

УДК 534. 232

# АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СТРУЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

Ю. М. ДУДЗИНСКИЙ

Одесский национальный политехнический университет

Получено 19.10.2005

Рассмотрены вынужденные колебания упругой затопленной струйной оболочки, моделирующие принцип работы прямооточных и противоточных осесимметричных гидродинамических излучателей. Вычислена частотная зависимость амплитуды вынужденных колебаний как функция геометрических и гидродинамических параметров струйной оболочки. Проанализировано влияние свойств жидкости и размеров оболочки на амплитудно-частотную характеристику и добротность осесимметричных гидродинамических излучателей. Теоретические расчеты сопоставлены с результатами экспериментов.

Розглянуто вимушені коливання пружної зануреної струйної оболонки, які моделюють принцип роботи прямооточних і протиточних осесимметричних гідродинамічних випромінювачів. Обчислено частотну залежність амплітуди вимушених коливань як функцію геометричних і гідродинамічних параметрів струйної оболонки. Проаналізовано вплив властивостей рідини і розмірів оболонки на амплітудно-частотну характеристику та добротність осесимметричних гідродинамічних випромінювачів. Теоретичні розрахунки співставлено з результатами експериментів.

Forced vibrations of the elastic flooded jet shell modeling the operation principle of the uniflow and counterflow axially symmetric hydrodynamic radiators are considered. Frequency dependence of the amplitude of forced vibrations is calculated as a function of geometric and hydrodynamic parameters of jet shell. The effect of liquid properties and shell dimensions on the amplitude-frequency characteristic and quality-factor is analyzed. The computations are compared with the experimental results.

## ВВЕДЕНИЕ

Ранее в качестве модели осесимметричных противоточных гидродинамических излучателей (ГДИ) были рассмотрены автоколебания затопленной цилиндрической струйной оболочки [1, 2]. При этом считалось, что одно основание оболочки жестко заземлено, а на другом отсутствуют удлинение и перерезывающие усилия. Поскольку оболочка деформируется только в направлении нормали к ее поверхности, предполагалось отсутствие сдвигающих усилий и крутящих моментов. Кроме того, в любом ее сечении равны нулю изгибающие моменты и перерезывающая сила. У рассматриваемых излучателей частоту основной гармоники акустического сигнала задает упругая затопленная струйная оболочка, а накопителем энергии является первичный вихрь в форме тороида (рис. 1). Пульсации вихря возбуждают струйную оболочку, которая совершает изгибные колебания. При оптимальной скорости струи, когда частота пульсаций первичного вихря совпадает с собственной частотой оболочки, наблюдается максимальный уровень тонального звука [3].

Управлять частотой можно, изменяя геометрию оболочки (например, варьируя параметры сопла и отражателя) [1], создавая избыточное статическое давление в герметичной емкости [2, 4] или меняя скорость истечения струи жидкости из сопла [3, 5].

Первый способ громоздок, второй – не всегда реализуем. Третий способ управления удобен, однако при этом уменьшается амплитуда изгибных колебаний струйной оболочки. Как следствие, снижается уровень акустического сигнала, вплоть до полного исчезновения. Поэтому представляет интерес рассмотреть задачу о вынужденных колебаниях затопленной осесимметричной кольцевой струи.

Зачастую задачи о вынужденных осесимметричных колебаниях цилиндрических оболочек, находящихся под действием акустического поля давлений, решаются методом Фурье [6, 7]. Используемые при этом ряды, описывающие функцию прогиба, обладают медленной сходимостью. Чтобы отразить влияние концевых закреплений, для некоторых оболочек требуется привлекать несколько десятков членов ряда. Это обусловлено тем, что собственные частоты  $\omega_k$  осесимметричных колебаний оболочки при относительно малых числах изгибных полуволн  $k$  остаются практически неизменными. Поэтому результаты вычислений применимы, как правило, для больших  $k$ . Однако в осесимметричных ГДИ поток жидкости формирует оболочку средней длины.

В то же время, уравнение вынужденных колебаний интегрируется в замкнутом виде. Полученное решение может быть использовано для сравнения с приближенными решениями в более сложных задачах этого типа.

### 1. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУЙНОЙ ОБОЛОЧКИ

Ранее показано, что резонансная частота осесимметричных гидродинамических излучателей зависит от свойств рабочей жидкости, гидростатического давления в ней, геометрических параметров оболочки и граничных условий на ее торцах [3–5]. В качестве модели прямооточных и противоточных ГДИ рассматривается упругая затопленная осесимметричная цилиндрическая струйная оболочка.

Уравнения осесимметричных вынужденных колебаний цилиндрической оболочки имеют вид [6]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left( \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{h^2}{12r} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right) w = -\frac{1-\nu^2}{Eh} q_z, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{h^2}{12r} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right) u + \\ & + \frac{h^2}{12r^2} \left( r^2 \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \frac{1}{r^2} + \frac{12}{h^2} \right) w = \\ & = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1-\nu^2}{Eh} q_r, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $h, r$  – толщина стенки и средний радиус оболочки;  $\rho, E, \nu$  – плотность, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки;  $q_z, q_r$  – растягивающая и изгибающая силы, действующие на единицу площади оболочки;  $u, w$  – деформации удлинения и изгиба соответственно. Длину образующей цилиндра примем равной  $\ell$ .

Рассмотрим оболочку средней длины ( $\pi r \ell \sim 1$ ), так что без существенной погрешности можно пренебречь продольными силами инерции ( $q_z = 0$ ) [3, 7, 8]. В уравнении (1) отбросим третье слагаемое, имеющее порядок  $(h/r)^2$  по сравнению со вторым. Тогда при отсутствии осевых сил из уравнения (1) следует соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\nu}{r} w,$$

которое подставим в формулу (2). Кроме того, в выражении (2) пренебрегаем вторым слагаемым во второй скобке, которое имеет порядок малости  $(h/r)^2$ , и приходим к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка в частных производных:

$$\begin{aligned} D \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + D \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{Eh}{r^2} w = -q_r, \\ D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку осесимметричная струя затоплена в жидкости с теми же свойствами, то коэффициентом Пуассона можно пренебречь ( $\nu = 0$ ) [9]. Тогда уравнение (3) с учетом силы инерции единичной поверхности оболочки принимает вид

$$\frac{Eh^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{Eh}{r^2} w = -q_r. \quad (4)$$

Предполагаем, что оболочка, деформируясь под действием сил, равномерно распределенных по ее внутренней поверхности, совершает только изгибные гармонические колебания, т. е.

$$q_r = Q_0 \exp(i\omega t),$$

$$w(z, t) = w(z) \exp(i\omega t).$$

С учетом этого выражение (4) принимает вид

$$\frac{\partial w^4}{\partial z^4} - k^4 w = -f_0, \quad (5)$$

$$k = \sqrt[4]{\frac{12(\rho r^2 \omega^2 - E)}{Eh^2 r^2}}, \quad f_0 = \frac{12Q_0}{Eh^3}. \quad (6)$$

Общее решение неоднородного уравнения (5) имеет вид [10]

$$\begin{aligned} w(z) = C_1 \operatorname{ch}(kz) + C_2 \operatorname{sh}(kz) + \\ + C_3 \cos(kz) + C_4 \sin(kz) + \frac{f_0}{k^4}. \end{aligned} \quad (7)$$

Неизвестные коэффициенты  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$  вычислим из граничных условий. Для противоточного ГДИ (рис. 1, а) на одном конце оболочки ( $z = 0$ ) имеет место жесткое защемление. На другом конце ( $z = \ell$ ) – сдвиг, продольное перемещение и перерезывающее усилие равны нулю [6]:

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad w'(\ell) = w'''(\ell) = 0. \quad (8)$$

Для прямооточного ГДИ (рис. 1, б) один конец оболочки ( $z = 0$ ) жестко защемлен, а другой ( $z = \ell$ ) – свободен [6]:

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad w''(\ell) = w'''(\ell) = 0. \quad (9)$$

В случае прямооточного осесимметричного гидродинамического излучателя при граничных условиях (8) амплитуда вынужденных изгибных колебаний оболочки примет вид

$$\begin{aligned} w(z) = \frac{f_0}{2k^4} \times \\ \times (1 + \cos(k\ell) \operatorname{ch}(k\ell)) [\cos(kz) + \operatorname{ch}(kz) + \\ + \cos(k(\ell-z)) \operatorname{ch}(k\ell) + \cos(k\ell) \operatorname{ch}(k(\ell-z)) - \\ - \sin(k(\ell-z)) \operatorname{sh}(k\ell) + \sin(k\ell) \operatorname{sh}(k(\ell-z))]. \end{aligned} \quad (10)$$

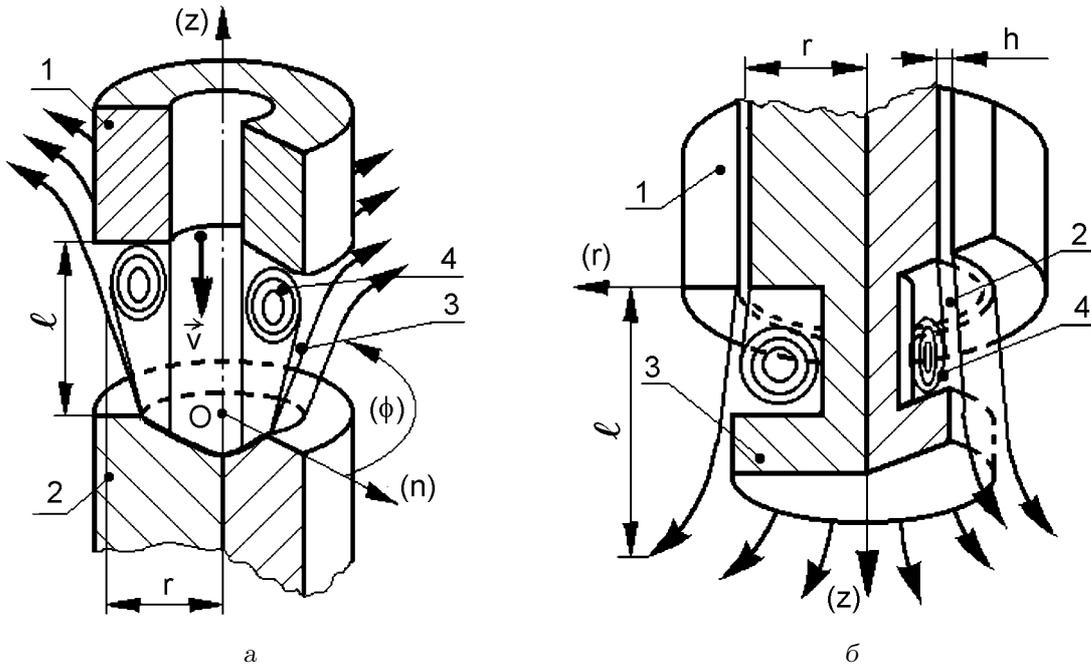


Рис. 1. Модели осесимметричных противоточного (а) и прямоточного (б) ГДИ: 1 – сопло, 2 – отражатель (ступенчатое препятствие), 3 – струйная оболочка, 4 – первичный торoidalный вихрь

Тогда амплитуда колебаний свободного края оболочки ( $z = \ell$ ) будет

$$w_{\text{в}}(\ell) = \frac{f_0}{k^4} \frac{\cos(k\ell) + \text{ch}(k\ell)}{1 + \cos(k\ell) \text{ch}(k\ell)}. \quad (11)$$

Как следует из выражения (6), функции (10) и (11) имеют разрыв при  $k = 0$ . Это условие должно соответствовать резонансным колебаниям оболочки на частоте  $\omega_0$ . Следовательно, выражениями (10) и (11) можно пользоваться в интервале частот выше резонансной, когда  $(\rho r^2 \omega^2 - E) > 0$ . Рассмотрим дорезонансную область, для которой  $(\rho r^2 \omega^2 - E) < 0$ . Проведя математические преобразования, аналогичные приведенным в [8], из формулы (11) получаем

$$w_{\text{н}}(\ell) = \frac{f_0 \cos(\bar{p}\ell) \text{ch}(\bar{p}\ell)}{2\bar{p}^4 (1 + \text{sh}^2(\bar{p}\ell) + \cos^2(\bar{p}\ell))}, \quad (12)$$

$$p = \sqrt[4]{\frac{12(E - \rho r^2 \omega^2)}{E h^2 r^2}}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\sqrt{2}}.$$

В случае противоточного осесимметричного гидродинамического излучателя при граничных условиях (9) амплитуда вынужденных изгибных

колебаний струйной оболочки примет вид

$$w(z) = \frac{f_0}{2k^4 \sin(k\ell) \text{sh}(k\ell)} \times [\cos(k\ell) \text{ch}(k(\ell-z)) - \sin(k\ell) \text{sh}(k(\ell-z)) - \text{ch}(k\ell) \cos(k(\ell-z)) - \text{sh}(k\ell) \sin(k(\ell-z)) + 2 \text{sh}(k\ell) \sin(k\ell) - \text{ch}(kz) + \cos(kz)]. \quad (13)$$

Аналогично вышеизложенному, получим выражения для амплитуды конца  $z = \ell$  выше и ниже резонансной частоты соответственно:

$$w_{\text{в}}(\ell) = \frac{f_0}{k^4 \sin(k\ell) \text{sh}(k\ell)} \times [\sin(k\ell) \text{sh}(k\ell) + \cos(k\ell) - \text{ch}(k\ell)], \quad (14)$$

$$w_{\text{н}}(\ell) = \frac{f_0}{4\bar{p}^4} \frac{1}{[\cos(2\bar{p}\ell) - \text{ch}(2\bar{p}\ell)]} \times [3 \sin(\bar{p}\ell) \text{sh}(\bar{p}\ell) - 2 \cos(\bar{p}\ell) \text{ch}(2\bar{p}\ell) + \cos(2\bar{p}\ell) - \text{ch}(2\bar{p}\ell)]. \quad (15)$$

## 2. АНАЛИЗ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Используя полученные функции амплитуды вынужденных колебаний незащемленного края (11), (12), (14), (15), можно построить амплитудно-частотные характеристики затопленных струйных оболочек и по ним теоретически определить добротность. Для проверки соответствия приведенной математической модели параметрам реального устройства были исследованы амплитудно-частотные характеристики прямооточных и противоточных осесимметричных гидродинамических излучателей (рис. 1). В экспериментах изменялись основные геометрические и гидродинамические параметры ГДИ обоих типов: средний радиус, длина, толщина струйной оболочки, скорость струи на выходе из сопла. При этом исследования проводились в жидкостях с различными свойствами – в отстоянной в течение трех недель водопроводной воде и в трансформаторном масле.

На рис. 2 сплошными линиями представлены амплитудно-частотные характеристики противоточного излучателя в воде (кривая 1) и трансформаторном масле (кривая 2). Частота основной гармоники генерируемого акустического сигнала изменялась за счет изменения скорости струи на выходе из сопла (рис. 1, а). Там же штриховыми линиями показаны теоретические амплитудно-частотные характеристики струйной оболочки в относительных единицах, вычисленные по формулам (14), (15). При расчетах были приняты следующие параметры оболочки: средний радиус  $r = 4.5$  мм, высота  $\ell = 3.5$  мм, толщина  $h_1 = 0.235 \div 0.238$  мм (для воды),  $h_2 = 0.175 \div 0.18$  мм (для трансформаторного масла). Модуль упругости струйной оболочки  $E$  можно выразить через адиабатический модуль объемной упругости жидкости  $\mathcal{K}$  [9, 11]:

$$E = \frac{\mathcal{K}}{3(1-2\nu)} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \chi_i (P^* + \Delta P)^i, \quad (16)$$

где  $P^*$  – предел прочности жидкости на разрыв (для воды – 0.51 МПа, для трансформаторного масла – 0.39 МПа);  $\Delta P_s$  – избыточное, по сравнению с атмосферным, статическое давление в герметичной емкости;  $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \dots$  – коэффициенты, которые практически не изменяются в широком диапазоне температур [9, 11], но зависят от объема включений (мелкодисперсных твердых частиц, растворенного газа, зародышей кавитационных пузырьков и пр.). Как видно на рис. 2, большая плот-

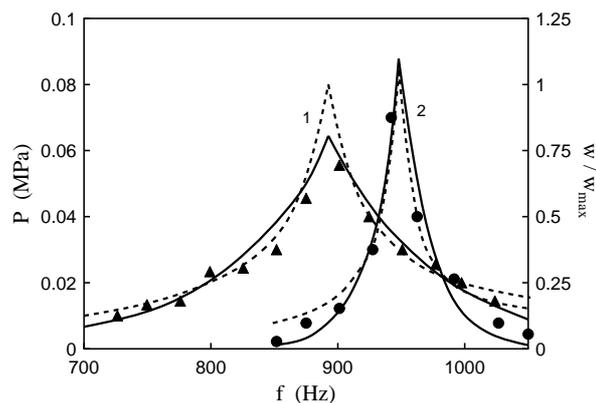


Рис. 2. Зависимости добротности осесимметричных противоточных ГДИ от среднего радиуса  $r$  затопленной осесимметричной струйной оболочки:

1 – в воде, 2 – в трансформаторном масле;  
сплошная – теория, штриховая – эксперимент

ность и, соответственно, большая удельная масса ( $\rho_1 h_1 > \rho_2 h_2$ ) единичной площадки водяной струйной оболочки по сравнению с масляной приводит к понижению резонансной частоты и существенно уменьшению добротности ГДИ. Очевидно, этот фактор является решающим при замене одной рабочей жидкости на другую, несмотря на больший предел прочности воды и, соответственно, больший модуль упругости водяной оболочки по сравнению с масляной.

На рис. 3 сплошными линиями представлены теоретические зависимости добротности затопленных осесимметричных струйных оболочек от среднего радиуса  $r$ , полученные из функций изгибных колебаний по формулам (14), (15). Экспериментальные добротности осесимметричных противоточных ГДИ изображены там же штриховыми линиями для воды (кривые 1) и трансформаторного масла (кривые 2). Изменение радиуса осуществлялось путем замены сопла 1 и отражателя 2 излучателя (рис. 1, а). При этом можно регулировать высоту оболочки ( $\ell \approx r$ ), изменяя расстояние между соплом и отражателем, а толщина  $h$  остается неизменной. Частота возбуждения регулировалась за счет изменения скорости струи на выходе из сопла [4, 8]. Характеристики рабочих жидкостей – температура, гидростатическое давление, концентрация инородных включений – поддерживались неизменными. Акустический сигнал регистрировался калиброванным сферическим пьезокерамическим гидрофоном, а измерение его параметров проводилось с помощью электронного вольтметра, осциллографа и спектроанализатора. Видно, что

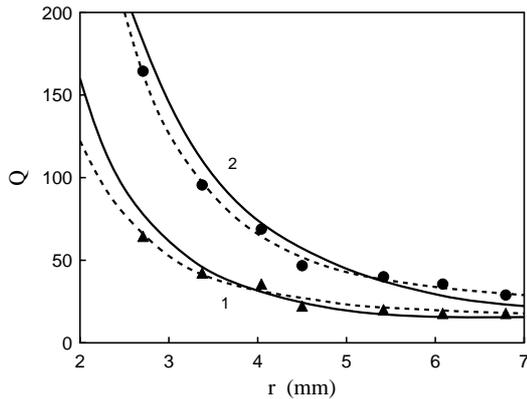


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики противоточного излучателя:

1 – в воде, 2 – в трансформаторном масле; сплошные – эксперимент, штриховые – теория

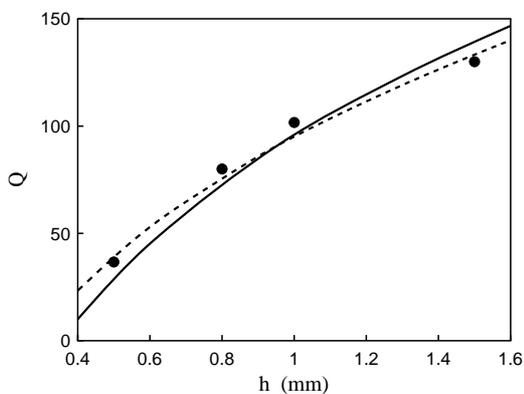


Рис. 4. Зависимости добротности осесимметричных прямооточных ГДИ от толщины  $h$  затопленной осесимметричной струйной оболочки:

сплошная – теория, штриховая – эксперимент

с увеличением характерного размера пульсирующего тела  $r$  добротность колебательной системы уменьшается, асимптотически приближаясь к значению  $Q = 10 \div 12$ .

На рис. 4 сплошной линией представлена теоретическая зависимость добротности от толщины  $h$  затопленной осесимметричной струйной оболочки, полученная на основе функций изгибных колебаний (11), (12). При этом средний радиус  $r$  оставался неизменным. Рабочей жидкостью в соответствующем эксперименте являлась отстоянная водопроводная вода. Штриховой линией изображена регрессия значений добротности, вычисленных по экспериментальным амплитудно-частотным ха-

рактеристикам прямооточных ГДИ. Видно, что с увеличением толщины возрастает добротность гидродинамического излучателя. Как следует из выражений (3), это связано с возрастанием жесткости цилиндрической струйной оболочки ( $D \sim h^3$ ). В то же время, замедление роста функции  $Q(h)$  связано с одновременным увеличением удельной массы  $\rho h$  единичной площадки струйной оболочки.

## ВЫВОДЫ

- Рассмотрены уточненные модели осесимметричных гидродинамических излучателей прямооточного и противоточного типов.
- Применительно к рассматриваемым моделям, сформулирована и решена задача о вынужденных колебаниях затопленной осесимметричной цилиндрической струйной оболочки при разных граничных условиях.
- Показано соответствие между функциями амплитуды изгибных колебаний незаземленного края оболочки и амплитудно-частотными характеристиками реальных излучателей. Это позволяет на стадии проектирования оценивать характеристики ГДИ разных типов по их геометрическим и гидродинамическим параметрам, свойствам рабочей жидкости и условиям в ней вдали от струйной оболочки.
- Проанализировано влияние геометрических параметров затопленной струйной оболочки на добротность рассмотренной динамической системы. Показано, что для обоих типов гидродинамических излучателей добротность уменьшается с возрастанием среднего радиуса и увеличивается с возрастанием толщины оболочки.
- Проанализировано влияние свойств рабочей жидкости на добротность гидродинамических излучателей. При этом использование рабочей жидкости с большей плотностью вызывает более существенное понижение резонансной частоты и уменьшение добротности осесимметричных ГДИ, чем возрастание этих характеристик за счет увеличения модуля объемной упругости жидкости.
- Показано не только качественное, но и количественное соответствие между теоретическими и экспериментальными результатами.

1. Дудзинский Ю. М., Назаренко О. А. Колебания затопленной осесимметричной струи-оболочки // Акуст. вісн.– 2001.– **3**, N 4.– С. 27–35.
2. Дудзинский Ю. М., Дашенко О. Ф. Собственные колебания струйной оболочки в условиях гидростатического давления // Прикл. мех.– 2004.– **40**, N 12.– С. 92–98.
3. Дудзинский Ю. М., Маничева Н. В., Назаренко О. А. Оптимизация параметров широкополосного акустического излучателя в условиях избыточных статических давлений // Акуст. вісн.– 2001.– **4**, N 2.– С. 38–46.
4. Дудзинский Ю. М., Сухарьков О. В. Энергетика прямогочного гидродинамического излучателя в условиях гидростатического давления // Акуст. вісн.– 2004.– **7**, N 1.– С. 44–49.
5. Дудзінський Ю. М., Сухарьков О. В., Манічева Н. В. Модель прямогочного гідродинамічного випромінювача з кільцевим соплом і східчастою перешкодою // Акуст. вісн.– 2004.– **7**, N 4.– С. 48–51.
6. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины.– М.: Изд-во МГУ, 1969.– 695 с.
7. Koval'chuk P. S., Filin V. G. Circumferential traveling waves in field cylindrical shells // Int. Appl. Mech.– 2003.– **39**, N 2.– P. 192–196.
8. Дудзинский Ю. М., Попов В. Г. Вынужденные колебания осесимметричной затопленной струйной оболочки // Прикл. мех.– 2005.– **41**, N 4.– С. 60–65.
9. Корнфельд М. Упругость и прочность жидкостей.– М.: ГИТТЛ, 1951.– 200 с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.: Наука, 1976.– С. 472–473.
11. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику.– М.: Наука, 1966.– 520 с.