

УДК 534.64.222:616.24-073

# ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ХРЯЩЕЙ ТРАХЕИ И БРОНХОВ ЧЕЛОВЕКА

В. Г. БАСОВСКИЙ, И. В. ВОВК

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 11.10.2005

На основе использования теории изгибных колебаний круговых стержней разработана расчетная схема для количественной оценки вынужденных колебаний трахеального и бронхиального хрящей при воздействии на них радиальной нагрузки. Установлено, что вынужденные колебания хрящей имеют сложный характер, обусловленный, главным образом, тремя первыми модами. Полученные результаты позволяют утверждать, что при возникновении звука внутри трахеи и бронхов их стенки будут совершать не пульсирующие (как предполагалось ранее), а достаточно сложные колебания.

На основі використання теорії згинальних коливань кругових стержнів розроблено розрахункову схему для кількісної оцінки вимушених коливань трахеального і бронхиального хрящів під дією на них радіального навантаження. Встановлено, що вимушені коливання хрящів мають складний характер, обумовлений, головним чином, трьома першими модами. Одержані результати дозволяють стверджувати, що при виникненні звуку всередині трахеї й бронхів їхні стінки будуть здійснювати не пульсуючі (як передбачалося раніше), а досить складні коливання.

On the basis of the theory of flexural vibrations of circular rods an algorithm has been developed for quantitative estimating forced vibrations of tracheal and bronchial cartilages under the action of radial loading. It is proved that the forced vibrations of cartilages are of complex character determined mainly by the first three vibrational modes. The obtained results allow asserting that at a sound emergence inside the trachea and bronchi their walls will rather perform complex vibrations than the pulsating ones (as it was supposed before).

## ВВЕДЕНИЕ

Данная статья является естественным продолжением работы [1], в которой рассматривались собственные частоты и формы колебаний хрящей трахеи и бронхов человека. Интерес к особенностям колебаний этих элементов бронхиального дерева связан с решением проблем генерирования и распространения звуковых волн в респираторной системе в норме и патологии (подробнее см., например, в [2, 3]).

Ниже мы рассмотрим вынужденные колебания трахеальных и бронхиальных хрящей человека под воздействием равномерной нагрузки, что чрезвычайно важно при качественном и количественном анализе прохождения звуковых колебаний через стенки трахеи и бронхов. Выбор такого типа нагрузки обусловлен тем, что в диапазоне частот, интересных для практики, волновой размер диаметров трахеи и бронхов существенно меньше единицы. Поэтому ожидать возникновения какой-либо нагрузки на внутренние стенки трахеи и бронхов (в плоскости нормальной к их продольным осям), отличной от равномерной, не приходится.

## 1. ТЕОРИЯ

Так же, как и в [1], трахеальные и бронхиальные хрящи будем моделировать тонкими не-

замкнутыми круговыми стержнями. Исходя из этого, рассмотрим изгибные колебания кругового стержня постоянного поперечного сечения со свободными концами под воздействием гармонической радиально распределенной силы с интенсивностью  $q(\theta) \exp(-j\omega t)$ , где  $\omega$  – круговая частота вынужденных колебаний;  $j$  – мнимая единица. Продольная ось стержня в недеформированном состоянии очерчена по дуге окружности радиуса  $R_0$  и углового размера  $\theta_0$  (рис. 1, а). При этом крутильными и продольными деформациями пренебрегаем, считая, что применима гипотеза плоской нормали и поперечные сечения не деформируются. Условия равновесия элемента  $ds$  стержня (см. рис. 1, в) при вынужденных изгибных колебаниях имеют вид [4]

$$\frac{d\hat{N}}{d\theta} - \hat{Q} = -mR_0\omega^2 V, \quad (1)$$

$$\frac{d\hat{Q}}{d\theta} + \hat{N} = -mR_0\omega^2 W - R_0 q, \quad (2)$$

$$\frac{d\hat{M}}{d\theta} - R_0\hat{Q} = 0. \quad (3)$$

Здесь и далее временной множитель  $\exp(-j\omega t)$  опускаем. В уравнениях (1)–(3) введены следующие обозначения:  $\hat{N}$ ,  $\hat{Q}$ ,  $\hat{M}$  – амплитуды нормаль-

ной и перерезывающей сил и изгибающего момента в текущем сечении стержня в его плоскости соответственно;  $V$ ,  $W$  – амплитуды компонент перемещения сечений стержня в тангенциальном и радиальном направлениях соответственно;  $m$  – погонная масса стержня.

Присоединим к уравнениям движения элемента известные зависимости из теории тонких криволинейных стержней:

$$\hat{M} = -\frac{EI}{R_0^2} \left( \frac{d^2 W}{d\theta^2} + W \right), \quad (4)$$

$$W = \frac{dV}{d\theta}, \quad (5)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $I = b^3 h / 12$  – момент инерции поперечного сечения стержня (см. рис. 1, б) относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний.

Отметим, что используя равенства (4) и (5), уравнения (1)–(3) можно свести к одному дифференциальному уравнению шестого порядка относительно искомой функции  $W(\theta)$ , как это сделано в статье [1]. Однако выполнять здесь это упрощение нецелесообразно, поскольку ниже для решения задачи будет использовано свойство попарной ортогональности собственных форм кругового стержня, которые являются вектор-функциями с компонентами, соответствующими тангенциальным и радиальным перемещениям сечений стержня.

Краевые условия для стержня со свободными концами имеют вид

$$M = Q = N = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \pm \frac{\theta_0}{2}.$$

Для вынужденных гармонических колебаний, используя соотношения (2)–(4), краевые условия можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} -\frac{EI}{R_0^2} \left( \frac{d^2 W}{d\theta^2} + W \right) \Big|_{\theta = \pm \theta_0/2} &= 0, \\ -\frac{EI}{R_0^3} \left( \frac{d^3 W}{d\theta^3} + \frac{dW}{d\theta} \right) \Big|_{\theta = \pm \theta_0/2} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\left[ \frac{EI}{R_0^3} \left( \frac{d^4 W}{d\theta^4} + \frac{d^2 W}{d\theta^2} - \Omega^2 W \right) - R_0 q \right] \Big|_{\theta = \pm \theta_0/2} = 0,$$

где  $\Omega$  – безразмерная круговая частота:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_*}, \quad \omega_* = \frac{1}{R_0^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

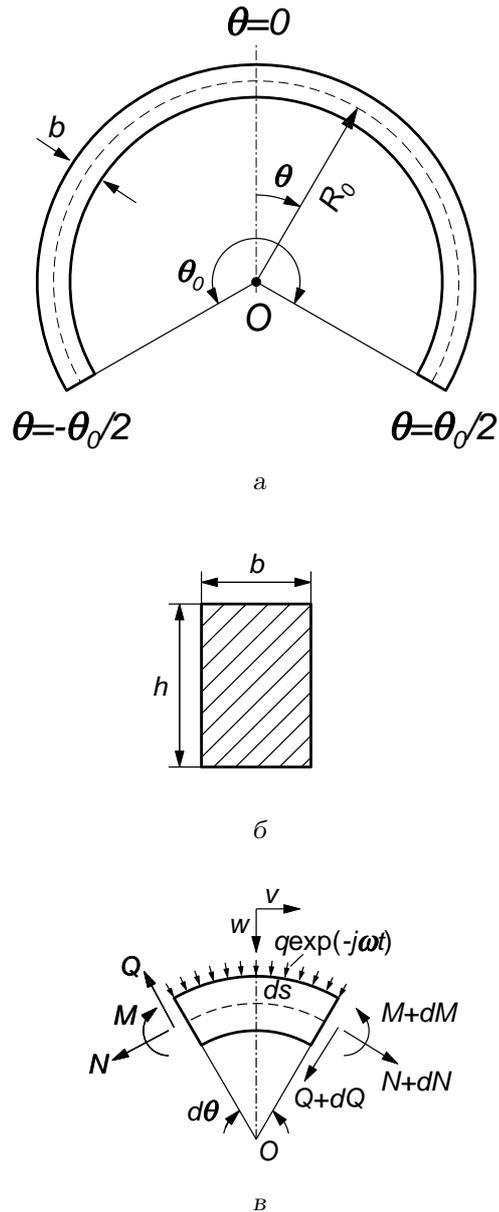


Рис. 1. Механическая модель хряща:  
 а – незамкнутое круговое кольцо (круговой стержень),  
 б – поперечное сечение кольца,  
 в – элемент кольца и действующие на него силы и моменты

Уравнения равновесия (1)–(3), соотношения (4) и (5), а также краевые условия (6) в совокупности составляют математическую модель вынужденных колебаний рассматриваемых хрящей под воздействием гармонической радиально распределенной силы.

Рассмотрим вынужденные колебания хряща под воздействием распределенной симметрично относительно сечения  $\theta = 0$  радиальной силы. Учти-

тывая неоднородность краевого условия для нормальных усилий, представим общее решение для перемещений хряща  $\xi = (V, W)$  в виде ряда по симметричным нормированным собственным формам  $\xi_\gamma = (V_\gamma(\theta), W_\gamma(\theta))$  колебаний хряща в вакууме [1] и некоторого произвольного дополнительного перемещения  $\tilde{\xi} = (\tilde{V}(\theta), \tilde{W}(\theta))$ , которое необходимо лишь для удовлетворения неоднородных краевых условий:

$$\xi = \sum_{\gamma=0}^{\infty} G_\gamma \xi_\gamma + \tilde{G} \tilde{\xi}. \quad (7)$$

Здесь  $\tilde{G}$  и  $G_\gamma$  – неизвестные коэффициенты.

Нулевой член ряда в формуле (7) соответствует поступательному перемещению хряща как абсолютно жесткого тела с нулевой собственной частотой. Здесь и ниже собственные формы колебаний хрящей нормированы на величину

$$\int_0^{\theta_0/2} (V_\gamma^2 + W_\gamma^2) d\theta = 1, \quad \gamma = 0, 1, \dots$$

Тангенциальные и радиальные перемещения хряща не являются независимыми функциями, а связаны между собой соотношением (5). Поэтому достаточно указать способ вычисления только какой-нибудь одной из компонент перемещения. Например, способ вычисления амплитуд радиальных компонент собственных форм колебаний хряща  $W_\gamma(\theta)$  описан в статье [1]. Амплитуду радиальной компоненты дополнительного перемещения  $\tilde{W}(\theta)$  выберем в следующем виде:

$$\tilde{W}(\theta) = \left(1 - \left(\frac{\theta}{\theta_0/2}\right)^2\right)^4. \quad (8)$$

Это позволяет тождественно удовлетворить краевые условия для изгибающего момента и перерезывающей силы. Подставляя соотношение (7) с учетом выражения (8) в третье краевое условие (6) и учитывая, что функции  $W_\gamma(\theta)$  удовлетворяют соответствующим однородным краевым условиям для нормальных усилий [1], получаем алгебраическое уравнение, связывающее неизвестные коэффициенты  $\tilde{G}$  и  $G_\gamma$ :

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty} G_\gamma (\Omega^2 - \Omega_\gamma^2) W_\gamma \left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \frac{384}{(\theta_0/2)^4} \tilde{G} = -\frac{R_0^4}{EI} q \left(\frac{\theta_0}{2}\right). \quad (9)$$

Здесь  $\Omega_\gamma$  – собственные безразмерные круговые частоты хряща [1].

Алгебраизацию уравнений движения (1)–(3) осуществим на основе свойств ортогональности собственных форм колебаний хряща. С этой целью вначале приведем эту систему к двум уравнениям, исключив из первых двух перерезывающую силу с помощью третьего и соотношения (4). После подстановки в эти уравнения представления (7) для перемещения стержня с использованием соотношений (5) и (8) получаем следующие два дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\theta} - \sum_{\gamma=0}^{\infty} G_\gamma \frac{dN_\gamma}{d\theta} &= \\ &= -\frac{EI}{R_0^3} \left[ \sum_{\gamma=0}^{\infty} G_\gamma (\Omega^2 - \Omega_\gamma^2) V_\gamma + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{G} \Omega^2 \tilde{V} + \tilde{G} \left( \frac{d^3 \tilde{W}}{d\theta^3} + \frac{d\tilde{W}}{d\theta} \right) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} N - \sum_{\gamma=0}^{\infty} G_\gamma N_\gamma &= \\ &= -\frac{EI}{R_0^3} \left[ \sum_{\gamma=0}^{\infty} G_\gamma (\Omega^2 - \Omega_\gamma^2) W_\gamma + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{G} \Omega^2 \tilde{W} - \tilde{G} \left( \frac{d^4 \tilde{W}}{d\theta^4} + \frac{d^2 \tilde{W}}{d\theta^2} \right) \right] - R_0 q. \end{aligned}$$

Умножим обе части системы (10) на вектор собственных колебаний хряща  $\xi_l$  и проинтегрируем по переменной  $\theta$  от 0 до  $\theta_0/2$ . Все перекрестные члены, содержащие произведения  $\xi_\gamma \xi_l$  ( $\gamma \neq l$ ), обращаются в нуль. После очевидных преобразований с использованием краевых условий для нормальных сил  $N$  и  $N_\gamma$  приходим к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} G_l (\Omega^2 - \Omega_l) + \tilde{G} (\Omega^2 I_{1l} + I_{2l}) &= \\ &= -\frac{R_0^4}{EI} \int_0^{\theta_0/2} q W_l d\theta, \end{aligned} \quad (11)$$

$$l = 0, 1, \dots$$

Здесь введены обозначения

$$I_{1l} = \int_0^{\theta_0/2} (\tilde{V}V_l + \tilde{W}W_l)d\theta;$$

$$I_{2l} = \int_0^{\theta_0/2} \left[ \left( \frac{d^3\tilde{W}}{d\theta^3} + \frac{d\tilde{W}}{d\theta} \right) V_l - \left( \frac{d^4\tilde{W}}{d\theta^4} + \frac{d^2\tilde{W}}{d\theta^2} \right) W_l \right] d\theta.$$

Значения этих интегралов нетрудно получить в явном виде [5], однако здесь они не приводятся из-за громоздкости выражений.

Бесконечная система линейных алгебраических уравнений (9), (11) является исходной для получения количественных данных об изгибных колебаниях хрящей трахеи и главных бронхов человека под воздействием гармонической радиальной силы, распределенной с интенсивностью  $q(\theta)$ .

## 2. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

При проведении конкретных расчетов использовались следующие геометрические и физические характеристики хрящей [1]:

- для трахеального хряща  $2R_0 = 1.75 \cdot 10^{-2}$  м,  $\theta_0 = 240^\circ$ ,  $b = 1.64 \cdot 10^{-3}$  м,  $h = 3.2 \cdot 10^{-3}$  м;
- для хряща главных бронхов  $2R_0 = 1.18 \cdot 10^{-2}$  м,  $\theta_0 = 180^\circ$ ,  $b = 1.1 \cdot 10^{-3}$  м,  $h = 2.18 \cdot 10^{-3}$  м.

Плотность биоткани хрящей принималась равной  $1.1 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, а модуль Юнга –  $4.4 \cdot 10^6$  Па.

Как показано в [1], зависимости перемещений сечений хрящей от угла для их собственных форм колебаний являются достаточно сложными функциями. Это обусловлено наличием противофазных участков колебаний и соответственно узловых точек, количество которых растет с ростом номера собственной формы колебаний хряща. Что касается собственных частот колебаний, то для принятых физических и геометрических параметров хрящей в диапазон  $f \leq 2000$  Гц, который интересен с точки зрения клинической практики, попадают следующие их значения:

- для хряща трахеи –  $f_\gamma = 0, 60.7, 362.1, 980.4, 1886.0$  Гц;
- для хряща главных бронхов –  $f_\gamma = 0, 168.7, 1020.6$  Гц.

Как уже было сказано, нулевое значение собственной частоты соответствует перемещению хрящей как абсолютно жесткого тела.

Рассмотрим вынужденные колебания хрящей под воздействием равномерно распределенной радиальной силы  $q(\theta) = q_0$ . Для них важной характеристикой является их радиальная колебательная скорость. Легко показать, что нормированные относительно величины  $R_0^4 q_0 \omega_*/(EI)$  коэффициенты разложения  $\tilde{G}_\gamma$  колебательной скорости хрящей по их собственным формам колебаний связаны с определенными выше коэффициентами  $G_\gamma$  и  $\tilde{G}$  следующим соотношением:

$$\tilde{G}_\gamma = -j \Omega \frac{EI}{R_0^4 q_0} (G_\gamma + \tilde{G}I_{1\gamma}), \quad \gamma = 0, 1, \dots$$

На рис. 2 изображены зависимости значений модулей этих коэффициентов от частоты. Поскольку при постановке задачи не учитывались потери в материале хрящей, то при приближении к собственной частоте хряща  $f_\gamma$  соответствующий коэффициент  $\tilde{G}_\gamma$  будет неограниченно возрастать. Чтобы этого не происходило, необходимо учесть потери. При постановке рассматриваемой задачи это можно сделать либо вполне строго, либо с достаточной для практики точностью приближенно с помощью типичной резонансной кривой (если известна добротность или декремент затухания материала хряща). К сожалению, такие данные в доступной нам литературе отсутствуют. Поэтому при построении зависимостей, изображенных на рис. 2, предполагалось, что потери в материале хрящей не зависят от частоты, а добротность колебаний в окрестности собственных частот хрящей равна 10.

Прежде всего, обратимся к рис. 2, а. Как видно из графика, основной вклад в колебания хряща трахеи (под воздействием рассматриваемой нагрузки) вносят первые три моды. При этом значимость вкладов каждой из них существенно зависит от частоты. Так, на низких частотах (примерно до 40 Гц) основной вклад вносит нулевая мода. Поэтому хрящ здесь движется как единое целое, т. е. совершает осциллирующие колебания вдоль своей оси симметрии. В области примерно от 40 до 100 Гц главную роль играют колебания, соответствующие первой собственной форме, поскольку частота 60.7 Гц соответствует первой собственной частоте хряща. На более высоких частотах нулевая и первая мода вносят примерно одинаковый вклад и форма колебаний хряща сильно усложняется. Далее, в зоне 362 Гц, где находится третья собственная частота хряща, его колебания становятся еще более сложными, поскольку вклад всех

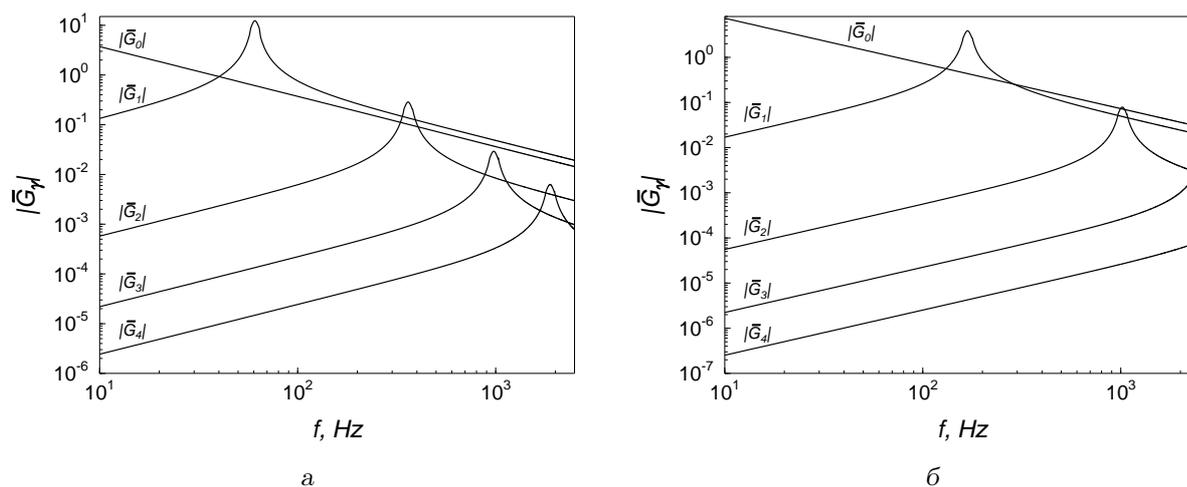


Рис. 2. Частотные зависимости модулей коэффициентов разложения по собственным формам колебательной скорости:

а – хряща трахеи, б – хряща главных бронхов

трех мод здесь примерно равен. Наконец, выше 400 Гц основной вклад в колебания трахейного хряща вносят только первые две моды.

В отличие от трахейного хряща, колебания бронхиального хряща формируют главным образом две моды – нулевая и первая, см. рис. 2, б. При этом на низких частотах (примерно до 100 Гц) основную роль играет нулевая мода. В области от 100 до 250 Гц преобладает первая мода, поскольку ее собственная частота составляет 168.7 Гц. Выше по частоте вклады этих двух мод примерно равны. Лишь в районе 1020 Гц, где находится третья собственная частота, возможно небольшое влияние третьей моды.

Учитывая результаты приведенного анализа, становится очевидным, что при возникновении по каким-либо причинам звуковых колебаний в трахеи и бронхах их формы радиальных колебаний будут принципиально отличаться от простейшей осесимметричной (пульсирующей) формы, принятой для моделей стенок трахеи и бронхов в более ранних работах (см., например [2, 3]).

## ВЫВОДЫ

1. На основе использования теории изгибных колебаний круговых стержней разработана расчетная схема для количественной оценки вынужденных колебаний трахеального и бронхиального хрящей при воздействии на них равномерной радиальной нагрузки.

2. На основе численного анализа установлено, что вынужденные колебания хрящей имеют сложный характер, который определяется главным образом тремя первыми модами. Однако вклад отдельных мод в общее движение хрящей не одинаков и существенно зависит от частоты.

3. Полученные результаты позволяют утверждать, что при возникновении звука внутри трахеи и бронхов их стенки будут совершать не пульсирующие (как предполагалось ранее), а достаточно сложные колебания, характеризующиеся наличием противофазных участков и узловых точек.

1. Басовский В. Г., Вовк И. В. Собственные частоты и формы колебаний хрящей трахеи и бронхов человека // Акуст. вісн.– 2002.– **5**, N 3.– С. 5–11.
2. Вовк И. В., Вовк О. И. Распространение звука в бронхиальном дереве человека. Часть I. Теория // Акуст. вісн.– 2000.– **3**, N 2.– С. 19–31.
3. Habib R. H., Chalker R. B., Suki B., Jackson A. C. Airway geometry and wall mechanical properties estimated from subglottal input impedance in humans // J. Appl. Physiol.– 1994.– **77**, N 1.– P. 441–451.
4. Ляв А. Математическая теория упругости.– М.-Л.: ОНТИ, 1935.– 674 с.
5. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Марычев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции.– М.: Наука, 1981.– 800 с.