

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ПРИНЦИПА СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ*, В. Т. ГРИНЧЕНКО*, В. В. МЕЛЕШКО**

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

**Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Получено 31.09.2005 ◊ Пересмотрено 31.12.2005

Рассмотрена задача о продольной деформации упругого полубесконечного слоя под действием гармонических нагрузок различных видов. Показано, что в области относительно низких частот (ниже частоты краевого резонанса) может быть сформулирован динамический аналог принципа Сен-Венана. При одновременном действии самоуравновешенной и несамуравновешенной нагрузок на торце полуслоя в дальнем поле следует учитывать только несамуравновешенную составляющую. Если приложенная нагрузка самоуравновешена, то значительные напряжения возникают только вблизи торца полуслоя.

Розглянуто задачу про поздовжню деформацію пружного напівбезмежного шару під дією гармонічних навантажень різних видів. У області відносно низьких частот (нижче частоти крайового резонансу) може бути сформульований динамічний аналог принципу Сен-Венана. Якщо на півшар одночасно діють самоврівноважені та несамоврівноважені навантаження, то у дальньому полі слід враховувати лише несамоврівноважену складову. Якщо прикладене навантаження є самоврівноваженим, то значні напруження виникають тільки біля торця півшару.

A problem of longitudinal deformation of an elastic semi-infinite layer under the action of various kinds of harmonic loads has been considered. In the range of relatively low frequencies (below the edge resonance frequency), a dynamic analog of the Sain-Venant's principle can be formulated. When the semi-layer is subjected to simultaneous action of the self-balanced and non-self-balanced loads, the only non-self-balanced component should be taken into account in the far field. If the applied load is a self-balanced one, the considerable stresses arise only near the semi-layer's end.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи о равновесии, установившихся колебаниях или нестационарных волнах для упругого призматического стержня постоянного поперечного сечения под действием произвольной нагрузки на его торцах являются одними из важнейших задач статической и динамической теории упругости. Статическая задача такого класса, известная как задача Сен-Венана [1, 2], ведет свою историю от двух классических мемуаров [3, 4] о растяжении, кручении и изгибе силами на торцах изотропных призматических стержней. Опубликованные 150 лет назад¹ эти выдающиеся работы (см. также их перевод [5]) содержали первую формулировку “принципа упругой равнозначности статически эквивалентных систем сил”, как назвал его Ляв [6], позволившего переходить от точных граничных условий на торцах к заданию лишь главного вектора и главного момента от приложенных сил. При этом утверждалось, что статически эквивалентные распределенные по торцам системы сил создают в достаточно длин-

ном (по сравнению с характерным линейным размером сечения) стержне практически одинаковые напряженно-деформированные состояния, которые, возможно, существенно отличаются друг от друга лишь в областях, примыкающих к торцам.

Сен-Венан формулировал в [3, §§ 33, 41, 58, 135] и [4, § 32] этот принцип как априорный и самоочевидный, ссылаясь на экспериментальные данные Понселе [7, § 240] о сжатии клещами каучковой призмы (когда произведенное вдавливание распространяется в обе стороны на расстояние, не превышающее наибольшую глубину вдавливания), а также сравнивая, например, задачу кручения призмы с установившимся течением Пуазейля вязкой жидкости в трубе под действием постоянного градиента давления. В наиболее полном виде его формулировка звучит так [5, с. 493]:

Итак, какой бы ни была система сил, которые действуют на каждый конец призмы, чтобы ее изогнуть, скрутить, растянуть и т. д., эту систему всегда можно заменить двумя другими системами. Одна из этих систем состоит из сил, имеющих такую же геометрическую равнодействующую и такой же равнодействующий момент, как и заданные силы, но приложенных и распределенных так, что-

¹Ляв [6] относит дату публикации первого мемуара, доложенного в Академии наук 13 июня 1853 года, к 1855 году. Такая датировка вошла практически во все ссылки. Мы основываемся на данных из фундаментального *Catalogue of Scientific Papers* (1800–1863), vol. 1, опубликованных Royal Society of London в 1867 году.

бы вызывать перемещения, точно представленные формулами. Другая система составлена из сил, имеющих равнодействующую и момент, равные нулю, т. е. из сил, которыми можно пренебречь, как мы только что сказали, в отношении их действий на остальную часть этого тела.

Другой вариант изложения этой концепции, данный Сен-Венаном в 1858 году, приведен на французском и русском языках в обзорной статье [8].

Принцип Сен-Венана (или постулат, согласно [9]) с разной степенью полноты описан практически во всех учебниках и классических монографиях по теории упругости. Следует отметить, что выделяются две основные его интерпретации, являющиеся частями приведенной выше оригинальной формулировки.

Первая из них, связанная с утверждениями относительно нагружения упругого тела самоуравновешенными нагрузками, наиболее четко дана Лявом [6, § 39]:

Если к небольшой части поверхности тела приложена система сил, приводящаяся по правилам статики к силе и паре, равным нулю, то деформации, производимые этой нагрузкой в точках, удаленных на расстояния, которые можно считать большими по сравнению с линейными размерами этой части поверхности, пренебрежимо малы.

Такое изложение принято, например, в курсах теории упругости Тимошенко [10, 11], Папковича [9, гл. VIII, § 12], Безухова [12, § 2], Мусхелишвили [13, § 23], Филоненко-Бородича [14, § 31]. Его простота обусловлена тем, что не происходит замены одной нагрузки на другую, статически ей эквивалентную, и поэтому нет необходимости следить за изменением амплитудных величин нагрузок. Однако, как отмечено в [12, 14, 15], в этом случае возможны ситуации кажущегося нарушения принципа Сен-Венана (например, для тонкостенных стержней двутаврового сечения). Ясно, что в уточненной формулировке принципа необходимо требовать, чтобы размер области загрузки торца был малым по сравнению со *всеми* характерными размерами стержня.

Вторая редакция принципа Сен-Венана дана в курсе теории упругости Тимошенко [16, § 15]:

Этот принцип состоит в том, что если усилия, действующие на небольшую часть поверхности упругого тела, заменить другой, статически эквивалентной

системой усилий, действующей на ту же часть поверхности, то это перераспределение нагрузки вызовет существенные изменения местных напряжений, но окажет ничтожное влияние на напряжения в точках, расстояние до которых достаточно велико по сравнению с линейными размерами поверхности, на которой усилия были изменены.

Она также приведена, например, в курсах теории упругости Безухова [12, § 3], Мусхелишвили [13, § 23], Новожилова [1, гл. VI, § 2], Лурье [2, гл. VI, § 1] (интересно отметить, что в последующем издании курса [17] Тимошенко вернулся к первому варианту).

При внимательном рассмотрении данная формулировка вызывает ряд вопросов. Прежде всего следует иметь в виду, что речь идет о сравнении двух напряженных состояний упругого тела, вызванных различными, но статически эквивалентными нагрузками. Поэтому говорить о ничтожном влиянии можно лишь в смысле соотношения величин напряжений. Очевидно, что такое соотношение не может быть выполнено лишь за счет геометрического фактора – расстояния от поверхности нагружения. Возможны ситуации, когда величины напряжений, обусловленных самоуравновешенной нагрузкой, существенно превосходят напряжения от нагрузки несамуравновешенной. В то же время, при буквальном восприятии приведенного варианта принципа Сен-Венана возникает впечатление, что любая добавка к внешней нагрузке самоуравновешенных усилий не скажется на достаточно большом расстоянии от места их приложения. Совершенно очевидно, что это не так. Такое утверждение имеет смысл, только если предположить, что некоторая амплитудная характеристика самоуравновешенной нагрузки не превосходит существенно характерное значение нагрузки изначальной, как правило несамуравновешенной, с которой производится сравнение. Впервые внимание на это обстоятельство было обращено Мизесом [18] при уточнении более общей формулировки принципа, данной учеником Сен-Венана Бусинеском в фундаментальном трактате [19, vol. 1, p. 298] (цитируется по переводу [8]):

Уравновешенные внешние силы, приложенные к упругому телу, все точки приложения которых лежат внутри данной сферы, производят деформации пренебрежимо малые на расстояниях от сферы, достаточно больших по сравнению с ее радиусом.

Можно обратить внимание еще на одно обстоятельство. В формулировке Тимошенко [16, § 15] подчеркивается, что замена производится без изменения формы площадки нагружения. Такое требование представляется излишним. Хорошей иллюстрацией этого может служить пример трехмерной задачи о нагружении упругого полупространства нормальной сосредоточенной силой [19]. При замене сосредоточенной силы нагрузкой, распределенной по круговой площадке, напряженное состояние в *фиксированной* точке упругого тела меняется незначительно, если точка находится на расстоянии, существенно большем, чем размеры площадки.

Несмотря на значительное количество исследований по оценке степени экспоненциального убывания приложенной статической нагрузки вдоль образующей призматического стержня (их детальный обзор приведен в [20–22]), на принцип Сен-Венана следует смотреть как на положение, порожденное, скорее, физическими, чем математическими соображениями. Основным требованием к нему является возможность оценки убывания амплитуд напряжений в упругом стержне без построения решения соответствующей граничной задачи. Но не только убыванием напряженного состояния можно интересоваться при анализе конкретных задач. В ряде публикаций, среди которых можно отметить [15, 23], для плоской и пространственной постановок представлены оценки затухания потенциальной энергии $U(l)$ в части полубесконечного упругого стержня, находящейся дальше чем l от нагруженного торца. Такие работы были начаты исследованиями Гудьера [24] и За набони [25, 26] по оценкам энергии, накопленной в последовательных частях тела при действии фиксированной нагрузки на малом участке его границы (см. также [2, 8]).

Обобщая формулировки обсуждаемого принципа, можно говорить, что в определенных условиях нагружения напряженное состояние упругого тела можно разделить в пространственном смысле на основное напряженное состояние, в котором напряжения имеют один порядок во всей области тела, и локальное, возникающее вблизи площадки нагружения. Иногда это локальное напряженное состояние характеризуется как пограничный слой, по аналогии с соответствующим понятием в гидромеханике. В таком разделении можно искать определенную возможность для обобщения принципа Сен-Венана на динамические случаи, поскольку в задачах излучения (рассеяния) волн можно усмотреть некоторую аналогию указанных понятий с концепциями ближнего и дальнего поля. Дальней-

шее рассмотрение будет более содержательным, если привлечь к нему некоторые конкретные задачи.

1. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ЛОКАЛИЗАЦИЕЙ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Анализ многих простейших случаев динамического нагружения упругих или жидкостных систем указывает на существование таких нагрузок, для которых волновое возмущение локализуется вблизи площадки нагружения. Так, для двумерного акустического полупространства $|z| < \infty$, $y \geq 0$, нагруженного гармоническим давлением

$$p(z, 0) = A \cos(\lambda z)$$

(временной множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и всюду далее опускаем), потенциал скоростей частиц представляется в виде

$$\varphi(z, y) = i \frac{A}{\omega \rho} \cos(\lambda z) \exp(iy\sqrt{k^2 - \lambda^2}).$$

Для всех $\lambda > k$ справедливо

$$\varphi(z, y) = i \frac{A}{\omega \rho} \cos(\lambda z) \exp(-y\sqrt{\lambda^2 - k^2}),$$

т. е. волновое поле локализуется вблизи нагруженной границы $y=0$. Подобное его поведение наблюдается и для упругого полупространства, нагруженного периодической по пространству нагрузкой.

Уже на этом простейшем примере видны те характерные для динамических задач моменты, которые должны быть учтены при попытке сформулировать динамический аналог принципа Сен-Венана. Прежде всего, из указанного ограничения для длины волны внешней нагрузки ($\lambda > k$) следует, что подобный подход возможен только для определенных частотных интервалов.

Рассмотренный случай не позволяет выделить ближнее и дальнее поле. Однако такое разделение становится естественным при некотором изменении граничных условий. Пусть волновое поле возбуждается нагрузкой такого же гармонического характера, но приложенной на конечном участке границы:

$$p(z, 0) = \begin{cases} A \cos(\lambda z), & |z| \leq a, \\ 0, & |z| > a. \end{cases}$$

Очевидно, что для произвольных значений a нагрузка является несамоуравновешенной. Однако при $\lambda = \pi a/n$ она становится самоуравновешенной.

Решение для этой граничной задачи не столь просто, как для предыдущей, однако оно может быть найдено [27]. Его анализ показывает, что при конечном участке нагружения самоуравновешенная нагрузка будет порождать волновое поле, распространяющееся на все полупространство. Такой же вывод вытекает и из рассмотрения аналогичной постановки для упругого полупространства. Отсюда следует, что в общем случае в динамических задачах возмущение при воздействии самоуравновешенных нагрузок не локализуется вблизи области их приложения.

Такое заключение не может служить основанием для отказа от попыток сформулировать динамический аналог принципа Сен-Венана. Однако здесь следует разделить динамические задачи для гармонических и нестационарных волновых процессов.

Для нестационарных волновых процессов возможные формулировки принципа на основе упрощенных моделей теории стержней и пластин даны в работах [28–30]. В частности, в статье [29] показано, что “принцип Сен-Венана применим при рассмотрении переходных процессов в динамике стержней, поскольку деформации, соответствующие внезапно прилагаемым к стержню самоуравновешенным по его сечению нагрузкам, локализуются вблизи волновых фронтов и того сечения, где приложено возмущение”. По сути, уменьшение амплитуды нестационарного возмущения в стержне обусловлено дисперсионным размыванием возмущения по различным распространяющимся волнам. Это утверждение не распространяется на случай установившихся гармонических колебаний в полуслое, поскольку уже на основе анализа корней дисперсионного уравнения можно утверждать, что наличие даже одной распространяющейся волны приводит к конечности величины амплитуды напряжений в любой точке, сколь угодно удаленной от торца, независимо от вида приложенной нагрузки.

Для нагрузок, связанных с непрерывным притоком энергии, может оказаться уместным энергетический аналог статического принципа Сен-Венана. Для его формулировки необходимо указать типы связанных с приведенной гармонической нагрузкой несамоуравновешенных нагрузок, энергия излучения которых существенно превосходит энергию излучения характерной самоуравновешенной нагрузки.

Заметим также, что простота задач для идеальной жидкости позволяет указать другое направление поисков динамического аналога принципа Сен-Венана. Для примера рассмотрим задачу о

возбуждении волнового поля в полубесконечном волноводе $z \geq 0$, $|y| \leq h$ с жесткими стенками $|y| = \pm h$ самоуравновешенной нагрузкой на торце:

$$p(0, y) = p_0 \cos\left(\frac{n\pi}{h}y\right).$$

В терминах волнового потенциала $\varphi(z, y)$ решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца имеет вид

$$\varphi(z, y) = -i \frac{p_0}{\omega \rho} \cos\left(\frac{n\pi}{h}y\right) \exp\left(-z \sqrt{\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 - k^2}\right).$$

Отсюда видно, что при малых значениях волнового числа (частоты) волновое поле полностью локализуется вблизи торца волновода. Ясно также, что при возрастании частоты полученное выражение превратится в бегущую на бесконечность нормальную волну. Это еще раз указывает на то, что обобщение принципа Сен-Венана для таких областей как волноводы возможно лишь при определенных ограничениях на частоту.

Сделанное замечание существенно для формирования представлений о возможной форме аналога принципа Сен-Венана в динамических проблемах теории упругости. При этом здесь изначально ясна невозможность сколько-нибудь общих формулировок. Хорошо известно, например, что динамическая реакция конечного упругого тела на внешнюю нагрузку определяется двумя факторами. С одной стороны, это близость частоты воздействия к собственной частоте объекта, а с другой – степень согласованности распределения внешней нагрузки с собственной формой колебаний. Нагрузка, даже неуравновешенная, не может вызвать колебания на формах, к которым она ортогональна. В то же время, самоуравновешенная нагрузка может возбуждать собственную форму колебаний, возмущения в которой не обладают какой-либо степенью локализации.

Некоторого упрощения ситуации можно достичь при рассмотрении неограниченных упругих тел. Здесь отсутствуют, в строгом смысле этого слова, резонансные явления и следует говорить лишь о степени согласованности характера нагрузки и формы уносящих энергию волн. Как будет видно далее, ситуация все равно остается сложной, поскольку в интересных случаях сама форма энергонесущих волн зависит от частоты. Поэтому вопрос может ставиться о том, что в некотором ограниченном диапазоне частот существует нагрузка, наиболее эффективно возбуждающая волновое поле, а нагрузки с другими пространственными распределениями являются неэффективными.

Недавние публикации [31, 32] содержат попытку путем длинных выкладок установить в низко- и высокочастотном пределе некоторые ограничения на интегральные характеристики динамических нагрузок на торце, аналогичные статическому варианту принципа Сен-Венана для полуслоя. На наш взгляд, такие упражнения, без решения соответствующей краевой задачи, являются чисто формальными и не дают ясного представления о существе проблемы.

Задача о возбуждении упругого полуслоя нормальной равномерной гармонической нагрузкой на торце рассматривалась в [33]. Вычисления на основе метода однородных решений в широком диапазоне частот выявили интересную картину распределения подводимой энергии по распространяющимся нормальным модам. При этом, однако, не был проведен анализ влияния типа нагружения. Некоторые дополнительные данные о влиянии различных типов самоуравновешенной нагрузки на динамическую картину дальнего поля в полуслое в том частотном диапазоне, где присутствует лишь одна распространяющаяся нормальная мода, приведены в работах [34, 35].

В свете сделанного выше замечания о важности предположения о сравнимости амплитуд уравновешенных и неуравновешенных составляющих статической нагрузки при использовании принципа Сен-Венана, в динамических проблемах следует искать имманентные способы сравнения различных типов нагрузок. Поскольку речь будет идти о бесконечных упругих телах, можно применить подход, основанный на использовании содержания фундаментальных понятий теории излучения волн.

Прежде всего, следует иметь в виду, что представление о ближнем и дальнем поле источника колебаний может служить основой для некоторого обобщения принципа Сен-Венана. Принимая во внимание такое разделение волнового поля, можно ставить вопрос о выделении для конкретных типов упругих тел таких нагрузок, добавление которых к некоторой исходной нагрузке вызывает изменение только характеристик ближнего поля. Такая постановка вопроса очень хорошо согласуется с выделенным в принципе Сен-Венана фактом локального влияния самоуравновешенных нагрузок.

Поскольку локализация волнового поля, возбуждаемого каким-либо источником, означает существенное превышение реактивной составляющей мощности над активной, для сравнения основной и дополнительной нагрузок в динамических задачах можно использовать энергетические крите-

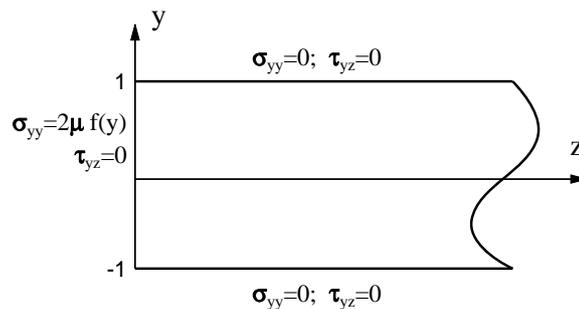


Рис. 1. Геометрия задачи

рии. Если мы имеем эффективную нагрузку с заданным значением максимума мгновенной мощности источника, то дополнительную неэффективную нагрузку можно сравнивать с основной при той же величине мгновенной мощности дополнительного источника. Такой подход может оказаться интересным при анализе волноводного распространения. Вот с такой точки зрения, возможно, и следует рассматривать задачу для полубесконечного волновода.

В данной работе на основе решения типичных двумерных задач о вынужденных гармонических колебаниях полубесконечного упругого слоя принцип Сен-Венана интерпретируется как возможность пренебрежения (до определенной частоты) самоуравновешенными составляющими распределенной на торце слоя нагрузки при оценке напряжений и деформаций в точках, достаточно удаленных от места ее приложения. Для этого анализируется волновое поле в полуслое при его возбуждении с торца различными системами нормальных нагрузок. При этом изучается лишь тот диапазон частот, в котором существует только одна распространяющаяся волна. В этой области напряжение в дальнем поле полностью определяется средней за период мощностью, переносимой распространяющейся волной. Поэтому, рассматривая изменение энергии, потребляемой полуслоем в зависимости от вида нагрузки, приложенной к торцу, можно говорить о характере напряжений в дальнем поле.

2. ВЫНУЖДЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ УПРУГОМ СЛОЕ

Рассмотрим установившееся волновое поле в упругом полуслое $X \geq 0, |Y| \leq h, Z \geq 0$ со свободными поверхностями $Y = \pm h$ (рис. 1). Свойства заполняющей его однородной изотропной среды характеризуются модулем сдвига G , коэффициентом Пуассона ν , скоростями c_1 и c_2 продольных и

поперечных волн. Гармонические колебания в таком волноводе возбуждаются системой сил, приложенных на торце $Z=0$. Граничные задачи сформулируем в безразмерных координатах $x=X/h$, $y=Y/h$, $z=Z/h$.

Возможны два вида двумерного (зависящего только от координат y и z) волнового поля в упругом полуслое. Для первого вида движений – SH-волны – компонента u_x безразмерного вектора смещений $\mathbf{u} = \{u_x(y, z), 0, 0\}$ должна удовлетворять уравнению Ламе, которое сводится к скалярному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 u_x + \Omega_2^2 u_x = 0, \quad (1)$$

где $\nabla^2 = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ – двумерный оператор Лапласа; $\Omega_2 = \omega h/c_2$, и граничным условиям

$$\begin{aligned} \tau_{zx} = Gg(y), \quad \tau_{zy} = 0, \quad \sigma_z = 0; \quad z = 0, \\ \tau_{yx} = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{yz} = 0; \quad y = \pm 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь функция $g(y)$ задает распределение нагрузки по торцу. Используя соотношения закона Гука, для этого типа движений граничные условия (2) могут быть сведены к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial z} = g(y), \quad z = 0, \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0, \quad y = \pm 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Для второго вида движений в слое – волны Рэлея–Лэмба – компоненты u_y и u_z безразмерного вектора смещений $\mathbf{u} = \{0, u_y(y, z), u_z(y, z)\}$ должны удовлетворять уравнениям Ламе

$$\nabla^2 u_y + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \Omega_2^2 u_y = 0, \quad (4)$$

$$\nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \Omega_2^2 u_z = 0,$$

где

$$\theta = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \Omega_1 = \frac{\omega h}{c_1},$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0, \quad \sigma_z = 2Gf(y), \quad z = 0, \\ \tau_{yx} = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad y = \pm 1, \end{aligned} \quad (5)$$

где $f(y)$ задает распределение силовой нагрузки на торце.

Ограничимся задачами о распространении продольных волн в слое, когда $g(y)$ и $f(y)$ – четные

функции координаты y и представляются разложениями в ряды Фурье:

$$g(y) = \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k g_k \cos(k\pi y), \quad (6)$$

$$f(y) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_k \cos(k\pi y). \quad (7)$$

Для постановки задач в обоих случаях важным является условие излучения на бесконечности, предполагающее, что каждая распространяющаяся нормальная волна уносит энергию от торца полуслоя.

3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

Традиционным для линейной акустики подходом к решению граничных задач о волноводном распространении является метод разложения волнового поля по системе распространяющихся и нераспространяющихся нормальных мод конкретного акустического волновода [36]. В случае упругого полубесконечного слоя он непосредственно применим лишь для случая возбуждения SH-волн. При этом система нормальных мод ортогональна, что допускает простое представление для единственной компоненты вектора смещений. Легко убедиться, что выражение

$$\begin{aligned} u_x(y, z) = -i \frac{g_0}{2\Omega_2} e^{i\Omega_2 z} - \\ -i \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{g_k}{\xi_k} \cos(k\pi y) e^{i\xi_k z} \end{aligned} \quad (8)$$

при

$$\xi_k = \begin{cases} \sqrt{\Omega_2^2 - (k\pi)^2}, & |k\pi| \leq \Omega_2, \\ -i\sqrt{\Omega_2^2 - (k\pi)^2}, & |k\pi| > \Omega_2, \end{cases} \quad (9)$$

удовлетворяет как скалярному уравнению (1), так и всем граничным условиям (3).

Для случая возбуждения волн Рэлея–Лэмба использование метода нормальных волн (или однородных решений, как его часто называют по аналогии со статическими задачами теории упругости) представляет определенные трудности, связанные с неортогональностью волн этого типа в волноводе. Обладая наглядностью представления результатов, такой подход, однако, не позволяет легко выполнить граничные условия на торце [33, 37]. Следует отметить, что эффективность

реализации метода нормальных волн во многом затруднена сложностью структуры мод Рэлея–Лэмба. К тому же, при этом требуется большой объем вспомогательных вычислений.

Для решения граничной задачи (4), (5) целесообразно использовать метод суперпозиции. Общая его схема для полубесконечного слоя представлена в монографии [27], а принципиальный вопрос преодоления формальной “но очень важной и известной трудности” [38, с. 327], связанной с правильной трактовкой несобственных интегралов, входящих в представление общего решения, разрешен в статье [39]. Последующие публикации по этому вопросу [35, 40–42] развили конкретные численные алгоритмы реализации указанного подхода и показали надежность и простоту решения данной задачи в широком частотном диапазоне.

Следуя общей схеме метода суперпозиции, компоненты вектора смещений в полуслое представим в виде

$$u_y(y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{y_k}{\beta_k} \times \left(\frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2q_1} e^{-q_1 z} - q_2 e^{-q_2 z} \right) \sin(\beta_k y) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U_y(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau, \quad (10)$$

$$u_z(y, z) = iA_0 \Omega_1 e^{i\Omega_1 z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k y_k \times \left(\frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2\beta_k^2} e^{-q_1 z} - e^{-q_2 z} \right) \cos(\beta_k y) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U_z(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau$$

с неизвестными постоянными $A_0, y_k, k=1, 2, \dots$ и функцией $x(\tau)$. Здесь

$$U_y(\tau, y) = ip_1^2 \left(\xi^2 \frac{\text{sh}(p_2 y)}{\text{sh} p_2} - \frac{\xi^2 + p_2^2}{2} \frac{\text{sh}(p_1 y)}{\text{sh} p_1} \right);$$

$$U_z(\tau, y) = i\tau \left(p_1^2 p_2 \frac{\text{ch}(p_2 y)}{\text{sh} p_2} - \frac{\xi^2 + p_2^2}{2} p_1 \frac{\text{ch}(p_1 y)}{\text{sh} p_1} \right);$$

$$\beta_k = k\pi, \quad p_l^2 = \tau^2 - \Omega_l^2, \quad l = 1, 2;$$

$$q_l = \begin{cases} \sqrt{\beta_k^2 - \Omega_l^2}, & |k\pi| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_l^2 - \beta_k^2}, & |k\pi| < \Omega_j. \end{cases}$$

В дальнейшем ограничим рассмотрение диапазоном частот, при котором все $q_l^2 = \beta_k^2 - \Omega_l^2 > 0$. Увеличение частоты приводит к более громоздким выкладкам, не добавляя в физическую картину ничего принципиально нового.

Заметим, что в формальное разложение (10) входит бегущая волна $e^{i\Omega_1 z}$ и не входят явно распространяющиеся волны Рэлея–Лэмба, допустимые в упругом слое. Это говорит о том, что в интегральном представлении функция $x(\tau)$ должна иметь особенности в точках $\tau = \pm\Omega_1$ и $\tau = \pm\xi_j, j=1, \dots, J$, – вещественных корнях дисперсионного уравнения Рэлея–Лэмба

$$\Delta(\tau) = \tau^2 p_1^2 p_2 \text{cth} p_2 - \frac{(\tau^2 + p_2^2)^2}{4} p_1 \text{cth} p_1 = 0. \quad (11)$$

Вид решения (10) выбран таким образом, что граничные условия для касательных напряжений из соотношений (5) выполняются тождественно. Выполнение граничных условий (5) для нормальных напряжений приводит к следующей системе интегро-алгебраических уравнений относительно неизвестных $A_0, y_k, k=1, 2, \dots$ и функции $x(\tau)$:

$$x(\tau)\Delta(\tau) + A_0 \frac{i\Omega_0^2 \Omega_1}{\tau^2 - \Omega_1^2} - \sum_{k=1}^{\infty} y_k a_k(\tau) = 0,$$

$$A_0 \Omega_2^2 + \frac{\Omega_0^2 \Omega_2^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau = -f_0, \quad (12)$$

$$y_k R_k - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) p_1^2(\tau) b_k(\tau) d\tau = f_k,$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Здесь

$$A_k = -B_k \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2\beta_k q_1}, \quad (13)$$

$$f(y) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_k \cos(\beta_k y)$$

и введены обозначения

$$a_k(\tau) = \frac{2q_2^2}{\beta_k^2 + p_2^2} - \frac{(\beta_k^2 + \Omega_0^2)(\beta_k^2 + q_2^2)}{\beta_k^2(\beta_k^2 + p_1^2)},$$

$$b_k = \frac{2\tau^2 p_2^2}{\tau^2 + q_2^2} - \frac{(\tau^2 + \Omega_0^2)(\tau^2 + p_2^2)}{\tau^2 + q_1^2}, \quad (14)$$

$$R_k = q_2 - \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{4\beta_k^2 q_1} \quad \Omega_0^2 = \frac{\nu}{1 - 2\nu} \Omega_1^2.$$

Для того, чтобы обеспечить однозначность трактовки интегралов в соотношениях (10) и (12), в

частоту ω вводится малая вязкость $i\epsilon$ ($\epsilon > 0$). Это позволяет сместить полюса функции $x(\tau)$ с вещественной оси и выбрать путь интегрирования в соответствии с принципом предельного поглощения.

Для корректного усечения системы (12), обеспечивающего эффективность последующего численного решения, важное значение имеет знание асимптотического поведения неизвестных y_k при $k \rightarrow \infty$ и $x(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Такая асимптотика дается формулами

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = a_0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} x(\tau)\tau^4 = -a_0. \quad (15)$$

Тогда при усечении системы (12) для сумм и интегралов можно воспользоваться приближенными равенствами

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} y_k \psi(\beta_k) &\approx \sum_{k=1}^K y_k \psi(\beta_k) + \\ &+ a_0 \sum_{k=K+1}^{\infty} \psi(\beta_k), \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)G(\tau)d\tau &\approx \int_{-T}^T x(\tau)G(\tau)d\tau - \\ &- 2a_0 \int_T^{\infty} G(\tau)\tau^{-4}d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

В результате таких замен приходим к конечной системе из $K+1$ линейных алгебраических уравнений относительно $K+2$ неизвестных: A_0, y_k ($k = 1, \dots, K$), a_0). Уравнение, замыкающее ее, можно сформулировать либо используя асимптотическое выражение (15) в виде

$$y_K = a_0,$$

либо исходя из свойств волнового поля в окрестности угловой точки:

$$\frac{\sigma_z(1, 0) - \sigma_y(1, 0)}{2G} = f(\pm 1). \quad (17)$$

На основании численного анализа установлено, что для замыкания конечной системы предпочтительнее пользоваться соотношением (17). В этом случае достигается более высокая точность удовлетворения граничных условий при использовании фиксированных K – верхнего предела в суммах и T – верхнего предела в интегралах системы (12). Значения K и T выбирались в соответствии с требуемой точностью удовлетворения граничных условий, а критерием достоверности полученных данных являлся контроль за точностью

их выполнения. При этом для всех рассмотренных видов нагрузки погрешность выполнения граничных условий не превышала 1 % заданного на торце напряжения при $K = 10, T = 150$.

Используя метод вычетов применительно к разложению (10), волновое поле в полубесконечном слое может быть представлено в виде суммы всех нормальных волн Рэлея – Лэмба:

$$\begin{aligned} u_y(y, z) &= \sum_{j=1}^J C_j U_y(\xi_j, y) e^{i\xi_j z} + \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} C_p U_y(\zeta_p, y) e^{i\zeta_p z}, \\ u_z(y, z) &= \sum_{j=1}^J C_j U_z(\xi_j, y) e^{i\xi_j z} + \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} C_p U_z(\zeta_p, y) e^{i\zeta_p z}, \end{aligned} \quad (18)$$

где ζ_p с $Im\zeta_p > 0$ являются чисто мнимыми (если они существуют) и комплексными корнями дисперсионного уравнения (11), а коэффициенты C_j, C_p определяются согласно соотношениям [39]

$$C_j = \frac{1}{\Delta'(\xi_j)} \left[\sum_{k=1}^{\infty} y_k a_k(\xi_j) - iA_0 \frac{2\Omega_0^2 \Omega_1}{\xi_j^2 - \Omega_1^2} \right], \quad (19)$$

$$C_p = \frac{1}{\Delta'(\zeta_p)} \left[\sum_{k=1}^{\infty} y_k a_k(\zeta_p) - iA_0 \frac{2\Omega_0^2 \Omega_1}{\zeta_p^2 - \Omega_1^2} \right]. \quad (20)$$

Дополнительным критерием достоверности полученных результатов служит энергетический баланс между подведенным и уносимым распространяющимися нормальными волнами потоками мощности. Поток мощности W_0 , подводимый к полюсу за период $2\pi/\omega$, дается формулой [27]

$$\begin{aligned} W_0 &= -\omega G \int_{-1}^1 f(y) \mathbf{Im} u_z(y, 0) dy = \\ &= -\omega G \left(f_0 \Omega_1 \mathbf{Re} A_0 - \frac{\Omega_2^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\beta_k^2} \mathbf{Im} y_k \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Средний за период поток мощности W_1 , переносимый распространяющимися нормальными модами, определяется соотношением

$$W_1 = \omega G \frac{\Omega_2^2}{2} \sum_{j=1}^J |C_j|^2 (\xi_j^2 - \Omega_1^2) \Delta'(\xi_j). \quad (22)$$

В нашем случае потоки мощности, вычисленные по формулам (21) и (22), отличались в четвертом знаке после запятой во всем рассмотренном диапазоне частот.

4. РАСЧЕТ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

Перейдем к описанию количественных данных, характеризующих волновой процесс в упругом полуслое. Для сопоставления его отклика на различные виды гармонических по времени сил, приложенных к торцу волновода, в качестве нагрузок рассмотрим функции $f_0(y) = \sqrt{2}$ и $f_k(y) = \cos(k\pi y)$. Первая из них является несамоуравновешенной, а вторая – самоуравновешенной и удовлетворяет условию отсутствия результирующих продольных сил и моментов на торце волновода:

$$\int_{-1}^1 f_k(y) dy = \int_{-1}^1 f_k(y)y dy = 0. \quad (23)$$

Для выбора амплитуд приложенных к торцу нагрузок использовалось условие

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{f_0}{2}\right)^2 dy = \int_{-1}^1 f_k^2(y) dy = 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (24)$$

На рис. 2 представлена зависимость $E = W_0/\omega$ от частоты для коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$. Номер кривой k соответствует индексу нагрузки $f_{k-1}(y)$. При этом для наглядности величина потока мощности, соответствующая нагрузке $\cos(2\pi y)$ (кривая 3), увеличена в 10 раз. В области достаточно низких частот $\Omega_2 \leq 2$ мощность в волновод закачивается в основном несамоуравновешенной нагрузкой $f_0/2$, а самоуравновешенные нагрузки дают очень незначительный вклад в энергетическое поле.

Для более наглядной оценки вклада отдельных составляющих в дальнейшее поле рассмотрим нормированный средний за период поток мощности, вызванный силами $f_{k-1}(y)$. Для нормировки используем поток мощности, обусловленный суммарной нагрузкой $f(y) = \sqrt{2} + \cos(\pi y) + \cos(2\pi y)$. Зависимость $E_{pk} = E_k/(E_0 + E_1 + E_2)$ от частоты представлена на рис. 3. Номера кривых соответствуют индексам нагрузок. Для частоты $\Omega_2 \leq 2$ учет самоуравновешенных составляющих нагрузки уточняет значение среднего за период потока мощности не более чем на 2 %. При этом вплоть до частоты краевого резонанса ($\Omega_e = 2.31$) роль самоуравновешенных составляющих незначительна. Для $\nu = 0.3$

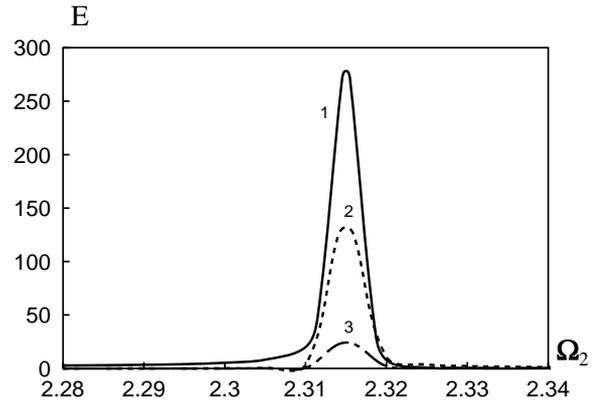


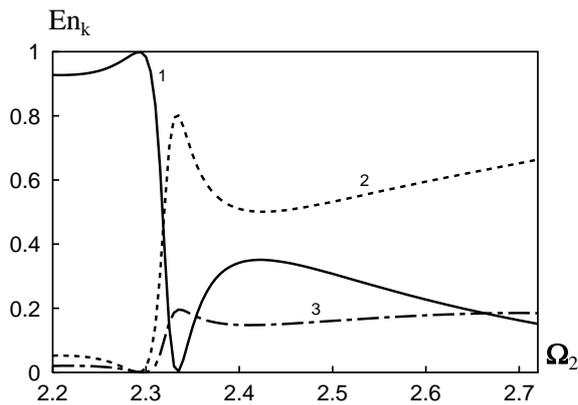
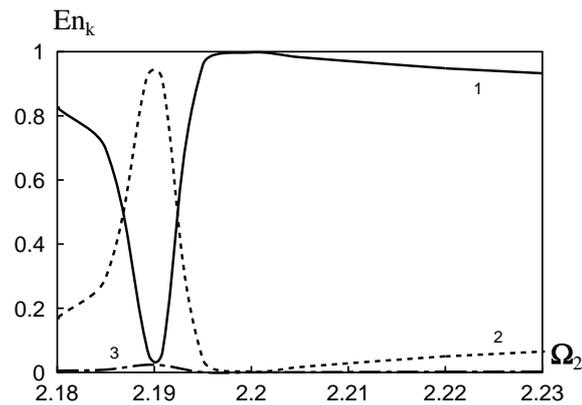
Рис. 2. Частотная зависимость $E = W_0/\omega$ для $\nu = 0.3$

следует особо выделить частоту $\Omega_2 = 2.2$, на которой наблюдается максимальное влияние самоуравновешенной нагрузки, соответствующей $\cos(\pi y)$. Однако и здесь вклад самоуравновешенных составляющих в волновое поле ощутим только локально. Поправка же для потока мощности не превышает 5 %.

Следовательно, если в области относительно низких частот $\Omega_2 \leq \Omega_e$ на торец волновода одновременно действуют несамоуравновешенная и самоуравновешенная системы сил с некоторым “балансом” по амплитудам, вкладом последней в энергетическом поле волновода можно пренебречь. Таким образом, в этом частотном диапазоне так же, как и в статике, может быть сформулирован динамический принцип Сен-Венана.

При одновременном действии на торец полубесконечной упругой полосы несамоуравновешенной и самоуравновешенной систем сил напряжения от самоуравновешенной системы существуют только вблизи торца. На значительном расстоянии от места приложения сил эффект от самоуравновешенной нагрузки пренебрежимо мал по сравнению с несамоуравновешенной нагрузкой.

Полученные количественные оценки показывают, что приложенные самоуравновешенные нагрузки плохо согласуются с распределением напряжений в единственной бегущей волне и, следовательно, их влияние на волновое поле в дальней зоне относительно мало, если основой для интегрального сравнения нагрузок служит соотношение (24). Такое же обобщение принципа Сен-Венана (в указанном смысле) было сделано в работе [28] для задачи динамики стержней в случае


 Рис. 3. Частотная зависимость E_{n_k} для $\nu=0.3$

 Рис. 4. Частотная зависимость E_{n_k} для $\nu=0.2$

переходных процессов.

При дальнейшем увеличении частоты ситуация заметно меняется. В этом случае волновое поле в полуслое усложняется в связи с существованием явления краевого резонанса [27, 37, 43] для продольных колебаний. Хотя существование краевого резонанса обусловлено спецификой возбуждения неоднородных волн, экспоненциально убывающих при удалении от торца и не переносящих энергию, тем не менее на соответствующей ему частоте происходит сильное увеличение мощности, закачиваемой в волновод несоуравновешенной нагрузкой. При этом уже нельзя утверждать, что при одновременном действии самоуравновешенной и несоуравновешенной нагрузок первой из них можно пренебречь для энергетического анализа волнового поля (а следовательно, и напряжений в дальнем поле). Здесь возможны ситуации, когда энергия, потребляемая системой при возбуждении волновода нагрузкой $f_1(y) = \cos(\pi y)$, будет сравнима с энергией при возбуждении несоуравновешенной нагрузкой $f_0/2$ (см. рис. 2, кривые 1 и 2). Заметим, однако, что при возбуждении волновода высшими гармониками $f_k(y)$, $k > 1$ мощность, закачиваемая в полуслой, остается весьма малой по сравнению с мощностью, потребляемой системой при возбуждении нагрузками $f_0/2$ и $f_1(y)$. При этом с увеличением порядка гармоники мощность, потребляемая системой, уменьшается. Таким образом, в области существования краевого резонанса для описания волнового поля в полубесконечном слое на большом расстоянии от места приложения нагрузки необходимо учитывать не только несоуравновешенную составляющую приложенной силы, но и первую гармонику при разложении $f(y)$ в ряд Фурье.

Следует также отметить, что поскольку частота краевого резонанса Ω_e зависит от коэффициента Пуассона (она снижается с уменьшением ν), то с уменьшением ν частота, до которой справедлив принцип Сен-Венана, будет падать. На рис. 4 представлена частотная зависимость E_{n_k} для коэффициента Пуассона $\nu=0.2$ (номера кривых здесь вновь соответствуют индексам нагрузок $f_{k-1}(y)$). Для данного коэффициента Пуассона крайовой резонанс наблюдается на частоте $\Omega_2 = 2.19$. Как и для $\nu=0.3$, вплоть до частоты краевого резонанса может быть сформулирован динамический аналог принципа Сен-Венана.

Таким образом, понятие энергетической эквивалентности позволяет сформулировать аналог принципа Сен-Венана для стационарных динамических задач в области относительно низких частот, где существует лишь одна распространяющаяся волна. При этом указанный частотный диапазон разбивается на две подобласти. Для интервала $0 \leq \Omega_2 \leq \Omega_e$ можно утверждать, что при одновременном действии самоуравновешенной и несоуравновешенной нагрузок первой из них можно пренебречь так же, как это делается в статике. Для второго интервала $\Omega_e \leq \Omega_2 \leq \Omega^*$, кроме несоуравновешенной составляющей нагрузки, необходимо учитывать и первую гармонику в разложении $f(y)$ в ряд Фурье. Здесь через Ω^* обозначена частота, на которой появляются бегущие волны высших порядков.

При формулировке динамического аналога принципа Сен-Венана для упругого слоя рассматривался средний за период поток мощности через поперечное сечение $z = \text{const}$ единичной ширины. Кроме этого, представляет интерес исследование мгновенного потока мощности

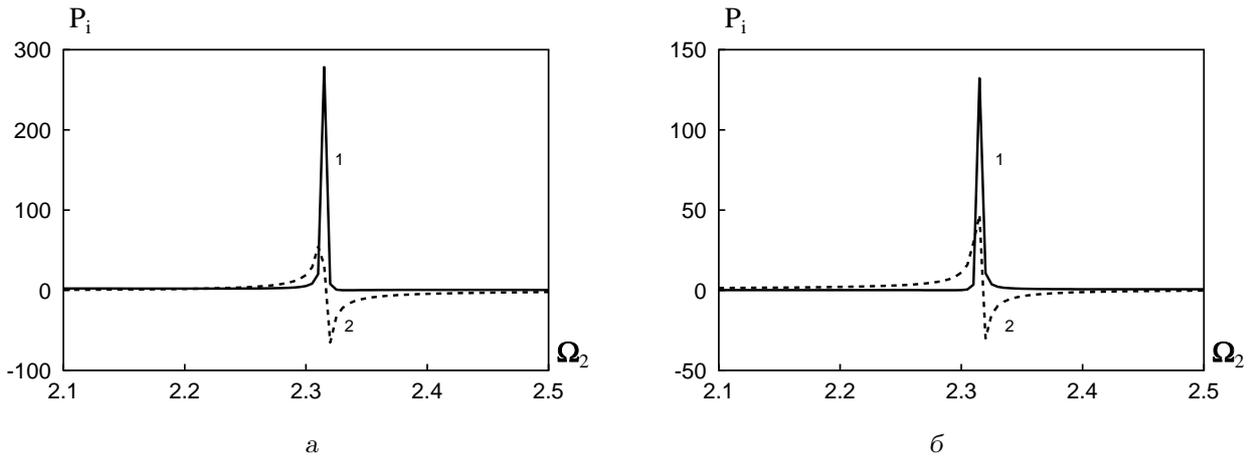


Рис. 5. Частотная зависимость мгновенного потока мощности для $t = T/8$:
 сплошная – активная составляющая, штриховая – реактивная составляющая;
 а – самоуравновешенная нагрузка, б – несамоуравновешенная нагрузка

$$P_z = -\left(\tau_{zy} \frac{\partial u_y}{\partial t} + \sigma_{zz} \frac{\partial u_z}{\partial t}\right). \quad (25)$$

В выражение (25) входят действительные части напряжений и смещений (10). С учетом того, что $\sigma_{zz} = 2\mu f(y) \cos(\omega t)$, а

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \omega V_z(y) \cos(\omega t + \psi)$$

(здесь ψ – фазовый сдвиг между напряжениями и смещениями), мгновенный поток мощности может быть представлен в виде

$$P_z = \mu\omega f(y)V_z(y)[\cos(2\omega t + \psi) + \cos\psi]. \quad (26)$$

Среднее по времени значение первого слагаемого в правой части выражения (26) равно нулю. Среднее по времени значение второго слагаемого равно среднему потоку мощности.

В выражении для мгновенного потока мощности первый член соответствует переменной реактивной мощности, которая не излучается в полуслой, а локализована в окрестности торца (места приложения нагрузки). Второе слагаемое соответствует активной мощности и описывает энергию, переносимую в дальнее поле. На рис. 5, а для момента времени $t = T/8$ и коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$ представлена частотная зависимость мгновенного потока активной мощности P_1 (сплошная кривая) и реактивной мощности P_2 (штриховая кривая), подводимой к единице ширины слоя несамоуравновешенной нагрузки $f(y) = \sqrt{2}$. На рис. 5, б эти же величины показаны для самоуравновешенной

нагрузки $f(y) = \cos(\pi y)$. Здесь

$$2G\omega P_1 = \mathbf{Re} \widetilde{P}_z = \int_{-1}^1 f(y)V_z(y) \cos \psi dy,$$

$$2G\omega P_2 = \mathbf{Im} \widetilde{P}_z = \int_{-1}^1 f(y)V_z(y) \sin \psi dy.$$

В области низких частот для несамоуравновешенной нагрузки активная мощность существенно превышает реактивную, что свидетельствует об эффективном излучении в полуслой. Вблизи частоты краевого резонанса ситуация меняется. Реактивная мощность значительно возрастает и эффективность излучения в среду падает. На частоте краевого резонанса реактивная мощность меняет знак. При дальнейшем увеличении частоты ($\Omega_e \geq \Omega_2 \geq \Omega^*$) реактивная мощность оказывается по модулю больше активной вплоть до появления распространяющихся мод высших порядков.

Для самоуравновешенной нагрузки (см. рис. 5, б) ситуация несколько иная. В области низких частот реактивная мощность превышает активную до частоты краевого резонанса. При Ω_e активная мощность имеет максимум, превышающий реактивную мощность. Последняя меняет знак на частоте краевого резонанса и по модулю превышает активную мощность до $\Omega_2 = 2.44$. При дальнейшем росте частоты активная мощность по модулю остается более реактивной вплоть до Ω^* .

На частоте краевого резонанса активная мощность, обусловленная самоуравновешенной нагрузкой $f(y) = \cos(\pi y)$, приблизительно в два раза

меньше активной мощности, обусловленной несамоуравновешенной нагрузкой $f(y) = \sqrt{2}$. В то же время, в области низких частот (например, при $\Omega_2 = 1$) активная мощность, обусловленная самоуравновешенной нагрузкой, на три порядка меньше, чем в случае несамоуравновешенной нагрузки. Такое резкое изменение соотношения между активными мощностями, обусловленными разными системами сил, на частоте краевого резонанса приводит к увеличению роли самоуравновешенной нагрузки в дальнем волновом поле на частоте Ω_e .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе анализа энергетических характеристик волнового поля в упругом полуслое можно сформулировать аналог статического принципа Сен-Венана для гармонических колебаний. При этом обсуждаемый эффект имеет место только для частот, лежащих ниже частоты краевого резонанса. Таким образом, понятие энергетической эквивалентности позволяет сформулировать принцип Сен-Венана для гармонических колебаний полуслоя следующим образом: при одновременном действии несамоуравновешенной и самоуравновешенной систем сил напряжения от самоуравновешенной системы возникают только вблизи торца. На значительном расстоянии от места приложения нагрузки эффект от самоуравновешенной составляющей пренебрежимо мал, по сравнению с действием несамоуравновешенной ее части.

- Новожилов В. В. Теория упругости.– Л.: Судпромгиз, 1958.– 370 с.
- Лурье А. И. Теория упругости.– М.: Наука, 1970.– 940 с.
- de Saint-Venant B. Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément // Mém. Savants Etrang.– 1856.– 14.– P. 233–560.
- de Saint-Venant B. Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes // J. Math. Pures Appl., Ser. 2.– 1856.– 1.– P. 89–189.
- Сен-Венан Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм.– М.: Физматгиз, 1961.– 518 с.
- Ляв А. Математическая теория упругости.– М.: ОНТИ НКТП, 1935.– 674 с.
- Poncelet J. V. Introduction à la mécanique industrielle, physique ou expérimentale.– Metz: Thiel, 1839.– 719 p.
- Джанелидзе Г. Ю. Принцип Сен-Венана (к столетию принципа) // Труды Ленингр. политехн. ин-та.– 1958.– N 192.– С. 7–20.
- Папкович П. Ф. Теория упругости.– Л.-М.: Оборонгиз, 1939.– 640 с.
- Тимошенко С. П. Курс теории упругости. Часть I.– СПб.: Изд-во Ин-та инж. путей сообщ., 1914.– 239 с.
- Тимошенко С. П. Курс теории упругости.– К.: Наук. думка, 1972.– 507 с.
- Безухов Н. И. Теория упругости и пластичности.– М.: ГИТТЛ, 1953.– 420 с.
- Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.– М.: АН СССР, 1954.– 647 с.
- Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости.– М.: Физматгиз, 1959.– 364 с.
- Tourin R. A. Saint-Venant's principle // Arch. Ration. Mech. Anal.– 1965.– 18.– P. 83–96.
- Тимошенко С. П. Теория упругости.– Л.-М.: ОНТИ ГТТИ, 1934.– 451 с.
- Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости.– М.: Наука, 1975.– 576 с.
- Mises R., von. On Saint-Venant principle // Bull. Amer. Math. Soc.– 1945.– 51.– P. 555–562.
- Boussinesq J. Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent, dans ces solides, des effort quelconques exercés sur une petite partie de leur surface ou de leur intérieur.– Lille: Danel, 1885.– 720 p.
- Gurtin M. E. The linear theory of elasticity // Handbuch der Physik: vol. VIa/2.– Berlin/New York: Springer, 1972.
- Horgan C. O. Recent developments concerning Saint-Venant's principle: An update // Appl. Mech. Rev.– 1989.– 42.– P. 295–303.
- Horgan C. O. Recent developments concerning Saint-Venant's principle: A second update // Appl. Mech. Rev.– 1996.– 49.– P. 101–111.
- Knowles J. K. On Saint-Venant's principle in the two-dimensional linear theory of elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal.– 1966.– 21.– P. 1–22.
- Goodier J. N. A general proof of Saint-Venant principle // Phil. Mag., Ser. 7.– 1937.– 23.– P. 607–609.
- Zanaboni O. Dimostrazione generale del principio del de Saint-Venant // Atti Accad. Lincei Rend.– 1937.– 25.– P. 117–121.
- Zanaboni O. Sull' approssimazione dovuta al principio del de Saint-Venant nei solidi prismatici isotropi // Atti Accad. Lincei Rend.– 1937.– 26.– P. 340–345.
- Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
- Boley B. A. The application of Saint-Venant's principle in dynamical problem // J. Appl. Mech.– 1955.– E22.– P. 204–206.
- Новожилов В. В., Слепян Л. И. О принципе Сен-Венана в динамике стержней // Прикл. мат. мех.– 1965.– 29.– С. 261–281.
- Berdichevsky V., Foster D. J. On Saint-Venant's principle in the dynamics of elastic beams // Int. J. Solids Struct.– 2003.– 40.– P. 3293–3310.
- Babenkova E., Kaplunov J. Low-frequency decay conditions for a semi-infinite elastic strip // Proc. Roy Soc. Lond.– 2004.– A460.– P. 2153–2169.

32. Babenkova E., Kaplunov J. Radiation conditions for a semi-infinite elastic strip // Proc. Roy Soc. Lond.– 2005.– **A461**.– P. 1163–1179.
33. Torvik P. J., McClatchey J. J. Responce of an elastic plate to a cyclic longitudinal force // J. Acoust. Soc. Amer.– 1968.– **44**.– P. 59–64.
34. Grandin H. T., Little R. W. Dynamic Saint-Venant region in a semi-infinite elastic strip // J. Elast.– 1974.– **4**.– P. 131–146.
35. Гомилко А. М., Городецкая Н. С., Мелешко В. В. Динамический принцип Сен-Венана для упругой полубесконечной полосы // Теор. прикл. мех.– 1991.– N 22.– С. 40–46.
36. Исакович М. А. Общая акустика.– М.: Наука, 1973.– 496 с.
37. Гомилко А. М., Городецкая Н. С., Мелешко В. В. Краевой резонанс при вынужденных изгибных колебаниях полуполосы // Акуст. ж.– 1991.– **37**.– С. 908–913.
38. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях.– М.: Мир, 1981.– 600 с.
39. Гомилко А. М., Мелешко В. В. Гармонические волны в полубесконечном упругом слое // Докл. АН УССР, Сер. А.– 1985.– N 6.– С. 28–32.
40. Мелешко В. В., Татуян В. Б. Изгибные волны Лэмба в полубесконечном упругом слое // Прикл. мех.– 1986.– **22**, N 9.– С. 114–117.
41. Мелешко В. В., Татуян В. Б. Возбуждение гармонических волн Лэмба в полубесконечном упругом слое // Акуст. ж.– 1987.– **33**.– С. 919–926.
42. Гомилко А. М., Городецкая Н. С., Мелешко В. В. Продольные волны Лэмба в полубесконечном упругом слое // Прикл. мех.– 1991.– **27**, N 6.– С. 53–59.
43. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С. Анализ физических особенностей явления краевого резонанса в упругих телах // Акуст. вісн.– 2004.– **7**, N 1.– С. 30–43.