

УДК 539.374+539.67

# ДИНАМИЧЕСКИЕ И КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЯЗКОУПРУГОГО СЛОЯ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКИ

Г. А. ВОРОПАЕВ, Я. В. ЗАГУМЕННЫЙ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 10.10.2005*

В результате численного решения плоской нестационарной задачи о колебаниях изотропного вязкоупругого слоя переменной толщины и конечной длины под действием локальной импульсной нагрузки определены кинематические и динамические характеристики слоя как функции времени при разных геометрических и механических параметрах покрытия. Исследованы зависимости динамической шероховатости поверхности, а также скорости колебания поверхности слоя от механических свойств и геометрии вязкоупругого покрытия. Изучено поведение во времени кинетической, потенциальной, воспринимаемой и поглощаемой покрытием энергий. Определены соотношения параметров вязкоупругого слоя и нагрузки, при которых величина воспринятой энергии внешнего импульсного возмущения максимальна.

У результаті чисельного розв'язання двовимірної нестационарної задачі про коливання ізотропного в'язкопружного шару змінної товщини і скінченної довжини під дією локального імпульсного навантаження визначені кінематичні та динамічні характеристики шару як функції часу при різних геометричних і механічних параметрах покриття. Досліджені залежності динамічної шорсткості поверхні, а також швидкості коливання поверхні в'язкопружного покриття від його механічних властивостей та геометрії. Вивчено поведінку в часі для кінетичної, потенційної енергій, енергії, яка сприймається та поглинається покриттям. Визначені співвідношення параметрів в'язкопружного шару та навантаження, при яких величина сприйнятої енергії зовнішнього імпульсного збурення є максимальною.

From solving the nonstationary problem on vibration of an isotropic viscoelastic layer with varying thickness and finite length subjected to action of the pulse loading, the kinematic and dynamic characteristics of the layer are determined as time functions at various geometric and mechanical coating parameters. The surface dynamic roughness and vibrational velocity of the layer's surface are investigated as the dependencies from the mechanical properties and geometry of a viscoelastic coating. Time behavior of the kinematic, potential, accepted (accumulated) and dissipated energies is studied. The relative values of the parameters of the viscoelastic layer and loading are determined, for which the accumulated energy from the external pulse disturbance is maximal.

## ВВЕДЕНИЕ

Проблемы снижения гидравлических потерь в гидротранспорте и гидродинамического сопротивления трения во время движения тел в водной и воздушных средах остаются актуальными на современном этапе технического прогресса. В качестве одного из подходов к их решению предлагалось наносить на элементы конструкций, непосредственно контактирующих с жидкостью, тонкий слой эластичного материала, способного поглощать пульсационную энергию внешнего потока (вязкоупругое покрытие) [1]. Действительно, при турбулентном обтекании поверхностей даже в условиях, когда осредненное течение стационарно, в потоке присутствуют высокочастотные осцилляции пульсаций скоростей и давлений, отвечающие за высокие значения коэффициентов сопротивления трения. Однако возмущения в потоке при взаимодействии с вязкоупругим покрытием приводят к деформации поверхности обтекаемого тела, инициируя образование распространяющи-

хся волн, которые в свою очередь изменяют структуру потока.

Для оценки такого взаимовлияния и описания взаимодействия предложен ряд моделей, в том числе метод распределенного демпфирования, в котором для оценки демпфирующих свойств покрытия применяется квазигармонический подход, решение отыскивается в классе бегущих волн, а покрытия моделируются однородными бесконечными слоями постоянной толщины [2, 3]. К сожалению, такая постановка задачи не позволяет учесть конечность длины обтекаемой поверхности, локальность приложенной нагрузки, изменимость свойств и толщины покрытия [8, 9].

Существует ряд работ [11, 12], которые представляют результаты решения задачи о начальной стадии развития возмущений в пограничном слое на вязкоупругом покрытии, но в них рассматриваются только покрытия постоянной толщины и конечность длины практически не учитывается, так как рассматривается только начальный этап формирования возмущенного поля скорости.

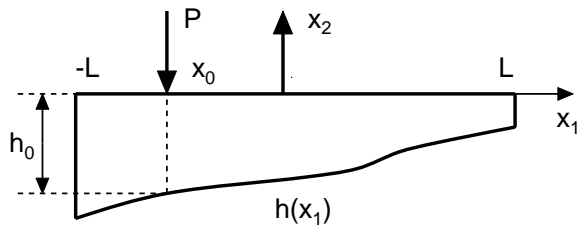


Рис. 1. Вязкоупругий слой переменной толщины и конечной длины

Поэтому в данной работе рассматривается задача нестационарного деформирования вязкоупругого слоя конечной длины и переменной толщины под действием локального импульсного источника на поверхности с использованием модели вязкоупругой среды, описываемой интегральными соотношениями между напряжениями и деформациями с функцией релаксации, записанной в виде суммы убывающих экспонент. Такая постановка задачи позволяет определять любые характеристики покрытий с произвольной геометрией как по поверхности обтекания, так и по толщине, а выбранная модель вязко-упругости дает возможность более объективно описывать поведение реальных эластичных материалов.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Кинематические и динамические характеристики вязкоупругого слоя (рис. 1) определяются из решения линеаризованного уравнения колебания сплошной среды

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j}. \tag{1}$$

Граничные условия на верхней поверхности задаются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{x_2 x_2} |_{x_2=0} &= -P(x_1, 0, t), \\ \sigma_{x_1 x_2} |_{x_2=0} &= Q(x_1, 0, t), \end{aligned} \tag{2}$$

где через

$$P(x_1, 0, t) = \begin{cases} P_0, & x_1 \in [x_0 - \ell, x_0 + \ell], & 0 < t \leq t_0, \\ 0, & x_1 \notin [x_0 - \ell, x_0 + \ell], & t > t_0; \end{cases}$$

$$Q(x_1, 0, t) = \begin{cases} Q_0, & x_1 \in [x_0 - \ell, x_0 + \ell], & 0 < t \leq t_0, \\ 0, & x_1 \notin [x_0 - \ell, x_0 + \ell], & t > t_0 \end{cases}$$

обозначены нормальная и касательная нагрузки;  $x_0$  – центральная точка площадки воздействия на

грузки;  $\ell$  – половина ее длины. На нижней и боковых поверхностях заданы условия твердых границ:

$$\begin{aligned} \xi_1 |_{x_2=h(x_1)} &= \xi_2 |_{x_2=h(x_1)} = \\ &= \xi_1 |_{x_1=\pm L} = \xi_2 |_{x_1=\pm L} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

В случае свободного слоя

$$\begin{aligned} \sigma_{x_2 x_2} |_{x_2=h(x_1)} &= \sigma_{x_1 x_2} |_{x_2=h(x_1)} = \\ &= \xi_1 |_{x_1=\pm L} = \xi_2 |_{x_1=\pm L} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

В работе используется интегральное представление соотношения между напряжениями и деформациями [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\vec{x}, t) &= \lambda(t)\theta(\vec{x}, t)\delta_{ij} + 2\mu(t)\varepsilon_{ij}(\vec{x}, t) + \\ &+ \int_0^t \left[ \theta(\vec{x}, t-s) \frac{d\lambda(s)}{ds} + 2\varepsilon_{ij}(\vec{x}, t-s) \frac{d\mu(s)}{ds} \right] ds, \end{aligned} \tag{5}$$

где динамический сдвиговый модуль моделируется функцией релаксации, которая записывается в виде суммы убывающих экспонент [5]

$$\mu(t) = \mu_0 + \sum_{j=1}^N \mu_j e^{-t/\tau_j}, \tag{6}$$

а динамический модуль  $\lambda(t)$  определяется из условия, что динамический объемный модуль для рассматриваемых полимерных материалов равен статическому:

$$K(t) = \lambda(t) + \frac{2}{3}\mu(t) = \lambda_0 + \frac{2}{3}\mu_0.$$

Отсюда

$$\lambda_j = -\frac{2}{3}\mu_j, j = 1, \dots, N,$$

$$\lambda(t) = \lambda_0 - \frac{2}{3} \sum_{j=1}^N \mu_j e^{-t/\tau_j},$$

где

$$\theta = \varepsilon_{ii};$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right);$$

$\vec{x} = (x_1, x_2)$ ;  $\xi_i$  – амплитуды перемещений вдоль соответствующих осей координат;  $\tau_j$  – времена релаксации;  $\mu_0$  – статический модуль сдвига.

## 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

Для преобразования расчетной области в прямоугольную производится замена переменных

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{x_1}{L}, & \eta_2 &= \frac{x_2}{h(x_1)}, \\ \bar{t} &= \frac{t}{T_0}, & T_0 &= \frac{L}{C_\lambda}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $h(x_1)$  – переменная толщина покрытия;  $C_\lambda = \sqrt{(\lambda(0) + 2\mu(0))/\rho}$  – скорость распространения нормальной волны в вязкоупругом теле.

После подстановки выражений для напряжений (5) в уравнения движения сплошной среды (1) с учетом замены переменных (7), безразмерные уравнения в перемещениях, описывающие колебание вязкоупругого слоя переменной толщины, принимают вид:

$$\begin{aligned} &(\tilde{\lambda}_0 + 2\tilde{\mu}_0)D_{11}\xi_1 + \tilde{\mu}_0 D_{22}\xi_1 + \\ &+ (\tilde{\lambda}_0 + \tilde{\mu}_0)D_{12}\xi_2 - \\ &- \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{\mu}_j}{\tau_j} \left\{ \int_0^{T_0\bar{t}} \left[ \frac{4}{3}D_{11}\xi_1 + D_{22}\xi_1 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{3}D_{12}\xi_2 \right]_{T_0(\bar{t}-\bar{s})} e^{-\bar{s}/\tau_j} d\bar{s} \right\} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \bar{t}^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\mu}_0 D_{11}\xi_2 + (\tilde{\lambda}_0 + 2\tilde{\mu}_0)D_{22}\xi_2 + \\ &+ (\tilde{\lambda}_0 + \tilde{\mu}_0)D_{12}\xi_1 - \\ &- \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{\mu}_j}{\tau_j} \left\{ \int_0^{T_0\bar{t}} \left[ D_{11}\xi_2 + \frac{4}{3}D_{22}\xi_2 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{3}D_{12}\xi_1 \right]_{T_0(\bar{t}-\bar{s})} e^{-\bar{s}/\tau_j} d\bar{s} \right\} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \bar{t}^2}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_0 &= \frac{\lambda_0}{\rho C_\lambda^2}; & \tilde{\mu}_0 &= \frac{\mu_0}{\rho C_\lambda^2}; \\ \tilde{\mu}_j &= \frac{\mu_j}{\rho C_\lambda^2}, & j &= 1, \dots, N; \\ h' &= \frac{dh}{dx_1}; & h'' &= \frac{d^2h}{dx_1^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{11} &= L^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial \eta_1^2} + \eta_2^2 L^2 \frac{h'^2}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta_2^2} - \\ &- 2\eta_2 L \frac{h'}{h} \frac{\partial^2}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} + L^2 \frac{\eta_2}{h} \left( 2 \frac{h'^2}{h} - h'' \right) \frac{\partial}{\partial \eta_2}; \end{aligned}$$

$$D_{22} = L^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{L^2}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta_2^2};$$

$$\begin{aligned} D_{12} &= L^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{L}{h} \frac{\partial^2}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} - \\ &- L^2 \frac{h'}{h^2} \left( \frac{\partial}{\partial \eta_2} + \eta_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta_2^2} \right). \end{aligned}$$

Граничные условия записываются в следующем виде:

$$\xi_1 = \xi_2 = 0 \quad \text{при} \quad \eta_2 = -1 \quad \text{и} \quad \eta_1 = \pm 1;$$

$$\begin{aligned} &- \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{\mu}_j}{\tau_j} \left\{ \int_0^{T_0\bar{t}} \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_2} + \frac{1}{L} \frac{\partial \xi_2}{\partial \eta_1} \right]_{T_0(\bar{t}-\bar{s})} \times \right. \\ &\left. \times e^{\bar{s}/\tau_j} d\bar{s} \right\} + \\ &+ \tilde{\mu}_0 \left( \frac{1}{h} \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_2} + \frac{1}{L} \frac{\partial \xi_2}{\partial \eta_1} \right) = \frac{\bar{Q}(\eta_1, 0, \bar{t})}{\rho C_\lambda^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &- \frac{2}{3} \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{\mu}_j}{\tau_j} \left\{ \int_0^{T_0\bar{t}} \left[ \frac{2}{h} \frac{\partial \xi_2}{\partial \eta_2} - \frac{1}{L} \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_1} \right]_{T_0(\bar{t}-\bar{s})} \times \right. \\ &\left. \times e^{\bar{s}/\tau_j} d\bar{s} \right\} + \\ &+ (\tilde{\lambda}_0 + 2\tilde{\mu}_0) \frac{1}{h} \frac{\partial \xi_2}{\partial \eta_2} + \tilde{\lambda}_0 \frac{1}{L} \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_1} = - \frac{\bar{P}(\eta_1, 0, \bar{t})}{\rho C_\lambda^2} \end{aligned}$$

при  $\eta = 0$ .

## 3. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Полученную систему интегро-дифференциальных уравнений решаем конечно-разностным методом с использованием неявной пространственно-факторизованной схемы второго порядка точности с центральными разностями по

времени и пространственным переменным [6, 7]:

$$\begin{aligned}
 & \left[ E - \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{L^2}{h^2} \tilde{\mu}(0) \Lambda_{22} \right] \times \\
 & \quad \times \left[ E - \frac{1}{2} \Delta t^2 (\tilde{\lambda}(0) + 2\tilde{\mu}(0)) \Lambda_{11} \right] \times \\
 & \quad \quad \quad \times (\xi_1^{n+1} + \xi_1^{n-1}) = \\
 & = 2\xi_1^n + \Delta t^2 (\tilde{\lambda}(0) + 2\tilde{\mu}(0)) \Lambda'_{11} \xi_1^n + \\
 & \quad + \Delta t^2 (\tilde{\lambda}(0) + \tilde{\mu}(0)) \Lambda'_{12} \xi_2^n - \\
 & - \Delta t^3 \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{\mu}_j}{\tau_j} \left\{ \sum_{\ell=0}^n \left[ \frac{4}{3} (\Lambda_{11} + \Lambda'_{11}) \xi_1^{n-\ell} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{L^2}{h^2} \Lambda_{22} \xi_1^{n-\ell} + \frac{1}{3} \Lambda'_{12} \xi_2^{n-\ell} \right] e^{-\ell \Delta t / \tau_j} \right\}, \\
 & \left[ E - \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{L^2}{h^2} (\tilde{\lambda}(0) + 2\tilde{\mu}(0)) \Lambda_{22} \right] \times \\
 & \quad \times \left[ E - \frac{1}{2} \Delta t^2 \tilde{\mu}(0) \Lambda_{11} \right] \times \\
 & \quad \quad \quad \times (\xi_2^{n+1} + \xi_2^{n-1}) = \\
 & = 2\xi_2^n + \Delta t^2 \tilde{\mu}(0) \Lambda'_{11} \xi_2^n + \\
 & \quad + \Delta t^2 (\tilde{\lambda}(0) + \tilde{\mu}(0)) \Lambda'_{12} \xi_1^n - \\
 & - \Delta t^3 \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{\mu}_j}{\tau_j} \left\{ \sum_{\ell=0}^n \left[ (\Lambda_{11} + \Lambda'_{11}) \xi_2^{n-\ell} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{4}{3} \frac{L^2}{h^2} \Lambda_{22} \xi_2^{n-\ell} + \frac{1}{3} \Lambda'_{12} \xi_1^{n-\ell} \right] e^{-\ell \Delta t / \tau_j} \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned}
 \Lambda'_{11} &= L^2 \frac{\eta_2}{h} \left( 2 \frac{h'^2}{h} - h'' \right) \Lambda_2 + \\
 & \quad + \eta_2^2 h'^2 \frac{L^2}{h^2} \Lambda_{22} - 2\eta_2 h' \frac{L}{h} \Lambda_{12}; \\
 \Lambda'_{12} &= \frac{L}{h} \Lambda_{12} - h' \frac{L^2}{h^2} (\eta_2 \Lambda_{22} + \Lambda_2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda_2 \omega_{ij} &= \frac{\omega_{i+1j} - \omega_{i-1j}}{2\Delta\eta_2}; \\
 \Lambda_{11} \omega_{ij} &= \frac{\omega_{i+1j} - 2\omega_{ij} + \omega_{i-1j}}{\Delta\eta_1^2}; \\
 \Lambda_{22} \omega_{ij} &= \frac{\omega_{ij+1} - 2\omega_{ij} + \omega_{ij-1}}{\Delta\eta_2^2}; \\
 \Lambda_{12} \omega_{ij} &= \frac{\omega_{i+1j+1} + \omega_{i-1j-1} - \omega_{i-1j+1} - \omega_{i+1j-1}}{4\Delta\eta_1 \Delta\eta_2}.
 \end{aligned}$$

Граничные условия на свободной поверхности запишутся в разностном виде следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\tilde{\mu}(0)}{h} \frac{3\xi_{1iM}^{n+1} - 4\xi_{1iM-1}^{n+1} + \xi_{1iM-2}^{n+1}}{2\Delta\eta_2} = \\
 & = \frac{\bar{Q}_i^{n+1}}{\rho C_\lambda^2} - \tilde{\mu}(0) \frac{1}{L} \frac{\xi_{2i+1M}^n - \xi_{2i-1M}^n}{2\Delta\eta_1} + \\
 & + \Delta t \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\tilde{\mu}_j}{\tau_j} \sum_{\ell=0}^n \left[ \frac{1}{L} \frac{\xi_{2i+1M}^{n-\ell} - \xi_{2i-1M}^{n-\ell}}{2\Delta\eta_1} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{h} \frac{3\xi_{1iM}^{n-\ell} - 4\xi_{1iM-1}^{n-\ell} + \xi_{1iM-2}^{n-\ell}}{2\Delta\eta_2} \right] e^{-\ell \Delta t / \tau_j} \right\}, \\
 & \frac{\tilde{\lambda}(0) + 2\tilde{\mu}(0)}{h} \frac{3\xi_{2iM}^{n+1} - 4\xi_{2iM-1}^{n+1} + \xi_{2iM-2}^{n+1}}{2\Delta\eta_2} = \\
 & = -\frac{\bar{P}_i^{n+1}}{\rho C_\lambda^2} - \tilde{\lambda}(0) \frac{1}{L} \frac{\xi_{1i+1M}^n - \xi_{1i-1M}^n}{2\Delta\eta_1} + \\
 & + \frac{2}{3} \Delta t \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\tilde{\mu}_j}{\tau_j} \sum_{\ell=0}^n \left[ -\frac{1}{L} \frac{\xi_{1i+1M}^{n-\ell} - \xi_{1i-1M}^{n-\ell}}{2\Delta\eta_1} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{h} \frac{3\xi_{2iM}^{n-\ell} - 4\xi_{2iM-1}^{n-\ell} + \xi_{2iM-2}^{n-\ell}}{\Delta\eta_2} \right] e^{-\ell \Delta t / \tau_j} \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Полученная схема реализована последовательными одномерными прогонами с использованием дополнительного итерационного процесса. Последний введен для стабилизации ошибки, вносимой разнесением по временным слоям производных в граничных условиях (11), а также ошибки, появляющейся в результате осреднения искомым сеточных функций при операторах левой части конечно-разностного уравнения (10) в виде полусуммы на предыдущем и последующем временных слоях. На основе метода Неймана доказана абсолютная устойчивость данной конечно-разностной схемы. Исследование решения на измельчающейся

сетке и при уменьшении шага по времени показало сходимость численной схемы к точному решению.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

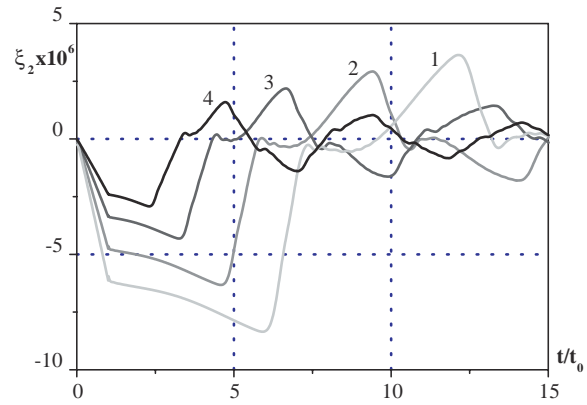
При воздействии на вязкоупругий слой локальной нагрузки, прикладываемой мгновенно и действующей на конечном промежутке времени, в нем формируется волновое движение. Его характеристики зависят от механических и геометрических параметров слоя и нагрузки.

Проведенный расчет подтвердил классические результаты для нестационарного деформирования вязкоупругого слоя: амплитуда прогиба вязкоупругого покрытия пропорциональна величине нагрузки и обратно пропорциональна статическому и динамическому модулям материала. Вместе с тем, полученные результаты выявили аномальные зависимости деформирования от свойств материала. На рис. 2–4 приведены данные об изменении нормального смещения поверхности в центре зоны воздействия нагрузки для разных отношений статического модуля сдвига  $\mu_0$  к величине нормальной нагрузки, толщин слоя в области приложения нагрузки, значений вязкости материала при различных коэффициентах  $\mu_1$  и временах релаксации  $\tau_1$  (вязкость моделировалась одним временем релаксации и динамическим коэффициентом).

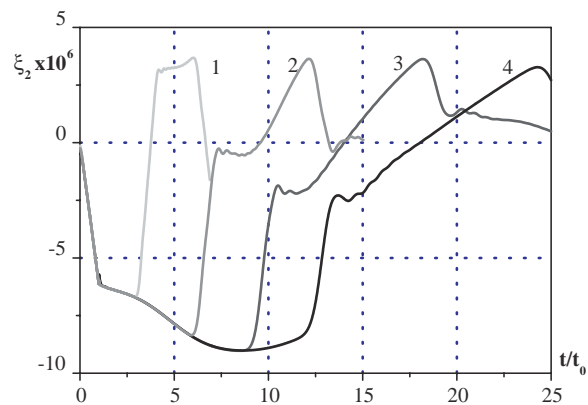
В процессе начального деформирования поверхности вязкоупругого слоя можно выделить три основных временных интервала, предшествующих достижению максимального прогиба поверхности слоя:

- 1) интервал воздействия нагрузки  $(0, t_0]$ ;
- 2) интервал  $(t_0, t_\mu]$  между временем прекращения действия нагрузки и временем прихода сдвиговой волны от концов зоны нагрузки в рассматриваемую точку поверхности (здесь  $t_\mu \approx \ell/C_\mu$ );
- 3) интервал  $(t_\mu, t_h]$  между временем прихода сдвиговой волны в рассматриваемую точку и временем достижения поверхности нормальной волной, отраженной от основания слоя, где  $t_h = 2h_0/C_\lambda$ , а также интервал достижения максимального вспучивания поверхности слоя после прихода отраженной волны на нее  $(t_h, t_{вс}]$ , где  $t_h < t_{вс} < 2t_h$ .

Амплитуда прогиба  $\xi_2^{\text{нп}}$  на интервале воздействия нагрузки обратно пропорциональна сумме статического и динамического модулей. На втором интервале, если  $t_\mu < t_h$ , происходит увеличение



а



б

Рис. 2. Амплитуды колебания поверхности в центральной точке зоны нагрузки во времени:

а – для разных значений статического модуля  $\mu_0/P = 20, 33, 67, 130$  (кривые 1–4);

б – для разных значений толщины слоя в области приложения нагрузки  $h_0/L = 0.025, 0.05, 0.075, 0.1$  (кривые 1–4) при  $\mu_1/\mu_0 = 1.7, \tau_1 = 10^{-4}$  с,  $t_0 = 10^{-4}$  с

прогиба поверхности эквидистантно для различных  $\mu_0$  при одинаковой толщине слоя и плотности материала (см. рис. 2, а). На третьем интервале  $t > t_h$  восстановление поверхности происходит со скоростью, пропорциональной скорости нормальной волны для данного материала при  $t_\mu < t_h$ . Если же  $t_\mu > t_h$ , то восстановление происходит медленнее, так как в этом случае суммируются разнонаправленные смещения сдвиговой и отраженной нормальной волн от неподвижной поверхности. С ростом толщины слоя в области приложения нагрузки до значения  $h_0 = 0.5C_\lambda t_\mu$  прогиб увеличивается. Дальнейшее утолщение слоя не приводит к увеличению прогиба.

Формирование вспучивания поверхности в зоне воздействия нагрузки начинается после прихода

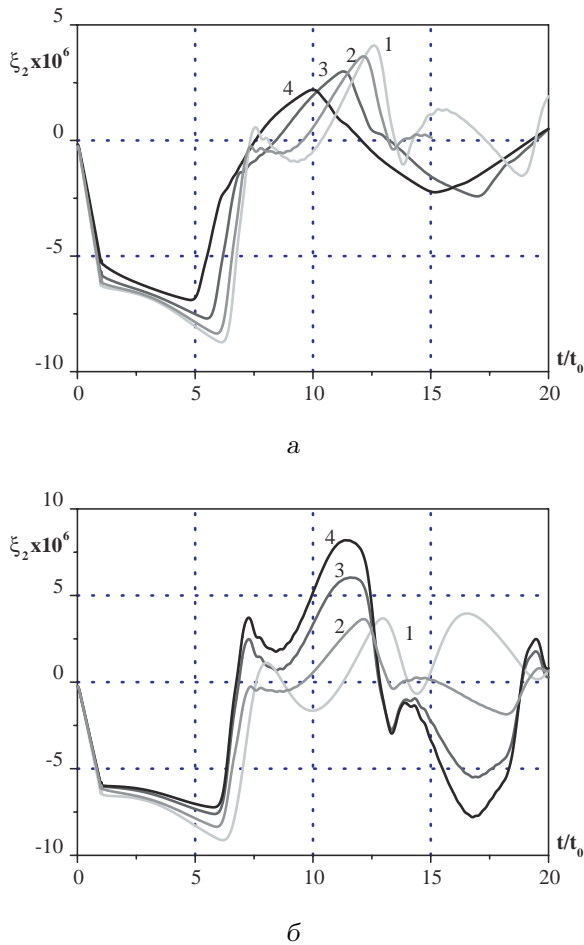


Рис. 3. Амплитуды колебания поверхности в центральной точке зоны нагрузки во времени:

а – для разных значений динамического модуля  $\mu_1/\mu_0 = 1, 1.7, 3.3, 6.7$  (кривые 1–4);

б – для разных значений времени релаксации  $\tau_1/t_0 = 0.1, 1, 5, 20$  (кривые 1–4) при  $h_0 = 5$  мм,  $\mu_0/P = 20$ ,  $t_0 = 10^{-4}$  с

на поверхность отраженного сигнала ( $t > t_h$ ). Оно протекает значительно сложнее, так как здесь уже начинают проявляться вязкость и взаимодействие возмущений от концов площадки нагрузки. Следует, однако, отметить, что основные закономерности процесса сохраняются – амплитуда вспучивания обратно пропорциональна  $\mu_0 + \mu_1$ . При фиксированной вязкости отношение вспучивания к прогибу поверхности  $|\xi_2^{bc}|/|\xi_2^{np}|$  изменяется незначительно с изменением  $\mu_0$ . Вспучивание поверхности изменяется незначительно с изменением толщины в области воздействия нагрузки при фиксированных механических параметрах слоя (см. рис. 2, б).

С увеличением вязкости (динамического модуля  $\mu_1$ ) амплитуды смещения также уменьшаются, так как материал становится динамически более

твердым вследствие увеличения скоростей распространения нормальной и сдвиговой волн уменьшаются времена достижения максимального прогиба и вспучивания поверхности вязкоупругого слоя (см. рис. 3, а). Отношение  $|\xi_2^{bc}|/|\xi_2^{np}|$  уменьшается с увеличением динамического модуля (например, при возрастании  $\mu_1$  в 7 раз оно падает почти в 3 раза). При этом исчезают высокочастотные локальные осцилляции, амплитуда которых меньше или сопоставима с амплитудами основных волн, распространяющихся в слое.

С увеличением времени релаксации величина прогиба уменьшается, причем существует интервал времен релаксации ( $\tau_{opt} \approx 10^{-4}$ ), при котором вспучивание принимает минимальные значения (см. рис. 3, б).

Прогибы и вспучивания в фиксированной точке поверхности, возникающие в результате воздействия на вязкоупругий слой нормальной нагрузки, определяются взаимодействием сдвиговых волн, распространяющихся от концов зоны повышенного давления, а также нормальной волны, порожденной начальным импульсом и движущейся в поперечном направлении.

На рис. 4 представлены результаты расчета временной эволюции амплитуды колебания поверхности в центре зоны повышенного давления при различных величинах площадки нагружения. Так, при  $t_\mu < t_h$  прогиб поверхности определяется вкладом сдвиговой волны, пришедшей от концов зоны нагрузки в рассматриваемую точку. Если  $t_\mu > t_h$  (время прихода сдвиговой волны в рассматриваемую точку превышает время достижения поверхности нормальной волной, отраженной от неподвижной границы), то прогиб поверхности не увеличивается. При этом проявляется вклад сдвиговой волны в величину вспучивания поверхности в данной точке.

С увеличением площадки воздействия нагрузки максимальная скорость отклика поверхности практически не изменяется, но увеличивается интервал времени, на котором скорость отклика принимает наибольшие значения (рис. 5, а). На прогиб и вспучивание поверхности вязкоупругого слоя преобладающее влияние оказывают сдвиговые волны, распространяющиеся от концов зоны повышенного давления, тогда как скорость отклика поверхности в большей мере предопределяется нормальными волнами, отраженными от нижней жесткой границы.

Скорость движения поверхности в зоне действия нагрузки обратно пропорциональна величине статического модуля и практически постоянна на интервале нагружения при малой вязкости

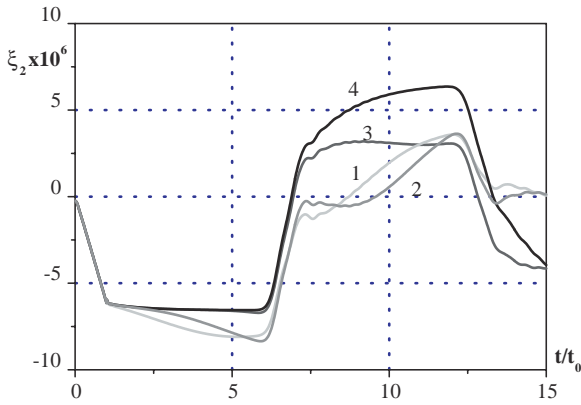


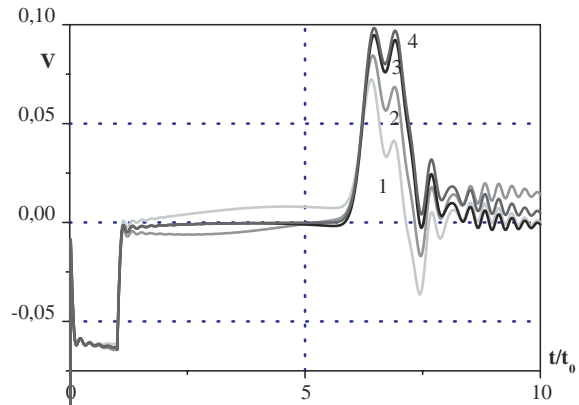
Рис. 4. Амплитуды колебания поверхности во времени в центральной точке зоны приложения нагрузки для различных величин площадки нагрузки  $\ell/h_0 = 0.4, 0.8, 1.6, 4$  (кривые 1–4)

материала слоя (см. рис. 5, б). С увеличением динамического модуля при фиксированном  $\mu_0$  скорость уменьшается. При этом она растет во времени, достигая максимального значения в момент  $t = t_0$ . После прекращения действия нагрузки скорость принимает практически нулевые значения до момента прихода на поверхность отраженной нормальной волны, после чего она резко возрастает. С увеличением  $\mu_1$  скорость восстановления поверхности уменьшается. Увеличение вязкости материала влияет на скорость восстановления значительно сильнее, чем на скорость движения поверхности под действием нагрузки (так, при увеличении  $\mu_1$  в 7 раз  $V_{от}$  уменьшается более чем в 2 раза, тогда как  $V_{пр}$  – почти в 1.2 раза).

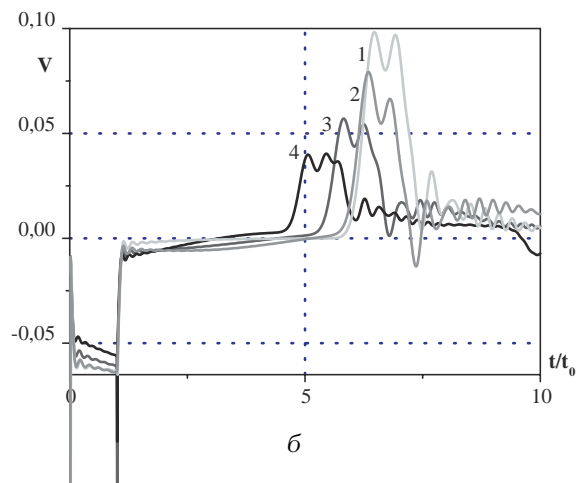
При изменении времени релаксации величина нормальной скорости на интервале  $0 < t < t_h$  меняется незначительно, а скорость отклика поверхности вязкоупругого покрытия принимает минимальные значения при  $\tau \approx \tau_{opt}$ .

Величина воспринимаемой энергии вязкоупругим слоем на стадии воздействия нагрузки, скорость ее диссипации и характер перераспределения по всему слою также зависят от геометрических и динамических параметров слоя.

На рис. 6 и 7 приведены результаты расчета энергетических характеристик слоя: воспринимаемая энергия и ее перераспределение между кинетической, потенциальной и поглощенной энергиями при воздействии на слой локальной нагрузки заданной интенсивности. Величина воспринятой энергии вязкоупругим слоем за время нагружения прямо пропорциональна величине приложенной нагрузки и обратно пропорциональна сум-



а



б

Рис. 5. Изменение во времени скорости колебания поверхности в центральной точке зоны нагрузки:

а – для различных величин площадки нагрузки  $\ell/h_0 = 0.2, 0.4, 0.8, 4$  (кривые 1–4);

б – для разных значений динамического модуля  $\mu_1/\mu_0 = 1, 1.7, 3.3, 6.7$  (кривые 1–4) при  $h_0 = 5$  мм,  $\mu_0/P = 20, \tau_1 = 10^{-4}$  с,  $t_0 = 10^{-4}$  с

ме статического и динамического модулей. Она не зависит от толщины покрытия, если продолжительность воздействия нагрузки  $t_0 < t_h$ . Если же  $t_0 > t_h$ , то с приходом на поверхность отраженной от нижней границы нормальной волны вязкоупругий слой перестает воспринимать энергию внешнего возмущения, и определенную ее часть отдает обратно в поток (см. рис. 6). Этот критерий позволяет достаточно надежно определять толщину слоя заданных параметров, максимально воспринимающего энергию внешнего возмущения давления.

На рис. 7 представлены изменения во времени кинетической и потенциальной энергии слоя, а также величина диссипируемой энергии в слое. Видно, что сумма кинетической, потенциальной и

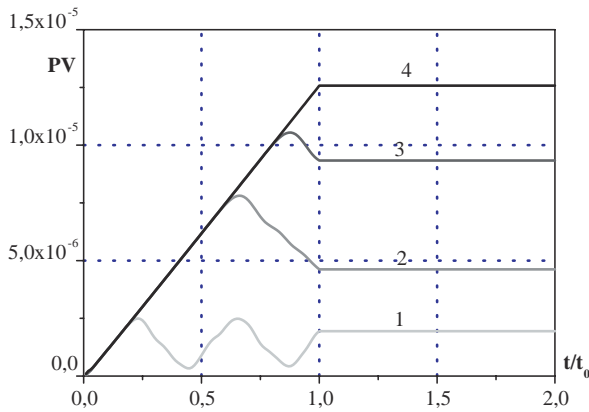


Рис. 6. Величина воспринятой энергии для разных значений толщины слоя  $h_0 = 0.5, 1.5, 2.5$  мм (кривые 1–4) при  $\mu_0/P = 165$ ,  $\mu_1/\mu_0 = 1.7$ ,  $\tau_1 = 10^{-4}$  с,  $t_0 = 10^{-4}$  с

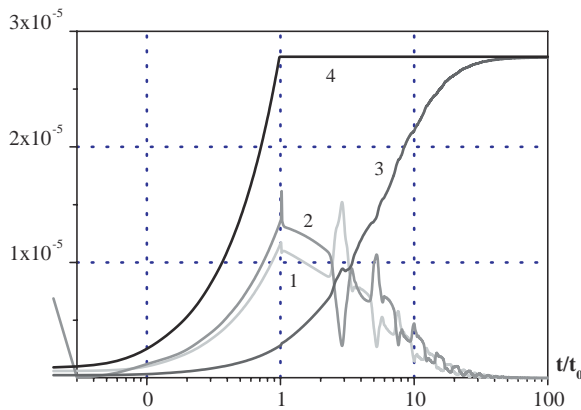


Рис. 7. Потенциальная (1), кинетическая (2), поглощенная (3) и воспринятая (4) энергии при  $h_0 = 5$  мм,  $\mu_0/P = 33$ ,  $\mu_1/\mu_0 = 1.7$ ,  $\tau_1 = 10^{-4}$  с,  $t_0 = 10^{-4}$  с

диссипируемой энергии равна воспринятой энергии. Выполнение закона сохранения энергии является одним из подтверждений правильности численных результатов. При импульсной нагрузке вязкоупругий слой накапливает практически равные кинетическую и потенциальную энергии. Обмен между ними происходит в моменты времени, которые можно соотнести с периодом толщинного резонанса слоя.

Для проверки эффективности разработанной методики расчета вязкоупругого слоя выполнено сопоставление с результатами исследования по ударному нагружению прямоугольной пластины падающим шаром [10]. При решении вязкоупругой задачи для слоя со свободными от напряже-

ний горизонтальными границами в качестве исходных данных принимался закон изменения во времени давления, измеренного в точке контактного взаимодействия пластины и шара. При расчетах использовались такие значения количественных параметров:  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $h_0 = 0.05$  м,  $L = 0.3$ ,  $\ell = 0.005$  м. Численные результаты показали неплохую согласованность с экспериментом, несмотря на то, что задача нестационарного деформирования вязкоупругого слоя была рассмотрена в плоской постановке, а область контакта предполагалась постоянной во времени (в действительности область контакта шара и пластины представляет собой круг с переменным во времени радиусом).

## ВЫВОДЫ

1. Разработан алгоритм численного решения системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающих колебания вязкоупругого слоя переменной толщины и конечной длины, определены динамические и кинематические характеристики слоя под действием локальной импульсной нагрузки.
2. Определен диапазон времен релаксации, при котором вспучивание поверхности принимает минимальные значения, а также критическое значение толщины слоя, с превышением которого величина прогиба перестает увеличиваться, а вспучивание поверхности не меняется.
3. Вязкость материала слоя влияет на величину прогиба поверхности и скорость проникновения нагрузки в значительно меньшей мере, чем на величину вспучивания и скорость отклика поверхности.
4. Вязкоупругий слой фиксированной толщины воспринимает энергию импульсного внешнего возмущения только на протяжении определенного промежутка времени до прихода на поверхность отраженной нормальной волны.

1. Kramer M. O. Boundary layer stabilization by distributed damping // ASNE J.– 1960, **72**, N 2.– P. 25–34.
2. Козлов Л. Ф., Цыганюк А. И., Бабенко В. В., Никишова О. Д., Воропаев Г. А. Формирование турбулентности в сдвиговых течениях.– К.: Наук. думка, 1985.– 234–265 с.
3. Семенов Б. Н. О взаимодействии эластичной границы с вязким подслоем турбулентного пограничного слоя // Прикл. мех. техн. физ.– 1971, N 3.– С. 58–62.



4. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости.– М.: Мир, 1974.– 338 с.
5. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел.– М.: Наука, 1977.– 384 с.
6. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.– Новосибирск: Наука, 1967.– 197 с.
7. Clifton R. J. A difference method for plane problems in dynamic elasticity // Quart. Appl. Math.– **25**, N 1.– 1967.– P. 97–116.
8. Сенченков И. К. Метод амплитудно-дифференциальной аппроксимации для решения динамических задач вязкоупругости // Прикл. мех.– 1981, **18**, N 9.– С. 57–62.
9. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Об одном методе решения квазистатических и динамических задач вязкоупругости // Прикл. мех.– 1976, **13**, N 4.– С. 3–8.
10. Филиппов А. П., Скляр В. А. Поперечный удар по прямоугольной плите с учетом инерции вращения и перерезывающих сил // Динамика и прочность машин.– 1972.– **14**.– С. 12–19.
11. Wiplier O., Ehrenstein U. Numerical simulation of linear and nonlinear disturbance evolution in a boundary layer with compliant walls // J. Fluids Struct.– 2000.– **14**.– P. 157–182.
12. Xu S., Rempfer D., Lumley J. Turbulence over a compliant surface: Numerical simulation and analysis // J. Fluid Mech.– 2003.– **478**.– P. 11–34.