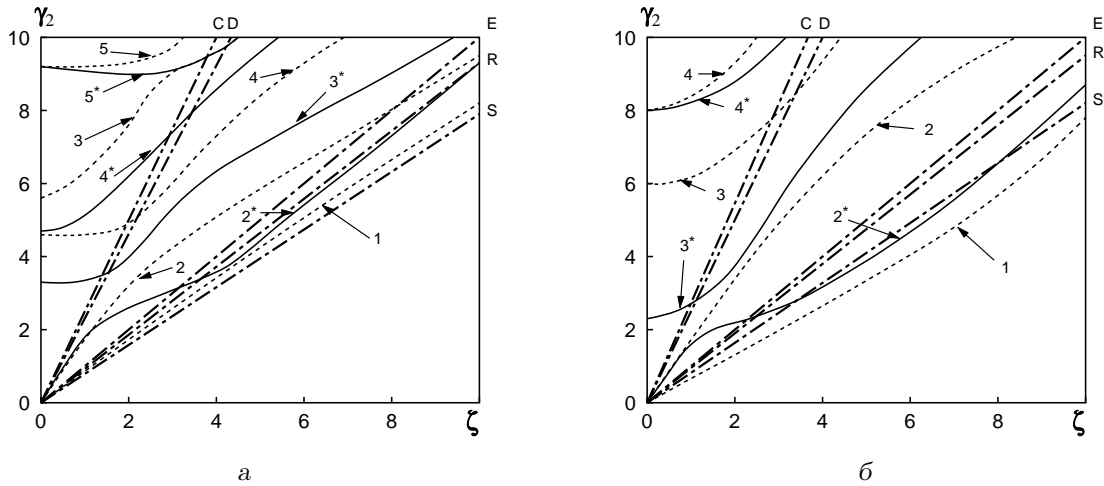


Рис. 3. Дисперсионные ветви распространяющихся волн в заполненном водой цилиндре из жесткой резины:

а -  $r_1 = 0.3$ , б -  $r_1 = 0.6$

Здесь  $C_r$  – скорость продольной волны в стержне.

Для тонкостенного цилиндра ( $r_1 \geq 0.9$ ) из податливого материала ( $\rho_0/\rho_1 \approx 1$ ) можно показать, что  $\varepsilon < 1$ . Тогда из формулы (9) следует, что

$$\frac{C_1}{C_r} \approx \sqrt{\frac{1-r_1}{2r_1}}. \quad (10)$$

Из соотношения (10) вытекает, что для тонкостенных цилиндров фазовая скорость волны Кортвега всегда меньше скорости стержневой волны. При анализе дисперсионных свойств составных цилиндров показано, что и для заполненных жидкостью толстостенных цилиндров из податливых материалов в низкочастотной области фазовая скорость нижней волны также меньше фазовой скорости продольной волны в стержне [19].

Таким образом, низшая нормальная волна связана с волновым движением в жидкости, а вторая нормальная волна – с волновым движением в упругом цилиндре. Однако следует иметь в виду, что разделение на жидкостную и упругую волну в этом случае имеет смысл только для очень низких частот. При повышении частоты эффекты упруго-жидкостного взаимодействия становятся существенными и проявляются на всех частотах.

В работе [19] проведен количественный и качественный анализ дисперсионных, кинематических и энергетических характеристик нормальных волн в заполненных жидкостью толстостенных ( $r_1 = 0.3$ ) и тонкостенных ( $r_1 = 0.9$ ) цилиндрах для трех случаев податливых материалов. На

рис. 3, а и б представлены полученные в этой статье действительные ветви дисперсионных кривых для заполненных водой цилиндров из жесткой резины ( $\nu = 0.4$ ,  $V_S/C_0 = 0.395$ ,  $\rho_0/\rho_1 = 0.909$ ) для случаев  $r_1 = 0.3$  и  $r_1 = 0.6$  соответственно.

Сплошными линиями здесь вновь изображены дисперсионные кривые свободного пустого упругого цилиндра. Ненулевые частоты запираания дисперсионных кривых акустического волновода лежат выше рассматриваемого диапазона частот. Так, частота запираания второй дисперсионной кривой акустического волновода с жесткой стенкой ( $r_1 = 0.3$ ) равна  $\gamma_{f2}^* = 32.21$ , а для первой дисперсионной кривой акустического волновода с мягкой стенкой –  $\gamma_{f2}^* = 20.31$ . Для акустического волновода с  $r_1 = 0.6$  значения частот запираания в два раза меньше.

Ясно, что структуры дисперсионных спектров заполненных жидкостью цилиндров для случаев жесткого (рис. 1) и податливого (рис. 3) материалов существенно отличаются. Для заполненного водой цилиндра из жесткой резины прямая  $\chi_0 = 0$  ( $OC$ ) на плоскости  $(\zeta, \gamma_2)$  лежит выше прямых  $\beta = 0$  ( $OE$ ) и  $\alpha = 0$  ( $OD$ ). Прямая  $OS$  соответствует волне Стоунли, а  $OR$  – волне Рэлея. Ниже прямой  $OC$  расположены парциальные дисперсионные кривые пустого цилиндра, а выше – дисперсионные кривые акустического волновода. Пересечение дисперсионных ветвей парциальных подсистем происходит в области частот  $\gamma_2 > \gamma_{f2}^*$  в секторе, расположенном между частотной осью и прямой  $OC$ . Заметим, что в случае жесткого материала цилиндра прямая  $OC$  лежит значительно ниже

прямой  $OE$ . Таким образом, для цилиндра из податливого материала упруго-жидкостное взаимодействие не приводит к разбиению на отдельные участки тех дисперсионных кривых, которые потенциально связаны с модами, порождающими в высокочастотном пределе поверхностные волны.

Дисперсионные свойства низшей нормальной волны составного волновода (волны Кортвега) описываются кривой, лежащей значительно ниже прямой  $OC$  ( $C_\chi/V_S = 2.5342$ ). При контакте полупространств жесткая резина – вода фазовая скорость волны Стоунли составляет  $C_{St}/C_0 = 0.32185$ . На рис. 3, а первая дисперсионная кривая составного волновода расположена несколько выше прямой  $OS$ . Естественно полагать, что фазовая скорость его низшей нормальной волны с увеличением волнового числа стремится к скорости волны Стоунли. Эта гипотеза хорошо согласуется с обсужденными выше результатами асимптотического анализа второго дисперсионного уравнения из (4) для случая податливого материала цилиндра.

Вторая дисперсионная кривая составного волновода также лежит ниже прямой  $OC$ . С увеличением волнового числа (частоты) она вначале (при  $2 \leq \zeta \leq 6$ ) удаляется, а затем приближается сверху к первой дисперсионной ветви пустого цилиндра. Естественно, скорость сближения дисперсионных кривых с прямой  $OR$  оказывается большей для толстостенного цилиндра. Следовательно, фазовая скорость второй нормальной волны составного волновода с увеличением волнового числа будет стремиться к скорости волны Рэлея. Этот вывод также согласуется с результатами асимптотического анализа первого из уравнений (4). Как будет показано ниже, движение в этой волне действительно локализуется вблизи внешней свободной поверхности цилиндра.

Чтобы облегчить анализ нормальных волн более высоких порядков, на рис. 3 нумерация соответствующих им дисперсионных кривых в пустом цилиндре проведена с учетом связи с волнами составного волновода. Дисперсионным ветвям пустого цилиндра присвоены те же номера, что и в составном волноводе, но дополненные индексом \*. Заметим, что для пустого цилиндра нет волны, аналогичной первой нормальной волне в составном волноводе, которая бы в пределе трансформировалась в поверхностную волну Стоунли. Второй же нормальной волне в составном волноводе отвечает первая волна в пустом цилиндре (кривые 2 и 2\* соответственно).

При нумерации последующих дисперсионных кривых необходимо прежде всего обратить внимание на то, что и в пустом цилиндре, и в состав-

ном волноводе нормальным волнам на частотах запираания соответствуют радиальный (толщинный) или продольно-сдвиговый типы движения. В случае податливого материала цилиндра упруго-жидкостное взаимодействие существенно повышает частоты запираания волн, связанных с радиальными волновыми движениями. Для них взаимодействие приводит также к повышению фазовых скоростей нормальных волн составного волновода (наличие жидкости сказывается как дополнительная упругость в системе). Например, нормальным волнам с радиальным типом движения на частоте запираания соответствуют дисперсионные кривые 4 и 4\* на рис. 3, а, а также кривые 3 и 3\* на рис. 3, б. В то же время, частоты запираания волн, связанных с продольно-сдвиговыми движениями, не изменяются. Действительно, они определяются из уравнения [15]

$$Y_1(\gamma_2)J_1(\gamma_2 r_1) - J_1(\gamma_2)Y_1(\gamma_2 r_1) = 0, \quad (11)$$

корни которого зависят только от геометрического параметра – относительного внутреннего радиуса  $r_1$ , и являются общими для пустого и заполненного жидкостью цилиндров. Нормальным волнам с указанным типом движения на частотах запираания соответствуют пары дисперсионных кривых 3, 3\* и 5, 5\* на рис. 3, а, а также 4, 4\* на рис. 3, б.

Отметим, что эти нормальные волны имеют одинаковые типы движений не только на частоте запираания, но и в области малых значений волновых чисел. Так, для  $\zeta = 0.2$  отношение максимальных радиальных смещений к осевым  $u_{rz} = |U_{r,\max}|/|U_{z,\max}|$  для нормальной волны 4 (радиальный тип движений) равно 7.257, а для волны 4\* – 8.177. В то же время, для волны 3 (продольно-сдвиговый тип движений)  $u_{rz} = 0.0987$ , а для 3\* – 0.1049. При  $\zeta = 0.5$  нормальной волне 4 соответствует  $u_{rz} = 3.492$ , а 4\* – 3.358. При этом, для волны 3  $u_{rz} = 0.2217$ , для 3\* – 0.2465.

В случае волновода с мягким цилиндром упруго-жидкостное взаимодействие имеет ряд интересных особенностей. Модифицированная взаимодействием с жидкостью вторая нормальная волна пустого цилиндра имеет фазовую скорость, превосходящую скорость модифицированной третьей нормальной волны волновода. Об этом свидетельствует то, что на рис. 3, а кривая 4\* (радиальный тип движения) лежит ниже кривой 3\* (продольно-сдвиговый тип). Подчеркнем еще раз, что кривые 3\* и 4\* на рис. 3, а и б соответствуют нормальным волнам с разными типами движений на частотах запираания. Перемена мест частот запираания радиальной и продольно-сдвиговой волн при изменении относительного внутреннего радиуса  $r_1$  для

Табл. 1. Дисперсионные характеристики низших нормальных волн заполненного жидкостью цилиндра из податливого материала (вода – жесткая резина,  $r_1 = 0.3$ )

N	дисп. кр. 1		дисп. кр. 2		дисп. кр. 4		дисп. кр. 3	
	$\gamma_2$	$C/C_{St}$	$\gamma_2$	$C/C_R$	$\gamma_2$	$C/V_S$	$\gamma_2$	$C/V_S$
10	8.45083	1.03612	9.61683	1.02067	12.68254	1.26825	15.54342	1.55434
30	24.70547	1.00968	28.21410	0.99816	30.61566	1.02052	32.12140	1.07071
40	32.83561	1.00646	37.63042	0.99847	40.40737	1.01084	41.47711	1.03693
50	40.97332	1.00471	47.04919	0.99871	50.30132	1.00603	51.11466	1.02229
100	81.7156	1.00188	94.15298	0.99929	100.1287	1.00129	100.4840	1.00484

пустого стального цилиндра исследована в [23]. Для цилиндра из жесткой резины частота запираания радиальной моды становится меньше частоты запираания продольно-сдвиговой моды при  $r_1 \approx 0.185$ , а для составного волновода – при  $r_1 \approx 0.435$ . Именно этим обстоятельством и объясняется качественно разное расположение кривых  $3^*$ ,  $4^*$  на рис. 3, а и б.

Значительные отличия между дисперсионными свойствами нормальных волн в составных упруго-жидкостных волноводах из жестких и податливых материалов обнаруживаются при анализе их асимптотического поведения. Для жесткого цилиндра фазовые скорости всех нормальных волн, кроме первой, в качестве предельного значения имеют скорость звука в жидкости. В случае же податливого цилиндра скорость низшей нормальной волны стремится к скорости волны Стоунли, а второй – к скорости волны Рэля. Все значения фазовых скоростей волн более высоких порядков в пределе выходят на скорость волны сдвига в материале цилиндра.

Представление о характере стремления фазовых скоростей к предельным значениям дают данные табл. 1. Здесь для ряда значений волновых чисел приведены частоты и относительные фазовые скорости первых четырех нормальных волн составного волновода вода – жесткая резина с  $r_1 = 0.3$ . Видно, что с увеличением волнового числа фазовая скорость первой нормальной волны составного волновода приближается к скорости волны Стоунли сверху ( $C_{St}/V_S = 0.815624$ ), а второй – к скорости волны Рэля снизу ( $C_R/V_S = 0.9422$ ). Фазовые скорости третьей и четвертой нормальных волн стремятся сверху к скорости волны сдвига материала цилиндра. Следовательно, в области больших волновых чисел жидкость не оказывает существенного влияния на свойства нормальных волн, соответствующих указанным дисперсионным кривым.

Данные о характере упруго-жидкостного вза-

имодействия в случае жесткого цилиндра (см. рис. 1) показывают, что вблизи точек пересечения дисперсионных ветвей парциальных подсистем наличие жидкости может проявляться в виде как присоединенной массы, так и присоединенной упругости.

Если материал цилиндра является податливым, характер упруго-жидкостного взаимодействия будет существенно иным. Из рис. 3, а можно заключить, что наличие жидкости влияет на нормальные волны пустого цилиндра с номерами  $2^*$ ,  $4^*$  и  $5^*$  как присоединенная упругость. В этом случае упруго-жидкостное взаимодействие приводит к существенному повышению фазовых скоростей соответствующих нормальных волн составного волновода.

В то же время, для нормальной волны пустого цилиндра, которой соответствует кривая  $3^*$ , в области малых значений волновых чисел жидкость работает как присоединенная масса. Именно поэтому соответствующая ей дисперсионная ветвь  $3$  для составного волновода расположена ниже, чем для пустого цилиндра. Отметим, что этому факту трудно дать простое физическое объяснение. Общая картина усложняется еще и тем, что в случае относительно тонкого цилиндра во всем рассмотренном диапазоне частот влияние жидкости сказывается как присоединенная упругость (см. рис. 3, б).

Сравнительный анализ данных для цилиндров из жесткого и податливого материалов указывает на еще один аспект в физике упруго-жидкостного взаимодействия. Для первой нормальной волны в пустом упругом цилиндре из жесткого или податливого материалов взаимодействие не влияет на предельное значение фазовой скорости нормальной волны составного волновода, которое совпадает со скоростью волны Рэля (кривые  $2^*$  и 2). Для второй нормальной волны в пустом цилиндре из податливого материала (кривые  $4^*$  на рис. 3, а и  $3^*$  на рис. 3, б) это не так. Предельное значение ее фа-

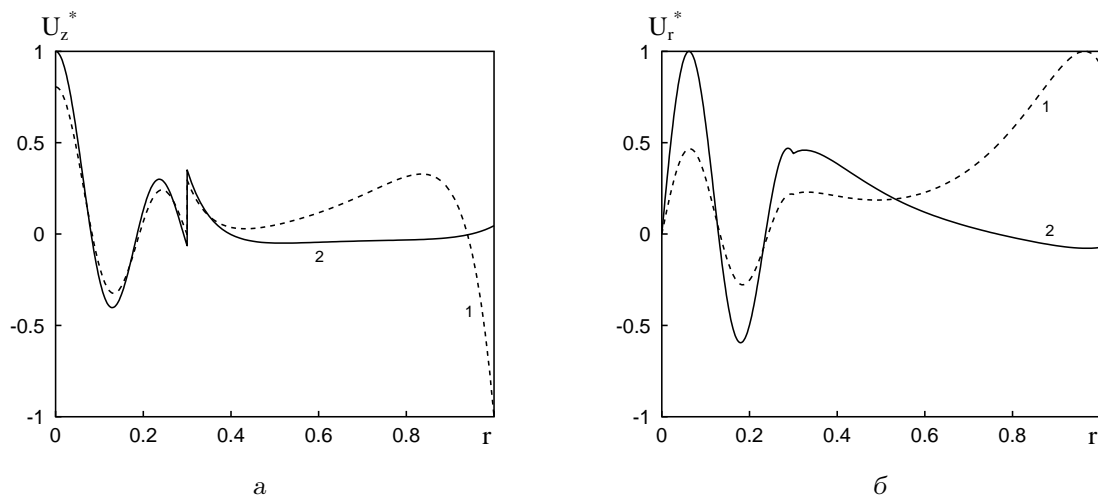


Рис. 4. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений в нормальных волнах, соответствующих дисперсионным кривым на рис. 2, а: 1 – точка  $\zeta = 17$ ,  $\gamma_2 = 15.66064$  на участке  $l_{1,3}$ ; 2 – точка  $\zeta = 16.5$ ,  $\gamma_2 = 15.85554$  на участке  $l_{2,3}$

зовой скорости стремится к скорости волны Рэлея сверху. Однако в результате упруго-жидкостного взаимодействия предельная скорость соответствующих нормальных волн составного волновода в пределе переходит уже в скорость волны сдвига.

### 3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СОСТАВНЫХ ВОЛНОВОДАХ

Формально процедура определения компонент вектора смещений весьма проста. Она состоит в том, что для заданных значений  $\gamma_2$  и  $\zeta$  произвольные постоянные  $A_i$ ,  $B_i$  (где  $i = 1, 2$ ) и  $D_0$  в выражениях (1) и (2) вычисляются с точностью до модуля одной из этих постоянных, принимаемого за единицу. Для этого используется система уравнений, полученная после удовлетворения граничных условий. Естественно, при этом следует исключить одно из этих уравнений. Заметим, что при определении кинематических характеристик всех нормальных волн, за исключением поверхностных, не имеет значения, какое из уравнений будет опущено.

При определении же кинематических характеристик поверхностных волн выбор этого уравнения оказывается существенным. По аналогии с результатами работы [18], при определении кинематических характеристик поверхностной волны Стоунли, локализованной вблизи внутренней поверхности цилиндра, необходимо исключить одно из уравнений, полученных при удовлетворении

граничных условий на этой поверхности. Аналогично, при определении кинематических характеристик поверхностной волны Рэлея исключаем одно из уравнений, полученных при определении граничных условий на внешней поверхности цилиндра, в окрестности которой локализуется эта волна. Если при фактической реализации указанной процедуры не придерживаться данной методики, то в силу неустойчивости вычислительной процедуры и влияния ошибки вычисления можно получить “парадоксальную” ситуацию – с увеличением волнового числа найденные поверхностные волны будут “перемещаться” от одной поверхности цилиндра к другой.

#### 3.1. Кинематические и энергетические характеристики поверхностных волн в заполненном жидкостью цилиндре из жесткого материала

Рассмотрим кинематические характеристики нормальных волн, соответствующих представленным на рис. 2, а и б дисперсионным кривым. На приведенных ниже графиках показано изменение по радиусу волновода нормированных амплитуд осевых и радиальных смещений  $U_i^*(r) = |U_i(r)|/|U_{i\max}|$  ( $i = r, z$ ) для заполненного водой стального цилиндра с  $r_1 = 0.3$ .

На рис. 4, а и б приведены распределения по радиусу волновода нормированных амплитуд смещений  $U_z^*(r)$  и  $U_r^*(r)$  для нормальных волн, соответствующих двум точкам 1 и 2 на дисперсионных кривых, представленных на рис. 2, а. Кривые 1 (штриховые) соответствуют точке 1 с координатами  $\zeta = 17$ ,  $\gamma_2 = 15.66063$  на участке  $l_{1,3}$ , а кривые 2

(сплошные) – точке 2 с координатами  $\zeta = 16.5$ ,  $\gamma_2 = 15.85554$  на участке  $l_{2,3}$ . В этой области волновых чисел и частот дисперсионные кривые составного волновода практически точно ложатся на соответствующие участки дисперсионных кривых пустого цилиндра. При этом обе кривые описывают изменение фазовых скоростей волн, трансформирующихся с ростом частоты в поверхностные волны Рэлея. Нижняя кривая соответствует этой волне на внешней поверхности цилиндра, а верхняя – на внутренней.

Из рис. 4 видно, что распределение смещений для точки 1 (штриховые линии) качественно соответствует распределению смещений в волне Рэлея вблизи внешней поверхности. Однако смещения в жидкости остаются значительными. Для точки 2 (сплошные кривые) кинематическая картина выглядит более сложно. Здесь можно говорить о локализации волнового движения в цилиндре вблизи внутренней поверхности. Однако здесь амплитуды смещений в жидкости превосходят по величине смещения в упругом цилиндре. В связи с этим может возникнуть ложное впечатление о значительном влиянии упруго-жидкостного взаимодействия при формировании этих двух мод составного волновода. Однако более правильное представление о степени взаимодействия дают данные об энергетических характеристиках мод. Расчеты потоков энергии показывают, что в нормальной волне волновода, локализованной вблизи внутренней поверхности цилиндра (кривая 2), жидкость переносит лишь около 2.6 % общего потока энергии. Волна, локализованная вблизи внешней поверхности цилиндра (кривая 1), практически не взаимодействует с жидкостью. На этой моде жидкость переносит порядка 0.05 % полной энергии нормальной волны.

На рис. 5 показано распределение по радиальной координате нормированных амплитуд осевых и радиальных смещений связанной нормальной волны, соответствующее точкам дисперсионных кривых, указанным на рис. 2, б. В областях больших волновых чисел и частот, соответствующих этому графику, поверхностные волны уже должны быть сформированы. Кривые 1 (штриховые) соответствуют точке с координатами  $\zeta = 102$ ,  $\gamma_2 = 94.33346$  на участке  $l_{1,17}$ . Они представляют собой волны типа Рэлея, локализованные вблизи внешней поверхности цилиндра. Кривые 2 (сплошные) соответствуют точке пересечения второй дисперсионной кривой пустого цилиндра с дисперсионной кривой составного волновода ( $\zeta = 102$ ,  $\gamma_2 = 94.83586$ ). Они отображают кинематические характеристики связанной нормальной волны, харак-

тер распределения смещений в которой соответствует сильному упруго-жидкостному взаимодействию. В жидкости распределение смещений соответствует парциальной семнадцатой дисперсионной кривой акустического волновода, а в цилиндре – рэлеевской волне вблизи его внутренней поверхности. Амплитуда смещений принимает максимальное значение в жидкости. Значения смещений на внутренней поверхности цилиндра значительно меньше:  $U_z^*(r=0.3) = 0.13$ ,  $U_r^*(r=0.3) = 0.19$ . Энергетические характеристики рассмотренных волн будут обсуждаться ниже (см. табл. 3).

В табл. 2 для заданных значений волновых чисел приведены значения частот и относительных фазовых скоростей  $C/V_S$ , соответствующих поверхностным волнам типа Стоунли и Рэлея (вблизи внешней поверхности цилиндра) для заполненного водой стального цилиндра с  $r_1 = 0.3$  и  $r_1 = 0.9$ . Видно, что фазовая скорость низшей волны приближается снизу к скорости волны Стоунли  $C_{St}/V_S = 0.467151$  (контакт соответствующих полупространств). Дисперсионные характеристики второй нормальной волны составного волновода и первой волны пустого цилиндра при значении волнового числа  $\zeta = 40$  уже совпадают [18]. Фазовая скорость второй нормальной волны составного волновода с увеличением волнового числа стремится снизу к скорости волны Рэлея  $C_R/V_S = 0.925843$ . Приведенные значения волновых чисел определяют на дисперсионных кривых составного волновода точки, принадлежащие участкам  $l_{1,7}$  ( $\zeta = 40$ ) и  $l_{1,17}$  ( $\zeta = 100$ ).

Для данных табл. 2 на рис. 6 дано распределение по радиальной координате нормированных амплитуд осевых и радиальных смещений низшей нормальной волны для составного волновода с  $r_1 = 0.3$ . Кривые 1, 2 и 3 соответствуют волновым числам 10, 40 и 100. Представленные результаты показывают трансформацию низшей нормальной волны в поверхностную волну типа Стоунли с ростом волнового числа. Естественно, при уменьшении длины волны возрастает неравномерность распределения смещений по радиусу в жидком ядре. Осевые смещения в упругом цилиндре практически отсутствуют, что указывает на малость потока энергии в упругой составляющей, по сравнению с потоком в жидкости. Такая ситуация характерна для волны Стоунли в случае пары жесткое полупространство – жидкость. Отсутствие существенного упруго-жидкостного взаимодействия подтверждается также очень высокой степенью локализации радиальных смещений в упругом цилиндре (см. рис. 6, б).

В работе [16] показано, что при фиксированном

Табл 2. Дисперсионные характеристики низших нормальных волн  
заполненного водой стального цилиндра

$r_1$	$\zeta$	$\gamma_2^{(1)}$	$C/V_S$	$r_1$	$\zeta$	$\gamma_2^{(2)}$	$C/V_S$
0.3	10	4.643366	0.464336	0.3	10	9.131664	0.913167
0.3	30	13.981700	0.466057	0.3	30	27.687625	0.922921
0.3	40	18.653097	0.466327	0.3	40	36.940509	0.923513
0.3	100	46.684334	0.466843	0.3	100	92.481889	0.924819
0.9	50	23.347694	0.466954	0.9	50	40.387689	0.807754
0.9	100	46.707068	0.467071	0.9	190	175.9558	0.925818
0.9	150	70.065971	0.467106	0.9	250	231.49612	0.925980

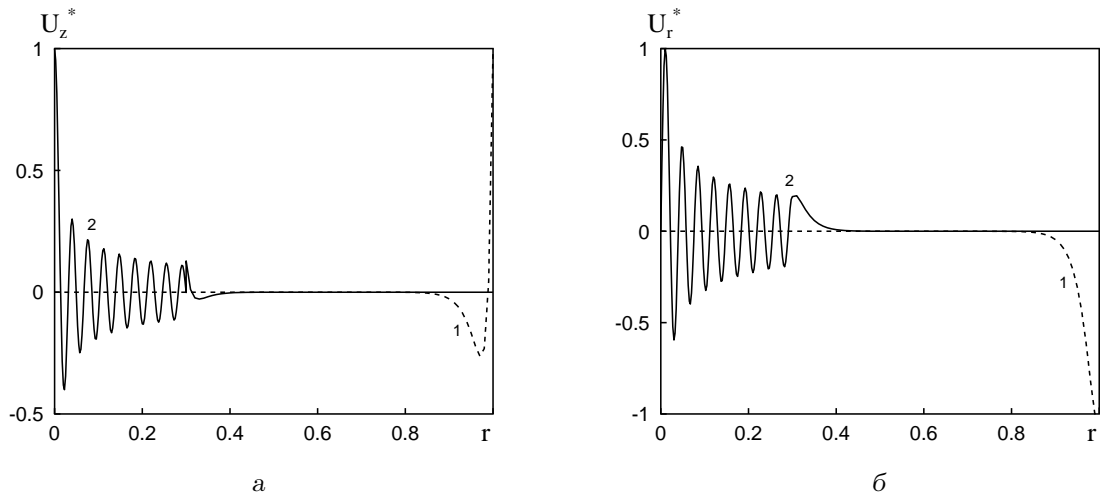


Рис. 5. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений  
в нормальных волнах, соответствующих дисперсионным кривым на рис. 2, б:  
1 – точка  $\zeta = 102, \gamma_2 = 94.33346$  на участке  $l_{1,17}$ ; 2 – точка  $\zeta = 102, \gamma_2 = 94.83586$

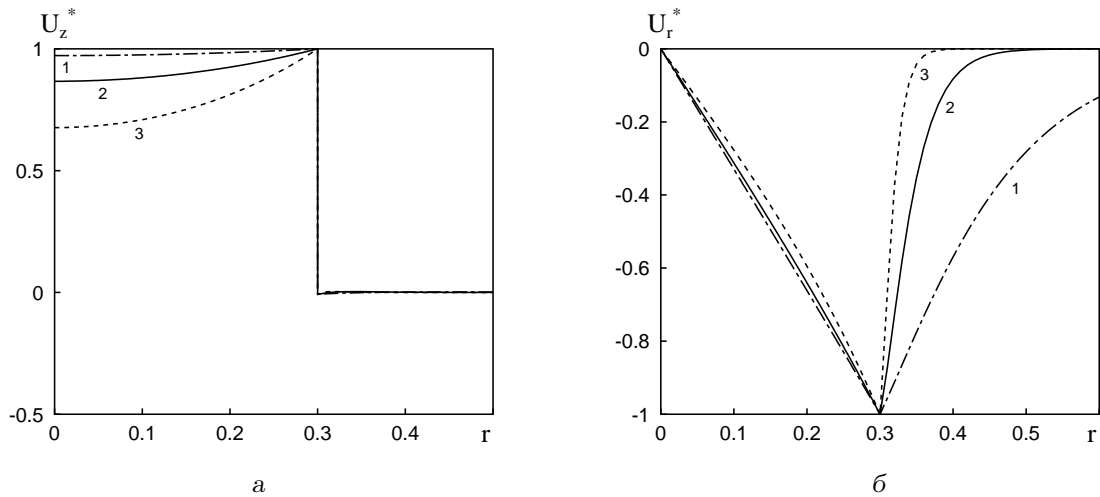


Рис. 6. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений  
в первой нормальной волне волновода вода – сталь с  $r_1 = 0.3$ :  
1 –  $\zeta = 10, 2 - \zeta = 40, 3 - \zeta = 100$

Табл. 3. Относительное распределение осевой энергии по поперечному сечению составляющих волновода вода – сталь с  $r_1 = 0.3$ 

$N$	$\zeta$	$\gamma_2$	$C/V_S$	$W_{z0}$	$W_{z1}$	$W_z$	$W_{z0}/W_z$	$u_{zr}$
1	40	18.65310	0.46633	1.736	0.0052	1.741	0.9970	43.49
2	100	46.68433	0.46684	14.37	0.0231	14.39	0.9984	41.92
3	40	36.94051	0.92351	0.09455	$0.2714 \cdot 10^7$	$0.2714 \cdot 10^7$	$0.348 \cdot 10^{-7}$	0.609
4	100	92.48189	0.92482	0.2313	$0.6472 \cdot 10^{20}$	$0.6472 \cdot 10^{20}$	$0.357 \cdot 10^{-20}$	0.631
5	16.5	15.85554	0.96095	0.0366	1.366	1.403	0.2612	0.956
6	17	15.66064	0.92121	0.03926	71.26	71.30	$0.55 \cdot 10^{-3}$	0.585
7	102	94.33346	0.92484	0.2365	$0.1077 \cdot 10^{21}$	$0.1077 \cdot 10^{21}$	$0.22 \cdot 10^{-20}$	0.633
8	102	94.83586	0.92977	0.2346	1.229	1.463	0.1603	1.01
9	100	93.59815	0.93598	0.2315	0.955	1.187	0.1951	0.994

соотношении физических характеристик материала цилиндра и жидкости, упруго-жидкостное взаимодействие проявляется более сильно для тонкостенных цилиндров. При анализе свойств поверхностных волн уменьшение толщины цилиндра менее существенно. Как показывают расчеты, оно приводит лишь к увеличению значений волновых чисел, при которых нормальные волны составного волновода трансформируются в поверхностные.

Проведем анализ энергетических характеристик поверхностных волн составного волновода. В табл. 3 приведены данные о распределении среднего за период значения потока мощности по поперечному сечению жидкого ядра  $W_{z0}$  и упругого цилиндра  $W_{z1}$  по поперечному сечению композитного волновода, а также отношении  $W_0^* = W_{z0}/W_z$  ( $W_z = W_{z0} + W_{z1}$ ), определяющем ту часть мощности, которая переносится жидким ядром. Соотношения для определения этих величин содержатся, например, в [16]. В таблице также приведено отношение продольных и поперечных смещений  $u_{zr} = |U_{z \max}|/|U_{r \max}|$ .

Согласно табл. 3, волна типа Стоунли характеризуется тем, что почти вся энергия здесь переносится жидкостью (первая и вторая строки), а отношение продольных смещений к поперечным составляет  $u_{zr} = 41.92$  ( $\zeta = 100$ ). Напомним, что при контакте двух полупространств для пары сталь – вода это отношение равно 40.9 [24]. Для волны типа Рэлея, локализованной вблизи внешней поверхности цилиндра, характерно то, что упругий цилиндр переносит почти всю энергию (третья, четвертая, шестая и седьмая строки), а  $u_{zr} = 0.631$  при  $\zeta = 100$ . Для волны Рэлея на поверхности упругого полупространства из стали это отношение равно 0.661, а на внешней свободной поверхности пустого стального цилиндра – 0.5917 [18]. При контакте упругого слоя (сталь)

и жидкого полупространства (вода) для волны Рэлея на свободной поверхности слоя получаем  $u_{zr} = 0.6378$  [24].

Таким образом, анализ энергетических и кинематических характеристик этих волн показывает, что вблизи внешней поверхности заполненного жидкостью цилиндра формируется поверхностная волна типа Рэлея. Эта волна формируется только в определенных диапазонах частот и волновых чисел. В этих диапазонах на дисперсионных кривых высоких порядков расположены участки типа  $l_{1,j}$ , прилегающие к первой дисперсионной кривой пустого цилиндра. Соответственно имеются диапазоны частот и волновых чисел, в которых волна типа Рэлея не может быть сформирована. Они расположены вблизи точек пересечения парциальных подсистем и являются весьма узкими. Поэтому можно считать, что в составном волноводе поверхностная волна типа Рэлея формируется вблизи внешней поверхности цилиндра практически во всей высокочастотной области (области больших волновых чисел).

Анализ энергетических характеристик нормальных волн, соответствующих участкам дисперсионных кривых  $l_{2j}$  (расположенных вблизи второй дисперсионной кривой пустого цилиндра), показывает, что с увеличением волнового числа доля энергии, уносимой жидкостью, увеличивается. Как указывалось выше, для рис. 4 ( $\zeta = 16.5$ , кривая 2) жидкость переносит только 2.6 % энергии нормальной волны (пятая строка в табл. 3), а для рис. 5 ( $\zeta = 102$ , кривая 2) – 16 % (восьмая строка). Следовательно, с увеличением волнового числа упруго-жидкостное взаимодействие в этих нормальных волнах усиливается.

Результаты анализа кинематических и энергетических характеристик нормальных волн, соответствующих точкам на дисперсионных кри-

вых составного волновода, расположенных вблизи второй дисперсионной кривой пустого цилиндра, позволяют считать их волнами с существенно выраженными эффектами упруго-жидкостного взаимодействия (пятая, восьмая и девятая строки). Это подтверждается приведенными выше данными о соответствующих энергетических характеристиках.

### 3.2. Кинематические и энергетические характеристики поверхностных волн в заполненном жидкостью цилиндре из податливого материала

В [19] кинематические и энергетические характеристики нормальных волн были исследованы в тех областях изменения безразмерных частот и волновых чисел, где поверхностные волны еще не сформировались. В табл. 1 приведены дисперсионные характеристики первых четырех нормальных волн для заполненного водой цилиндра из жесткой резины с  $r_1 = 0.3$ . В табл. 4 даны дисперсионные характеристики первых двух нормальных волн для составного волновода вода – жесткая резина с  $r_1 = 0.9$ . Данные табл. 4 показывают, что в случае тонкостенного цилиндра фазовая скорость первой нормальной волны с увеличением волнового числа стремится к скорости волны Стоунли снизу. Фазовая скорость второй нормальной волны стремится к скорости волны Рэлея сверху.

Кинематические характеристики поверхностных волн, соответствующих табл. 1, приведены на рис. 7, а табл. 4 – на рис. 8. На рис. 7 кривые 1 и 2 соответствуют поверхностной волне типа Стоунли, а кривые 3 и 4 – поверхностной волне типа Рэлея для значений волновых чисел  $\zeta = 50$  и 100. На рис. 8 кривые 1 и 2 соответствуют поверхностным волнам типа Стоунли и Рэлея для  $\zeta = 100$ . Уменьшение жесткости материала цилиндра вызывает существенное изменение характера волновых возмущений вблизи поверхности контакта составляющих волновода для волны типа Стоунли. Волновые возмущения вблизи поверхности контакта в равной степени охватывают жидкую и упругую составляющие волновода. Для волны типа Рэлея уменьшение жесткости материала цилиндра не оказывает заметного влияния на характер распределения смещений вблизи внешней поверхности составного волновода.

Энергетические характеристики поверхностных волн для данной пары материалов волновода представлены в табл. 5. Как и в табл. 3, здесь приведены сведения о распределении среднего за период

потока мощности по поперечному сечению волновода и его составляющих для данных табл. 1 и 4, а также значение отношения продольных и поперечных смещений  $u_{zr}$ . Видно, что уменьшение жесткости материала цилиндра вызвало существенные изменения в распределении потока энергии между жидкой и упругой составляющими волновода для волны типа Стоунли. Для нее в составном волноводе с  $r_1 = 0.3$  жидкость переносит только 18 % энергии при  $\zeta = 50$  и 17.4 % при  $\zeta = 100$ . Напомним, что в случае жесткого материала цилиндра жидкость переносит почти всю энергию поверхностной волны типа Стоунли.

Для этой волны также существенно изменилось отношение продольных и поперечных компонент вектора смещений ( $u_{zr} = 1.076$  для  $\zeta = 100$ ,  $r_1 = 0.3$ ). Отметим, что при контакте двух полупространств из этих же материалов отношение амплитуд продольных и поперечных компонент вектора смещений для волны Стоунли равно 1.04 [24]. Для волны типа Рэлея в составном волноводе имеем  $u_{zr} = 0.537$  для  $\zeta = 100$ . При контакте же соответствующих упругого слоя и жидкого полупространства отношение продольных смещений к поперечным для волны Рэлея на свободной поверхности упругого слоя равно 0.541 [24].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучены поверхностные волны в заполненном жидкостью упругом цилиндре. Рассмотрены два типа упругих материалов: жесткие и податливые. Проанализирован характер трансформации волнового движения в поверхностные волны с ростом волнового числа (частоты) в зависимости от геометрического параметра и физических свойств упругой составляющей волновода. Анализ проведен на основе данных о свойствах поверхностных волн в пустом цилиндре и свойствах поверхностной волны на поверхности раздела полупространств жидкость – упругое тело.

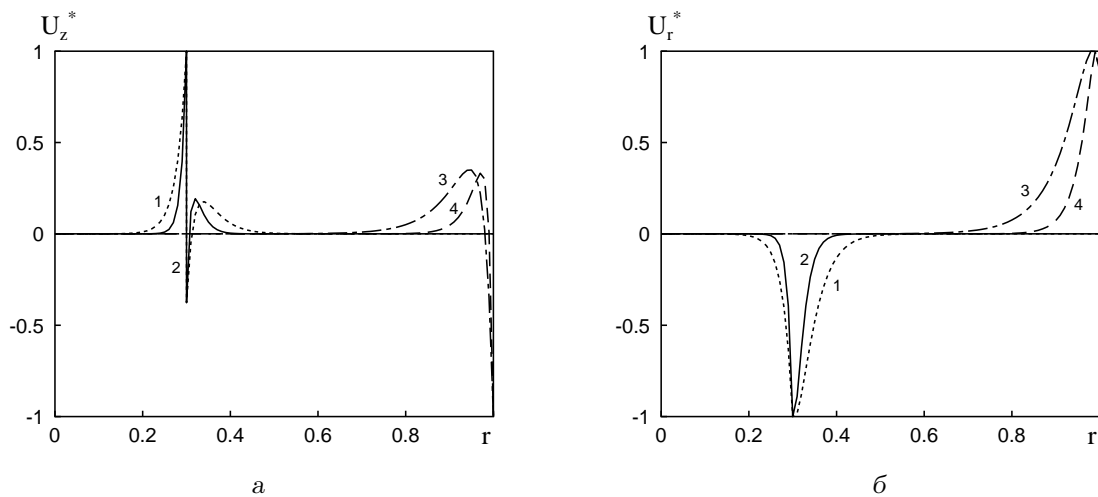
Полученные данные о кинематических и энергетических характеристиках нормальных волн в составных волноводах иллюстрируют специфические особенности локализации движений в таких структурах при относительно больших значениях частоты, обусловленные эффектом упруго-жидкостного взаимодействия, усложняющим дисперсионные свойства нормальных волн и их кинематические характеристики.

Прежде всего, эффект взаимодействия существенно изменяет асимптотические свойства такого параметра как фазовые скорости волн. В случае жесткого материала упругого цилиндра все

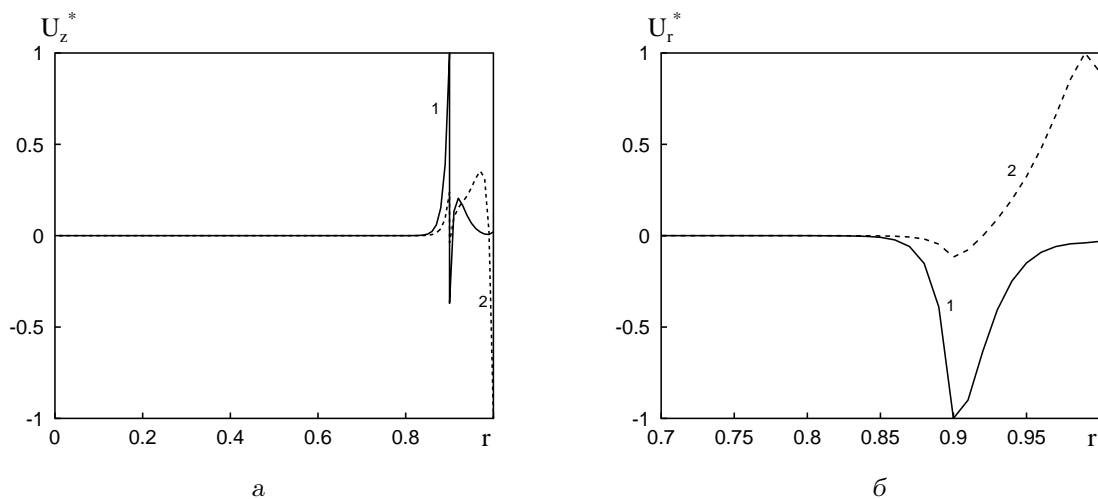


Табл 4. Дисперсионные характеристики низших нормальных волн для заполненного водой цилиндра из жесткой резины с  $r_1=0.9$ 

$\zeta$	$\gamma_2^{(1)}$	$C/V_S$	$\gamma_2^{(2)}$	$C/V_S$
70	56.901545	0.812879	67.231629	0.960452
80	65.200464	0.815006	76.045242	0.950566
100	81.590645	0.815906	94.373767	0.943738

Рис. 7. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений в нормальных волнах волновода вода – жесткая резина с  $r_1=0.3$ :

1 –  $\zeta=50$  (волна Стоунли), 2 –  $\zeta=100$  (волна Стоунли),  
 3 –  $\zeta=50$  (волна Рэлея), 4 –  $\zeta=100$  (волна Рэлея)

Рис. 8. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений в нормальных волнах волновода вода – жесткая резина с  $r_1=0.9$ ,  $\zeta=100$ :

1 – волна Стоунли, 2 – волна Рэлея

Табл. 5. Относительное распределение осевой энергии по поперечному сечению составляющих волновода вода – жесткая резина

$N$	$r_1$	$\zeta$	$\gamma_2$	$u_{zr}$	$W_{z0}$	$W_{z1}$	$W_z$	$W_{z0}/W_z$
1	0.3	50	40.973317	1.096	$0.1451 \cdot 10^{13}$	$0.6582 \cdot 10^{13}$	$0.8033 \cdot 10^{13}$	0.1807
2	0.3	100	81.714104	1.076	$0.3112 \cdot 10^{25}$	$0.1477 \cdot 10^{26}$	$0.1788 \cdot 10^{26}$	0.1741
3	0.3	50	47.049195	0.526	$0.1016 \cdot 10^{13}$	$0.1087 \cdot 10^{23}$	$0.1087 \cdot 10^{23}$	$0.935 \cdot 10^{-10}$
4	0.3	100	94.152981	0.537	$0.1253 \cdot 10^{25}$	$0.2235 \cdot 10^{45}$	$0.2235 \cdot 10^{45}$	$0.5608 \cdot 10^{-20}$
5	0.9	100	81.590645	1.063	$0.6827 \cdot 10^{74}$	$0.3349 \cdot 10^{75}$	$0.4032 \cdot 10^{75}$	0.1693
6	0.9	100	94.373767	0.538	$0.2847 \cdot 10^{73}$	$0.1247 \cdot 10^{76}$	$0.1262 \cdot 10^{76}$	0.002257

нормальные волны (кроме низшей) имеют в качестве предельного значения фазовой скорости скорость звука в заполняющей цилиндр жидкости. Уже это обстоятельство указывает, что в таком составном волноводе отсутствуют отдельные нормальные волны, трансформирующиеся в поверхностные волны типа Рэлея. Как показано в работе, волна Рэлея формируется на внешней поверхности цилиндра лишь за счет трансформации нормальных волн разных порядков на отдельных частотных интервалах. Этим волнам соответствуют участки дисперсионных кривых разных порядков, которые расположены вблизи первой дисперсионной кривой пустого цилиндра. Низшая нормальная волна волновода в этом случае трансформируется в классическую волну Стоунли вблизи поверхности раздела жидкость – упругое тело.

Локализация волнового поля вблизи внутренней поверхности цилиндра происходит в нормальных волнах, дисперсионные кривые для которых имеют участки, близкие ко второй дисперсионной кривой пустого цилиндра. На них движение в упругом цилиндре близко по характеру к движению в волне Рэлея, однако движение в жидкости не локализуется вблизи поверхности раздела. Энергетически упруго-жидкостное взаимодействие для этих мод выражено весьма существенно. Именно это обстоятельство не позволяет сформироваться волне Рэлея вблизи внутренней поверхности цилиндра.

Для составного волновода из податливого материала упруго-жидкостное взаимодействие проявляется практически во всей области частот и волновых чисел. Поэтому при систематизации расчетных результатов методически нецелесообразно использовать представления о парциальных подсистемах. На это особенно четко указывают данные об асимптотических свойствах фазовых скоростей нормальных волн. Так, первая (низшая) и вторая нормальные волны имеют в качестве предельных значений скоростей скорости волн Стоун-

ли и Рэлея соответственно. Все последующие волны, в том числе и волна, соответствующая второй волне пустого цилиндра, имеют в качестве предельного значения фазовой скорости скорость волн сдвига в материале цилиндра.

На конкретных примерах показано, что уменьшение жесткости материала цилиндра оказывает существенное влияние на дисперсионные, кинематические и энергетические характеристики поверхностной волны типа Стоунли. Если цилиндр состоит из жесткого материала, фазовая скорость волны Стоунли практически равна скорости звука в жидкости, а если из податливого – она значительно меньше этой величины. В случае податливого материала цилиндра вблизи поверхности контакта волновое возмущение в равной степени охватывает жидкую и упругую составляющие волновода. При этом значительную часть энергии переносит упругая компонента. Амплитуды продольных и поперечных смещений становятся весьма близкими. В отличие от этого, для цилиндра из жесткого материала волновое возмущение преимущественно сосредоточено в жидкости, а амплитуды продольных смещений значительно превосходят поперечные смещения.

1. *Rayleigh J. W.* On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // *Proc. Lond. Math. Soc.* – 1885/1886. – **17**, N 253. – P. 4–11.
2. *Stoneley R.* The elastic waves at the interface of separation of two solids // *Proc. Roy. Soc. Lond.* – 1924. – **A106**, N 732. – P. 416–429.
3. *Гоголадзе В. Г.* Отражение и переломление упругих волн. Общая теория граничных волн Рэлея // *Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР.* – 1947. – **125**. – С. 1–43.
4. *Achenbach J. D., Epstein H. I.* Dynamic interaction of a layer and a half-space // *Proc. Amer. Soc. Civil Engng, J. Engng Mech.* – 1967. – **93**, N 5. – P. 27–42.
5. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 283 с.

6. Padilla F., de Billy M., Quentin G. Theoretical and experimental studies of surface waves on solid-fluid interfaces when the value of the fluid sound velocity is located between the shear and the longitudinal ones in the solid // J. Acoust. Soc. Amer.– 1999.– **106**, N 2.– P. 666–673.
7. Glorieux C., Van de Rostyne K., Nelson K., Gao W., Lauriks W., Thoen J. On the character of acoustic waves at the interface between hard and soft solids and liquids // J. Acoust. Soc. Amer.– 2001.– **110**, N 3, Pt 1.– P. 1299–1306.
8. Zhu J., Popovics J. S., Schubert F. Leaky Rayleigh and Scholte waves at the fluid-solid interface subjected to transient point loading // J. Acoust. Soc. Amer.– 2004.– **116**, N 4, Pt 1.– P. 2101–2110.
9. Bayon A., Gascon F., Nieves F. J. Estimation of dynamic elastic constants from the amplitude and velocity of Rayleigh waves // J. Acoust. Soc. Amer.– 2005.– **117**, N 6.– P. 3469–3477.
10. Mindlin R. D. Waves and vibrations in isotropic elastic plates // Structural mechanics.– New York: Pergamon Press, 1960.– P. 199–232.
11. Onoe M., McNiven H. D., Mindlin R. D. Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // ASME J. Appl. Mech.– 1962.– **29**.– P. 729–734.
12. Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic waves propagation in a cylinder // J. Acoust. Soc. Amer.– 1972.– **51**, N 1.– P. 265–283.
13. Gazis D. C. Three-dimension investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. II. Numerical results // J. Acoust. Soc. Amer.– 1959.– **31**, N 3.– P. 573–578.
14. Rosenberg R. L., Thurston R. N. Relationship between plate and surface modes of a tube // J. Acoust. Soc. Amer.– 1977.– **61**, N 6.– P. 1499–1502.
15. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Распространение волн в полом упругом цилиндре с жидкостью // Прикл. мех.– 1984.– **20**, N 1.– С. 21–26.
16. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Свойства нормальных волн в упруго-жидкостных цилиндрических волноводах // Акуст. вісн.– 2000.– **3**, N 3.– С. 44–55.
17. Комиссарова Г. Л. Распространение нормальных волн в заполненных жидкостью тонкостенных цилиндрах // Прикл. мех.– 2002.– **38**, N 1.– С. 124–134.
18. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Свойства поверхностных волн в упругом полом цилиндре // Акуст. вісн.– 2004.– **7**, N 3.– С. 39–48.
19. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Особенности распространения волн в заполненных жидкостью цилиндрах с податливыми стенками // Акуст. вісн.– 2001.– **4**, N 3.– С. 22–33.
20. Комиссарова Г. Л. К решению задачи о распространении упругих волн в цилиндре с жидкостью // Прикл. мех.– 1990.– **26**, N 8.– С. 25–29.
21. Комиссарова Г. Л. Распространение нормальных осесимметричных волн в заполненных и окруженных жидкостью упругих цилиндрах из податливых материалов // Прикл. мех.– 2004.– **40**, N 5.– С. 104–113.
22. Бергман Л. Ультразвук.– М.: ИИЛ, 1957.– 726 с.
23. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Особенности динамического деформирования полого цилиндра // Прикл. мех.– 1986.– **22**, N 5.– С. 3–8.
24. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Поверхностные волны в системе упругий слой на жидком полупространстве // Акуст. вісн.– 2005.– **8**, N 4.– С. 38–45.