

УДК 534.26

ДИНАМІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ В'ЯЗКО-ПРУЖНОГО ШАРУ ПРИ ГАРМОНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ КРУГОВИМ ШТАМПОМ

В. Т. ГРІНЧЕНКО, В. Н. ОЛІЙНИК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 16.02.2005

Розв'язано лінійну задачу про гармонічні коливання в'язко-пружного шару, навантаженого плоским круговим штампом за умов повного прилипання або гладкого контакту. Така постановка моделює контактну взаємодію поверхневих біотканин з вібратором або сенсором. Побудовано ефективний алгоритм для визначення фізико-механічних полів та імпедансу поверхні, яка контактує зі штампом. Встановлено, що у розглянутому діапазоні частот система демонструє резонансну поведінку, причому частота резонансу спадає при збільшенні відносного радіуса штампа. Для малих штампів активна і реактивна частини імпедансу мають один порядок. При зростанні радіуса штампа відносна доля активної частини імпедансу зменшується. Показано, що реактивні частини імпедансу при гладкому контакті та прилипанні мають близькі значення. Водночас, при повному прилипанні штампа активна частина імпедансу шару зростає з частотою значно швидше. Для відносно малих вібраторів і сенсорів величина імпедансу поверхні піддатливого шару значно менша за значення, яке дається стержньовим наближенням для циліндра. Для пристроїв з радіусом контактної зони, який перевищує товщину шару, імпеданс поверхні зростає у порівнянні зі стержньовим наближенням. Така поведінка дозволяє адекватно описати у рамках єдиного підходу результати, одержані різними групами дослідників при різних геометричних параметрах системи "поверхня тіла людини – контактний сенсор (вібратор)". Різде зростання нормальних і дотичних напружень на краю штампа свідчить про тенденцію до його відриву при його коливаннях на поверхні досліджуваного об'єкта. Виходячи з цього, при розробці методик зйому віброакустичних сигналів з піддатливих поверхонь першочергову увагу слід приділяти надійному закріпленню на них країв контактних сенсорів.

Решена линейная задача о гармонических колебаниях вязко-упругого слоя, нагруженного плоским круговым штампом при условиях полного прилипания и гладкого контакта. Такая постановка моделирует контактное взаимодействие поверхностных биотканей с вибратором или датчиком. Построен эффективный алгоритм для определения физико-механических полей и импеданса поверхности, контактирующей со штампом. Установлено, что в рассматриваемом диапазоне частот система демонстрирует резонансное поведение, причем частота резонанса падает при увеличении относительного радиуса штампа. Для малых штампов активная и реактивная части импеданса имеют один порядок. При возрастании радиуса штампа относительная доля активной части импеданса уменьшается. Показано, что реактивные части импеданса при гладком контакте и прилипании имеют близкие значения. Вместе с тем, при полном прилипании штампа активная часть импеданса слоя возрастает с частотой значительно быстрее. Для относительно малых вибраторов и датчиков величина импеданса поверхности податливого слоя значительно меньше значения, которое дается стержневым приближением для цилиндра. Для устройств с радиусом контактной зоны, превышающим толщину слоя, импеданс поверхности возрастает по сравнению со стержневым приближением. Такое поведение позволяет адекватно описать в рамках единого подхода результаты, полученные разными группами исследователей при разных геометрических параметрах системы "поверхность тела человека – контактний датчик (вибратор)". Резкое возрастание нормальных и касательных напряжений на краю штампа свидетельствует о тенденции к его отрыву при колебаниях на поверхности исследуемого объекта. Исходя из этого, при разработке методик съема виброакустических сигналов с податливых поверхностей первоочередное внимание следует уделять надежному закреплению на них краев контактных датчиков.

The paper deals with solution of a linear problem on harmonic vibrations of viscoelastic layer loaded with a smooth plane round piston under the conditions of full adhesion and smooth contact. Such a statement is used to model the contact interaction between the surface biotissue and the vibrator or sensor. An efficient algorithm is developed for determining physico-mechanical fields and impedance of the surface contacting with the piston. It is proved that the system demonstrates resonant behavior in the considered frequency range, and the resonant frequency decreases with the increase of relative piston radius. The active and reactive parts of the impedance are of the same order for small pistons. The piston radius being increased, the share of the active impedance component decreases. It is shown that the reactive impedance components have close values at smooth contact and full adhesion. At the same time, at full adhesion the active component of the layer impedance increases with frequency much faster. For relatively small vibrators and sensors the surface impedance of compliant layer lies significantly below the value given by rod approximation for the cylinder. For the devices with the contact zone radius exceeding the layer height, the impedance increases in comparison with the rod approximation. Such behavior allows the adequate description within the unified approach of the results obtained by different research groups under various geometric parameters of the system "human body surface – contact sensor (vibrator)". A sharp increase of normal and tangential stresses at the piston edge is the evidence of the tendency to its separation when vibrating on the surface of the investigated object. Originating from this fact, when developing the techniques of signal recording from compliant surfaces, the top-priority attention should be given to reliable fixture of the edges of contact sensors.

ВСТУП

Відомо, що присутність контактної сенсорної на піддатливій поверхні може стати причиною істо-

тного спотворення віброакустичного поля в околі точки прийому [1–4]. Тому вивчення особливостей динамічної взаємодії поверхні грудної клітки з пристроями різного призначення є важли-

вим для розвитку методик електронної реєстрації звуків життєдіяльності організму [1, 5–7] і акустичних систем активного контролю стану бронхолегеневого тракту [8, 9].

На жаль, незважаючи на значну кількість експериментальних і теоретичних робіт, присвячених цій проблемі [1, 2, 4, 10–13], на сьогоднішній день не існує чіткого і однозначного уявлення про основні риси формування імпедансних властивостей поверхні тіла людини. Деякі проблеми, пов'язані з трактуванням дослідних даних, викладені в роботах [4, 13, 14]. Так, одне з принципових питань полягає у тому, чи можна вважати контактну взаємодію з сенсором лінійною [2]. Інший суттєвий момент пов'язаний із впливом граничних умов у зоні контакту на величину нормальної складової сили реакції біотканини, яка породжується присутністю сенсора [14, 15]. Нарешті, важливою є роль геометричного фактора: серед дослідників нема єдності у тому, як правильніше моделювати характер залягання поверхневих біотканин – в'язкопружним півпростором [12, 13] чи шаром, який лежить на основі, утвореній більш твердими тканинами [16, 17].

Попередні модельні дослідження [14–16, 18] дозволили з достатньою долею вірогідності обґрунтувати твердження про те, що для відносно легких сенсорів поведінка м'яких поверхневих біотканин тіла людини залишається лінійною, а геометричні та фізичні параметри системи не змінюються. Окрім того, показано, що спрощений підхід, який дозволяє обчислити механічний імпеданс зони контакту в стержньовому наближенні (при нехтуванні поперечними хвилями), виявляється недостатнім. При цьому суттєво враховувати наявність вільної поверхні за краєм сенсора або вібратора, який є, по суті, жорстким штампом, що контактує з тілом.

Ця робота узагальнює результати дослідження [16], в якому моделювалась поведінка в'язкопружного шару біотканини при гармонічному навантаженні гладким штампом. Нижче буде розглянуто ще один важливий випадок граничних умов – повне прилипання штампа до деформівної поверхні, що відповідає закріпленню робочих поверхонь медичних контактних сенсорів на тілі людини за допомогою клею або спеціальної липкої стрічки.

1. МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу про коливання в'язкопружного шару $0 \leq r < \infty$, $0 \leq z \leq h$ при навантаженні його абсолютно жорстким штампом радіуса a . Вважатимемо, що на торці штампа $z = h$ зада-

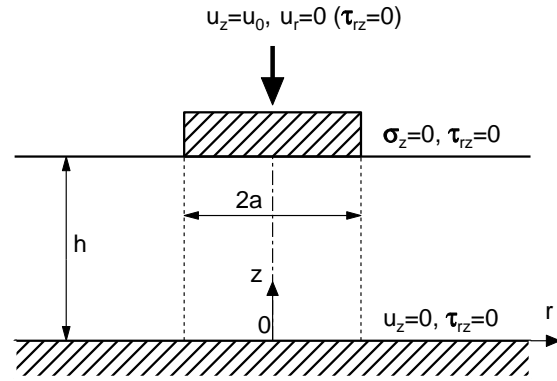


Рис. 1. Схема в'язко-пружного шару, навантаженого штампом

ні гармонічні нормальні зміщення $u_z(r, h) = u_0 e^{i\omega t}$ ($\omega = 2\pi f$), рис. 1. Що ж до другої граничної умови на торці, будемо розглядати два характерних випадки: гладкий контакт або повне прилипання (зчеплення). Для простоти вважаємо, що шар лежить на абсолютно жорсткій гладкій основі. Це дозволяє звести задачу до формулювання, симетричного відносно площини нижньої поверхні $z = 0$ [16].

Основна мета дослідження полягає у встановленні закономірностей поведінки механічного імпедансу поверхні під штампом

$$\mathcal{Z} = \frac{2\pi}{i\omega u_0} \int_0^a \sigma_z r dr \quad \text{при } z = h \quad (1)$$

як функції частоти і геометричних параметрів системи (σ_z – осьові нормальні напруження у шарі). Тому, аналогічно до [16], знак показника комплексної експоненти вибрано таким, щоб у $\mathbf{Im} \mathcal{Z}$ знак “–” відповідав імпедансу типу пружності, а “+” – імпедансу типу маси.

Динамічні деформації матеріалу шару описуються рівнянням Ламе, яке для гармонічного випадку має вигляд [19]

$$c_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{u} \quad (2)$$

(експоненційний часовий множник $e^{i\omega t}$ опущено). Тут $\mathbf{u} = \{u_r, u_z\}$ – вектор амплітуд зміщень; c_1 , c_2 – комплексні швидкості поздовжніх та поперечних хвиль у матеріалі відповідно:

$$c_1^2 = 2 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \frac{G}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho};$$

ρ – густина матеріалу циліндра; G – комплексний модуль зсуву для в'язко-пружного матеріалу; ν – коефіцієнт Пуассона.

Сформулюємо граничні умови при $z=h$. При гладкому контакті виконується умова відсутності дотичних напружень τ_{rz} під штампом. Тому для цього випадку

$$u_z = u_0, \quad \tau_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad z = h, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (3a)$$

При повному прилипанні під штампом задаються вертикальні й радіальні зміщення, причому амплітуда останніх дорівнює нулю:

$$u_z = u_0, \quad u_r = 0 \quad \text{при} \quad z = h, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (3b)$$

На поверхні за межами контакту відсутні нормальні й дотичні напруження:

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad z = h, \quad r \geq a. \quad (4)$$

Як уже сказано, основу, на якій лежить шар, вважаємо жорсткою і гладкою:

$$u_z = 0, \quad \tau_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (5)$$

Напруження σ_z і τ_{rz} відповідно до закону Гука виражаються через компоненти зміщень [19]:

$$\begin{aligned} \frac{1-2\nu}{2G}\sigma_z &= (1-\nu)\frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu\left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r}\right), \\ \frac{1}{G}\tau_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}. \end{aligned} \quad (6)$$

2. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ

Сформульовану змішану задачу динамічної теорії пружності розв'язуватимемо за допомогою методики, запропонованої у попередній роботі [16]. Для цього компоненти зміщень і механічних напружень у шарі представимо у вигляді інтегралів Ханкеля [16, 20]:

$$\begin{aligned} \frac{u_r(r, z)}{u_0} &= \int_0^\infty U(\lambda, z) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda, \\ \frac{u_z(r, z)}{u_0} &= \int_0^\infty W(\lambda, z) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_z(r, z)}{2G} &= \int_0^\infty S(\lambda, z) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \\ \frac{\tau_{rz}(r, z)}{2G} &= \int_0^\infty T(\lambda, z) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda. \end{aligned} \quad (8)$$

Використання закону Гука (6) дозволяє зв'язати образи напружень і зміщень:

$$2S(\lambda, z) = (\kappa - 2)\lambda U + \kappa \frac{dW}{dz}, \quad (9)$$

$$2T(\lambda, z) = \frac{dU}{dz} - \lambda W,$$

де

$$\kappa = \frac{c_1^2}{c_2^2} = 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} > 1.$$

Відомо, що вирази (7) будуть розв'язками динамічного векторного рівняння Ламе (2), якщо [21]

$$U(\lambda, z) = \kappa \lambda A(\lambda) \operatorname{ch} p_1 z - p_2 B(\lambda) \operatorname{ch} p_2 z, \quad (10)$$

$$W(\lambda, z) = -\kappa p_1 A(\lambda) \operatorname{ch} p_1 z + \lambda B(\lambda) \operatorname{ch} p_2 z.$$

Тут $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ – деякі невідомі функції параметра перетворення Ханкеля; $p_{1,2} = p_{1,2}(\lambda, \omega) = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2 / c_{1,2}^2}$.

Застосування співвідношень (9), (10) дає лінійний зв'язок між образами зміщень і напружень на поверхні шару $z=h$:

$$\begin{aligned} U(\lambda, h) &= -\frac{1}{\Delta(\lambda, \omega)} \left\{ S(\lambda, h) \times \right. \\ &\times \lambda \left[\left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) \operatorname{cth} p_1 h - p_1 p_2 \operatorname{cth} p_2 h \right] + \\ &\left. + T(\lambda, h) \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2} p_2 \operatorname{cth} p_1 h \operatorname{cth} p_2 h \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} W(\lambda, h) &= -\frac{1}{\Delta(\lambda, \omega)} \left\{ T(\lambda, h) \times \right. \\ &\times \lambda \left[\left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) \operatorname{cth} p_1 h - p_1 p_2 \operatorname{cth} p_2 h \right] + \\ &\left. + S(\lambda, h) \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2} p_1 \right\}. \end{aligned}$$

Тут введено позначення для визначника Релея – Лемба:

$$\Delta(\lambda, \omega) = \left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2} \right)^2 \operatorname{cth} p_1 h - \lambda^2 p_1 p_2 \operatorname{cth} p_2 h.$$

Конкретний вигляд функцій $S(\lambda)$, $T(\lambda)$, які характеризують специфіку просторового розподілу фізичних полів у шарі, має бути визначений з граничних умов. Однак, оскільки при $r=a$ відбувається зміна типу цих умов, для одержання розв'язку задачі необхідно зробити додаткові припущення. Залишимо нормальні й дотичні напруження

під штампом у вигляді невідомих неперервних функцій радіальної координати. Це дозволяє формально поширити граничні умови для σ_z, τ_{rz} на всю поверхню шару:

$$\sigma_z(r, h) = \begin{cases} \sigma(r), & 0 \leq r \leq a, \\ 0, & a < r < \infty, \end{cases} \quad (12)$$

$$\tau_{rz}(r, h) = \begin{cases} \tau(r), & 0 \leq r \leq a, \\ 0, & a < r < \infty. \end{cases} \quad (13)$$

Невідомі функції $\sigma(r), \tau(r)$ можна розкласти у ряди Фур'є–Діні за відповідними повними і ортогональними на проміжку $0 \leq r \leq a$ системами базисних функцій. Як і у [16], для нормальних напружень варто взяти

$$\frac{\sigma(r)}{2G} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n J_0(\mu_n r), \quad (14)$$

$$\mu_0 = 0, \quad J_0'(\mu_n a) = 0, \quad n \geq 1.$$

Для представлення дотичних напружень розглянемо два варіанти:

$$\frac{\tau(r)}{2G} = \sum_{m=1}^{\infty} T_m J_1(\mu_m r), \quad (15a)$$

$$J_0'(\mu_m a) = 0, \quad m \geq 1$$

і

$$\frac{\tau(r)}{2G} = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{T}_m J_1(\bar{\mu}_m r), \quad (15b)$$

$$J_0(\bar{\mu}_m a) = 0, \quad m \geq 1.$$

У рядах для $\sigma(r), \tau(r)$ коефіцієнти S_n ($n=0, 1, 2, \dots$) і T_m ($m=1, 2, \dots$) – довільні. Їхні величини мають бути визначені з граничних умов у зоні контакту. Очевидно, що при гладкому контакті $\tau(r) \equiv 0$. Тому в цьому випадку для усіх m справедливо $T_m = \bar{T}_m = 0$.

Враховуючи властивості інтегральних перетворень Ханкеля для напружень (8) і властивості використаних власних функцій, зі співвідношень (14), (15a), (15b) легко одержати образи $\sigma_r(r, h), \tau_{rz}(r, h)$ у вигляді відповідних рядів:

$$S(r, h) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{\lambda a}{\lambda^2 - \mu_n^2} J_0(\mu_n a) J_1(\lambda a), \quad (16)$$

$$T(r, h) = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} T_m \frac{\mu_m a}{\lambda^2 - \mu_m^2} J_0(\mu_m a) J_1(\lambda a), \\ \sum_{m=1}^{\infty} \bar{T}_m \frac{\bar{\mu}_m a}{\lambda^2 - \bar{\mu}_m^2} J_0(\bar{\mu}_m a) J_1(\lambda a). \end{cases} \quad (17)$$

На основі перетворень Ханкеля (7), з граничних умов для зміщень під штампом (3b) маємо два інтегральних рівняння:

$$\int_0^{\infty} U(\lambda, h) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda = 0, \quad (18)$$

$$\int_0^{\infty} W(\lambda, h) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = 1.$$

Зауважимо, що для гладкого штампа, виходячи з граничних умов (3a), треба залишити тільки друге зі співвідношень (18).

Підставивши у формули (18) зв'язок між образами зміщень і напружень (11), а також дискретні представлення (16), (17), одержуємо систему двох функціональних рівнянь, алгебраїзація якої дає нескінченну лінійну систему для визначення невідомих коефіцієнтів S_n, T_m (\bar{T}_m):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn}^U S_n + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{nm}^U T_m = 0, \quad (19)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn}^W S_n + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{nm}^W T_m = \delta_{0n}.$$

Ця процедура повністю аналогічна до наведеної у роботі [16], тому явні вирази для $\alpha_{mn}^U, \alpha_{mn}^W, \beta_{mn}^U, \beta_{mn}^W$ не наводитимо. У випадку гладкого штампа у системі (19) потрібно залишити тільки рівняння другої групи, відкинувши доданки, які містять T_m .

Насамкінець варто зазначити, що викладену методику розв'язання контактних задач для шару легко узагальнити на випадок будь-якого неперервного закону радіального розподілу напружень або зміщень під штампом.

При обчисленні шуканих фізико-механічних полів застосуємо метод редукції, який полягає у заміні рядів (14), (15a), (15b) їхніми скінченними відрізками ($n=0, \dots, N-1$ для S_n і $m=1, \dots, N-1$ для T_m або \bar{T}_m). Це призводить до обмеження порядку вихідної алгебраїчної системи. У статті [16] для випадку гладкого контакту зі штампом з урахуванням апріорної інформації про поведінку напружень на краю штампа був розроблений метод покращення редукції на основі явного виділення у розв'язку компоненти, яка містить локальну особливість. Проте, як зазначено у роботі [22], при розривному характері дотичних напружень на поверхні штампа (що, ймовірно, справедливо і у нашому випадку) сингулярність напружень на краю штампа повинна мати більш складний характер. Це може значно ускладнити застосування процедури покращення редукції. Зауважимо, однак, що

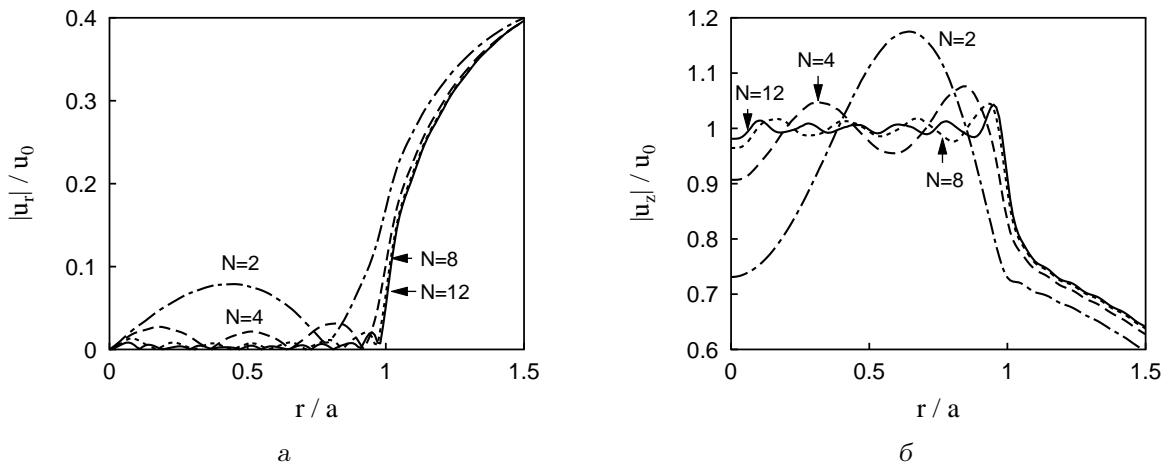


Рис. 2. Ілюстрація точності виконання граничних умов для чисельного розв'язку на частоті $f = 100$ Гц при повному прилипанні штампця ($a = 8$ мм):

а – амплітуда горизонтальних зміщень $|u_r|$, б – амплітуда вертикальних зміщень $|u_z|$

результати дослідження [16] дають упевненість у тому, що вже при $N = 10 \div 20$ навіть метод простої редукції здатний забезпечити достатню точність чисельного розв'язку задачі.

3. АНАЛІЗ ЧИСЕЛЬНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Як і в роботі [16], обчислення проведемо у частотній смузі $f \leq 400$ Гц для шару з такими фізичними характеристиками: $\rho = 1100$ кг/м³, $c_1 = \text{Re } c_1 = 1500$ м/с, $\text{Re } c_2 = 1.7$ м/с,

$$c_2 = \text{Re } c_2(1 + i(\delta_1 + \omega\delta_2)),$$

причому $\delta_1 = 0.1$, $\delta_2 = 0.0001$ с. Товщину в'язкопружного шару прийемо рівною $h = 20$ мм. Радіус штампця a будемо варіювати у межах від 8 до 80 мм ($0.4 \leq a/h \leq 4$). Це відповідає розмірам вібраторів у натурних експериментах [2, 10] і сенсорів, які використовуються для електронної аускультатції звуків дихання [5–7].

Перш за все, проілюструємо швидкість збіжності запропонованого обчислювального алгоритму. Для прикладу, рис. 2 показує, наскільки точно виконуються граничні умови для зміщень (3b) на частоті $f = 100$ Гц при різних порядках N редукції алгебраїчної системи (τ_{rz} розкладено у ряд (15b)). З графіків видно, що при $N = 8 \div 12$ характер зміщень під штампцем відслідковується досить точно. Що ж до механічного імпедансу контактної ділянки Z , який є інтегральною динамічною характеристикою системи, то дві-три його значущі цифри стабілізуються вже при $N = 4 \div 6$. Аналогічна ситуація спостерігалась і для шару, навантаженого

гладким штампцем [16]. Зауважимо, що при обчисленні імпедансу доцільно використовувати розклад (15а), оскільки у цьому випадку вираз для імпедансу Z містить тільки один коефіцієнт S_0 .

На рис. 3 показані частотні залежності $\text{Re } Z$ та $\text{Im } Z$ у заданому частотному діапазоні при різних співвідношеннях a/h . На графіках індексом “ u ” позначені величини, обчислені при повному прилипанні штампця (неперервні криві), а “ τ ” – при гладкому контакті (штрихові). Окрім того, штрихпунктиром показано $\text{Im } Z_{\text{тод}}$ – імпеданс циліндра з вільною боковою поверхнею, обчислений у стержньовому наближенні за умови відсутності затухання [14].

Проведений аналіз дозволив зробити висновок про те, що в широкому діапазоні зміни a/h загальна поведінка імпедансу залишається незмінною: на низьких частотах $\text{Im } Z$ має характер пружності, при певному f_0 переходить через резонанс і набуває характеру маси. Для $0.4 \leq a/h \leq 4$ значення резонансної частоти становить $f_0 < 100$ Гц та істотно знижується при зростанні відносного діаметра штампця. Цікаво, що в цілому значення уявних частин імпедансу для різних варіантів граничних умов виявились дуже близькими. Водночас, для усіх a/h значення $\text{Re } Z$ зростає з частотою значно швидше за умови повного прилипання штампця до поверхні шару. Очевидно, цей ефект пов'язаний з тим, що у цьому випадку на краю штампця сильніше збуджуються поперечні моди, пов'язані з загасанням по c_2 . Окрім того, навіть для $\delta_1 \neq 0$ за рахунок відсутності радіальних зміщень під штампцем маємо $\text{Re } Z_u \rightarrow 0$ при $f \rightarrow 0$. Для $a/h < 1$ активна і реактивна части-

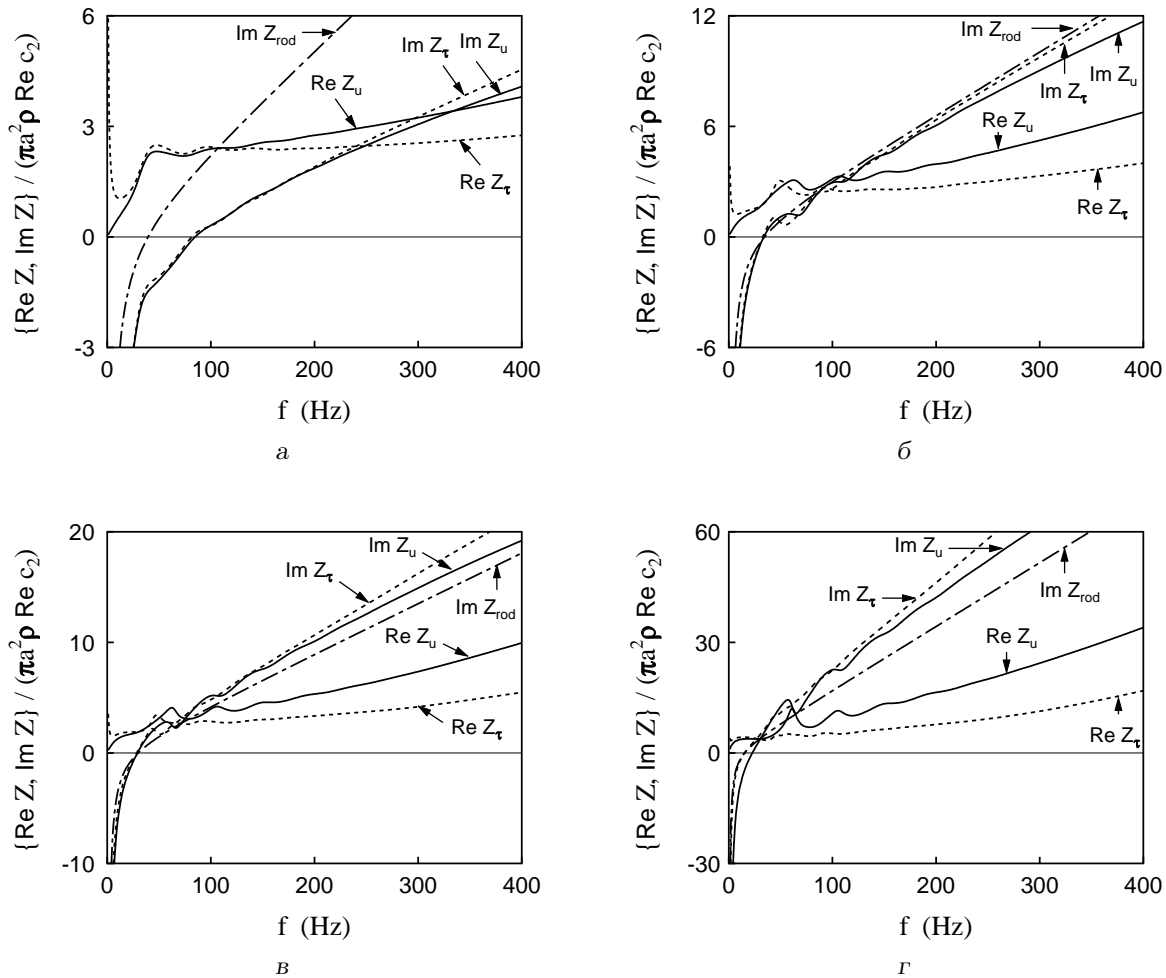


Рис. 3. Частотні залежності імпедансу контактної ділянки поверхні шару:
 а – $a=8$ мм ($a/h=0.4$), б – $a=20$ мм ($a/h=1$), в – $a=30$ мм ($a/h=1.5$), г – $a=80$ мм ($a/h=4$)

ни імпедансу мають один порядок. При зростанні a/h відносна доля $\text{Re } Z$ зменшується. Відзначимо ще один важливий момент. Для малих відносних радіусів штамп (див. рис. 3, а) для усіх частот справедливо $\text{Im } Z / \text{Im } Z_{\text{rod}} < 1$. При збільшенні a це відношення зростає, наближаючись до одиниці при $a/h=1$ (див. рис. 3, б). Для $a/h > 1$ (див. рис. 3, в, г), незважаючи на домінування поздовжньої моди, при $f > f_0$ виконується співвідношення $\text{Im } Z > \text{Im } Z_{\text{rod}}$. Очевидно, це можна пояснити додатковим навантаженням бічних стінок умовного циліндра $0 \leq r \leq a$, $0 \leq z \leq h$ у шарі інерційністю матеріалу поза межами штамп.

Таким чином, величина механічної реакції (та імпедансу) поверхні шару на присутність штамп контролюється, насамперед, геометричним параметром – відношенням висоти шару до радіуса штамп. При урахуванні загасання поперечних

хвиль тип граничних умов впливає, здебільшого, на активну частину імпедансу. При цьому порівняння одержаних розрахункових даних з експериментальними [10, 16] дозволяє припустити, що за реальних умов робочі частини вібраторів повністю або частково зчіплюються з поверхнею тіла людини. Важливо, що для вібраторів і сенсорів з більшою площею контактної зони імпеданс поверхні піддатливого шару зростає (при $a/h > 1$ поверхня “краще тримає” пристрій, який закріплюється на ній). Звідси випливає практичний висновок про те, що сенсор з більшою площею контакту менше спотворює картину коливань поверхні тіла у зоні прийому.

Варто зазначити, що розглянута модель контактної взаємодії дозволяє адекватно описати в рамках єдиного підходу результати, одержані незалежно різними групами дослідників у натурних

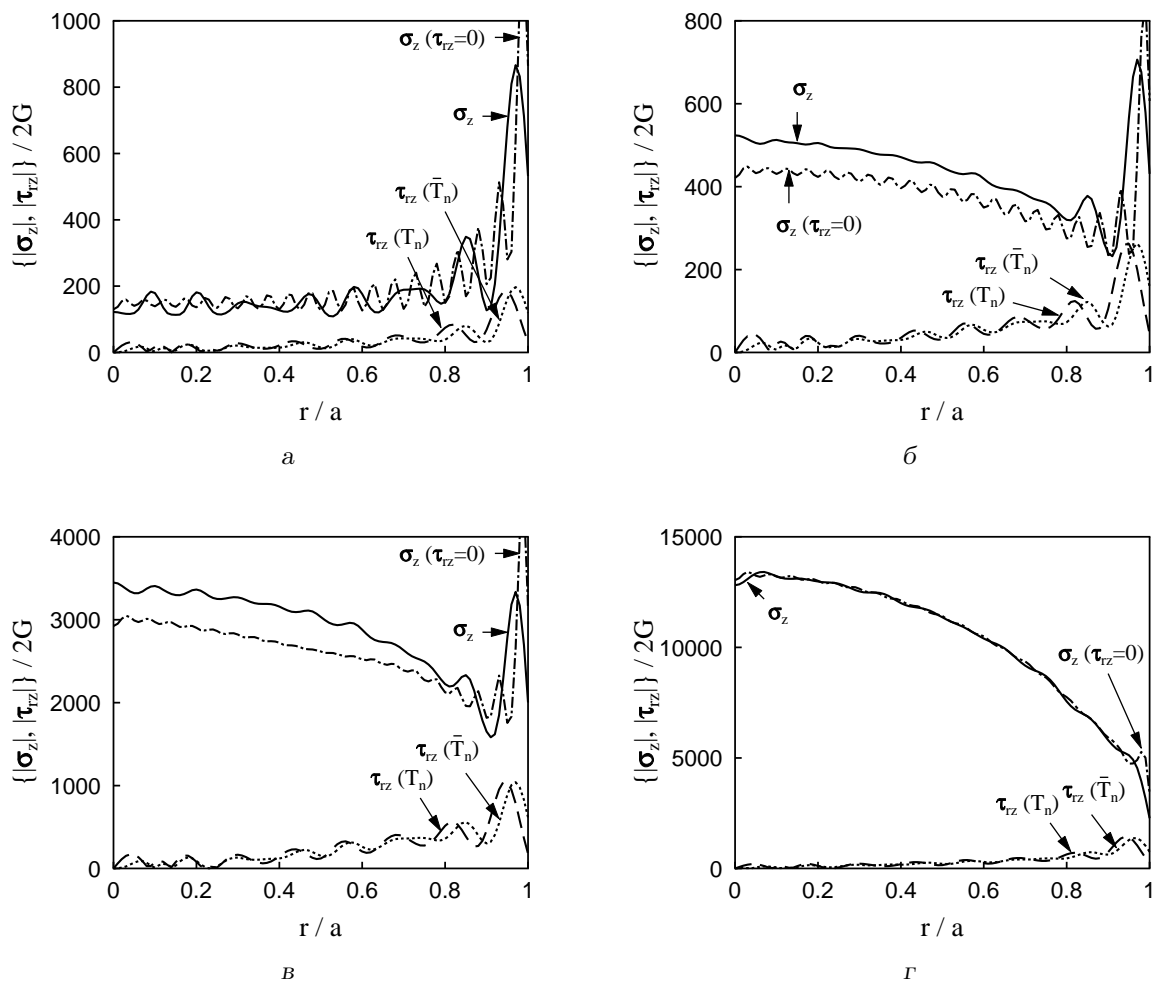


Рис. 4. Розподіли нормальних і дотичних напружень під штампом:

а - $a = 8$ мм, $f = 50$ Гц; б - $a = 30$ мм, $f = 50$ Гц; в - $a = 8$ мм, $f = 300$ Гц; г - $a = 30$ мм, $f = 300$ Гц

і модельних експериментах при різних геометричних параметрах системи [1, 2, 10, 12]. При цьому для відносно малих штампів ($a/h < 1$) маємо ситуацію, більш близьку до навантаження півпростору [12]. При зростанні відносного радіуса штамп роль жорсткої підложки $z = 0$ стає більш відчутною, що відображається на значеннях еквівалентних параметрів піддатливої поверхні [18].

Перейдемо до розгляду чисельних даних про розподіли механічних напружень під штампом (рис. 4). Для усіх частот і a/h нормальні напруження на поверхні при гладкому контакті і повному прилипанні штамп виявились близькими за величиною і характером радіального розподілу (обрахунки проводились при $N = 16$). Окрім того, завжди справедливо $|\sigma_z| \gg |\tau_{rz}|$. Зауважимо, що σ_z і τ_{rz} різко зростають на краю штамп. Ймовірно, що і нормальні, і дотичні напруження мають тут

особливості (для більш чіткого їх відображення на рис. 4, г слід збільшити кількість утриманих членів у редукованих рядах). Висновок про зростання τ_{rz} при $r \rightarrow a$ свідчить про тенденцію до відриву краю приклеєного сенсора при його коливаннях на піддатливій поверхні. Дійсно, явище часткового відставання робочої поверхні сенсора досить добре відоме у практиці проведення вимірювань з поверхні тіла людини. Тертя або удари вільної частини робочої поверхні сенсора об поверхню спричиняють появу інтенсивної завади у вигляді шарудіння, рипіння або імпульсів, які маскують корисний сигнал, ускладнюючи його реєстрацію та обробку. Таким чином, при розробці методик зйому віброакустичних сигналів з піддатливих поверхонь першочергову увагу слід приділяти надійному закріпленню на них країв контактних сенсорів.

Для $a/h > 1$ розподіл $|\sigma_z|$ під штампом на усіх

частотах має чітко виражений локальний максимум у центрі (див. рис. 4, а, в). Для $a/h < 1$ на дорезонансних частотах розподіл $|\sigma_z|$ під штампом виглядає, скоріше, монотонним зі зростанням його величини при збільшенні r (див. рис. 4, б). На післярезонансних частотах тут теж формується максимум при $r = a$ (див. рис. 4, г). Зі збільшенням частоти зона концентрації напружень на краю штамп дещо звужується. Осциляції кривих на рис. 4 є наслідком розрахункових похибок при утриманні скінченного числа мод.

ВИСНОВКИ

1. Розв'язано змішану задачу про гармонічні коливання в'язко-пружного шару, навантаженого плоским штампом кругового перерізу за умови його повного прилипання до поверхні шару. Розроблено ефективний алгоритм обчислення фізико-механічних полів у зоні контакту.
2. Встановлено, що у розглянутому діапазоні частот, незалежно від співвідношення геометричних параметрів a/h , система демонструє резонансну поведінку, причому частота резонансу спадає при збільшенні відносного діаметра штамп. Для $a/h < 1$ активна і реактивна частини імпедансу мають один порядок. При зростанні a/h відносна доля активної частини імпедансу зменшується.
3. Порівняння показало, що значення реактивних частин імпедансу при гладкому контакті та прилипанні виявились дуже близькими. Водночас, при повному прилипанні штамп активна частина імпедансу шару зростає з частотою значно швидше за рахунок сильнішого збудження поперечних мод, пов'язаних із загасанням по c_2 .
4. Встановлено, що при формуванні імпедансних властивостей поверхні тіла вплив геометричних факторів превалює над впливом типу граничних умов. Для відносно малих вібраторів і сенсорів величина імпедансу поверхні піддатливого шару значно менша за значення, яке дається стержньовим наближенням для циліндра. Для пристроїв з діаметром контактної зони, який перевищує товщину шару, імпеданс поверхні зростає у порівнянні зі стержньовим наближенням. Така поведінка дозволяє адекватно описати в рамках єдиного підходу результати, одержані різними групами експериментаторів.

5. Різке зростання нормальних і дотичних напружень на краю штамп свідчить про тенденцію до відриву краю приклеєного сенсора при його коливаннях на поверхні досліджуваного об'єкта. Виходячи з цього, при розробці методик зйому віброакустичних сигналів з піддатливих поверхонь першочергову увагу слід приділяти надійному закріпленню на них країв контактних сенсорів.

1. Verburg J., van Vollenhoven E. Phonocardiography: physical and technical aspects and clinical uses // Non invasive physiological measurements.– London: Academic press, 1979.– P. 213–259.
2. Vermarien H., van Vollenhoven E. The recording of heart vibrations: A problem of vibration measurement on soft tissue // Med. Biol. Engng Comput.– 1984.– **22**.– P. 168–178.
3. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Олейник В. Н. Проблемы моделирования акустических свойств грудной клетки и измерения шумов дыхания // Акуст. ж.– 1995.– **41**, N 5.– С. 758–768.
4. Олійник В. Н. Рациональне проектування п'єзоакселерометрів для вимірювань на піддатливих поверхнях // Акуст. вісн.– 1998.– **1**, N 3.– С. 54–65.
5. Gavriely N. Breath sounds methodology.– London, Tokyo: CRC Press, 1995.– 203 p.
6. Pasterkamp H., Kraman S. S., Wodicka G. R. Respiratory sounds. Advances beyond the stethoscope // J. Respir. Crit. Care Med.– 1997.– **156**.– P. 974–987.
7. Вовк И. В., Дахнов С. Л., Крижановский В. В., Олійник В. Н. Возможности и перспективы диагностики легочных патологий с помощью компьютерной регистрации и обработки шумов дыхания // Акуст. вісн.– 1998.– **1**, N 2.– С. 21–33.
8. Wodicka G. R., Stevens K. N., Golub H. L., Cravalho E. G., Shannon D. C. A model of acoustic transmission in the respiratory system // IEEE Trans. Biomed. Engng.– 1989.– **36**, N 9.– P. 925–933.
9. Paciej R., Vyshedskiy A., Shane J., Murphy R. Transpulmonary speed of sound input into the supraclavicular space // J. Appl. Physiol.– 2003.– **94**, N 2.– P. 604–611.
10. Тиманин Е. М. Модель формирования импедансных свойств мягких биологических тканей // Методы вибрационной диагностики реологических характеристик мягких материалов и биологических тканей.– Горький: ИПФ АН СССР, 1989.– С. 75–91.
11. Еремин Е. В., Тиманин Е. М. Интерпретация механического импеданса слоя, измеренного с помощью твердого круглого штампа // Акуст. ж.– 2000.– **46**, N 4.– С. 490–495.
12. Oestreicher H. L. Field and impedance of an oscillating sphere in a viscoelastic medium with an application to biophysics // J. Acoust. Soc. Amer.– 1951.– **23**, N 6.– P. 707–714.

13. Zhang X., Royston T. J., Mansy H. A., Sandler R. H. Radiation impedance of a finite circular piston on a viscoelastic half-space with application to medical acoustics // J. Acoust. Soc. Amer.– 2001.– **109**, N 2.– P. 795–802.
14. Олійник В. Н. Моделювання контактної взаємодії обмеженої ділянки поверхні тіла людини з вібратором // Акуст. вісн.– 2003.– **6**, N 2.– С. 58–67.
15. Олійник В. Н. Моделювання механічної реакції циліндра з в'язко-пружної біотканини при гармонічному навантаженні торців в умовах повного зчеплення з вібратором // Акуст. вісн.– 2004.– **7**, N 2.– С. 65–71.
16. Грінченко В. Т., Олійник В. Н. Гармонічні коливання в'язко-пружного шару біотканини при навантаженні круговим гладким штампом // Акуст. вісн.– 2004.– **7**, N 4.– С. 34–47.
17. Клочков Б. Н., Соколов А. В. Волны в поверхностном слое мягкой биоткани на полупространстве из твердой биоткани // Акуст. ж.– 1994.– **40**, N 2.– С. 270–274.
18. Олійник В. Н. Визначення еквівалентних параметрів поверхні тіла людини при взаємодії з контактним сенсором // Доп. НАН України.– 2004.– N 10.– С. 193–198.
19. Грінченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
20. Сеймов В. М. Динамические контактные задачи.– К.: Наук. думка, 1976.– 284 с.
21. Куценко А. Г., Олійник В. Н., Улитко А. Ф. Перемещения точек поверхности упругого полупространства, вызванные мгновенным приложением осесимметричной нагрузки // Акуст. вісн.– 1999.– **2**, N 2.– С. 57–68.
22. Грінченко В. Т., Улитко А. Ф. О локальных особенностях в математических моделях физических полей // Мат. методи і фіз.-мех. поля.– 1998.– **41**, N 1.– С. 12–34.