

УДК 534.26

ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ В'ЯЗКО-ПРУЖНОГО ШАРУ БІОТКАНИНИ ПРИ НАВАНТАЖЕННІ КРУГОВИМ ГЛАДКИМ ШТАМПОМ

В. Т. ГРІНЧЕНКО, В. Н. ОЛІЙНИК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 27.12.2004

Із застосуванням граничних інтегральних рівнянь розв'язано лінійну задачу про гармонічні коливання навантаженого плоским гладким круговим штампом в'язко-пружного шару з матеріалу, що моделює біотканини. Побудовано ефективний алгоритм для визначення фізико-механічних полів та імпедансу поверхні, яка контактує зі штампом. Встановлено, що у розглянутому діапазоні частот система демонструє резонансну поведінку, причому значення резонансної частоти суттєво залежить від діаметру штамп. За рахунок дисипації у матеріалі та механізму випромінювання хвиль формується активна складова імпедансу поверхні контакту, яка для вибраного матеріалу має один порядок величини з реактивною складовою. Розрахункові частотні залежності імпедансу добре співвідносяться з експериментальними даними. Визначено, що при переході через резонанс характер розподілу механічних напружень під штампом суттєво змінюється. Вивчення просторових розподілів зміщень матеріалу шару показало, що найбільш інтенсивного збудження зазнає приповерхнева зона під штампом. При цьому індуковані штампом вертикальні зміщення ефективно трансформуються у горизонтальні. Зі збільшенням частоти наростає локалізація деформацій поблизу поверхні штамп. Порівняння одержаних результатів з відомими експериментальними даними показало, що використана модель адекватно відображає основні характерні риси взаємодії поверхні шкіри людини з контактним вібратором або сенсором.

С применением граничных интегральных уравнений решена линейная задача о гармонических колебаниях нагруженного плоским гладким круговым штампом вязко-упругого слоя из материала, моделирующего биоткань. Построен эффективный алгоритм для определения физико-механических полей и импеданса поверхности, которая контактирует со штампом. Установлено, что в рассматриваемом диапазоне частот система демонстрирует резонансное поведение, причем значение резонансной частоты существенно зависит от диаметра штамп. За счет диссипации в материале и механизма излучения волн формируется активная составляющая импеданса поверхности контакта, которая для выбранного материала имеет один порядок величины с реактивной составляющей. Расчетные частотные зависимости импеданса хорошо соотносятся с экспериментальными данными. Определено, что при переходе через резонанс характер распределения механических напряжений под штампом существенно изменяется. Изучение пространственных распределений смещений материала слоя показало, что наиболее интенсивного возбуждения испытывает приповерхностная зона под штампом. При этом индуцированные штампом вертикальные смещения эффективно трансформируются в горизонтальные. С увеличением частоты нарастает локализация деформаций вблизи поверхности штамп. Сравнение полученных результатов с известными экспериментальными данными показало, что использованная модель адекватно отображает основные характерные особенности взаимодействия поверхности кожи человека с контактными вибратором или датчиком.

A linear problem on harmonic vibrations of viscoelastic layer of material modeling the biotissue loaded with a smooth plane round piston is solved using the boundary integral equations. An efficient algorithm is developed for determining the physico-mechanical fields and impedance of the surface contacting with the piston. It is found that the system demonstrates the resonant behavior in the considered frequency range, and the resonant frequency strongly depends on the piston diameter. With allowance for dissipation in the material and wave radiation mechanism an active component of the contact surface impedance is formed, that is of the same order with its reactive component. The calculated frequency dependencies of the impedance are in good agreement with the experimental data. It is determined that, when passing through the resonance, the mechanic stress distribution is essentially reshaped. Studying of spatial distribution of the layer material displacements has shown that the near-surface area under the piston is excited most intensively. In so doing, the vertical displacements induced by the piston are effectively transformed into the horizontal ones. With the increase of frequency the deformations become more localized in the vicinity of the piston surface. A comparison of the obtained results with known experimental data shows that the used model adequately reflects the main features characteristic of the interaction between human skin and the contact vibrator or sensor.

ВСТУП

Вивчення особливостей механічної контактної взаємодії тіла людини з пристроями різного призначення в діапазоні аудіочастот має вже більш ніж півстолітню історію [1–7]. Сучасне посилення інтересу до цієї тематики можна пояснити інтенсивним розвитком діагностичних засобів з використанням контактних сенсорів вібрацій для фонокардіографії та електронної аускультатії легень [2, 8, 9]. Окрім того, досить поширеними є при-

строї для вібраційного вимірювання механічних властивостей поверхневих біотканей [5, 10–12].

Проблеми моделювання контактної взаємодії поверхні тіла з вібратором (сенсором) детально розглядалися у статтях [2, 6, 13]. Зауважимо, що структура поверхневих біотканей по глибині має шаруватий характер, причому спостерігається значна змінюваність їхніх фізичних властивостей з глибиною та анізотропія вздовж поверхні [10, 11, 14, 15]. Незважаючи на це, при оцінюванні інтегрального значення динамічної реак-

ції у зоні контакту задовільні результати вдається отримати у наближенні, згідно з яким поверхневі біотканини моделюються монолітним ізотропним в'язко-пружним середовищем – “м'якою тканиною” (soft tissue), для якої швидкість поздовжніх хвиль близька до швидкості звуку у воді, а швидкість поперечних хвиль менша за неї на два-три порядки [1, 3, 6, 7].

У роботі [6] було висунуто припущення, що основну роль у формуванні імпедансних властивостей поверхневих біотканин відіграє об'єм тканини, який знаходиться між вібратором і жорсткою кістковою основою. Такий підхід призвів до розгляду спрощених задач про вібронавантаження циліндричного зразка в'язко-пружного матеріалу при різних граничних умовах [6, 7]. Такі задачі можуть бути розв'язані за допомогою стандартної процедури розкладу в ряди за нормальними модами коливань циліндра [16]. Більш ретельний аналіз показав, що нехтування наявністю значної вільної поверхні матеріалу поза межами контакту призводить до значних розходжень між модельними оцінками і експериментальними даними. Виходячи з цього, мета даної статті полягає у дослідженні та кількісній оцінці кінематичних і динамічних характеристик взаємодії в'язко-пружного шару з гладким штампом, що рухається за гармонічним у часі законом перпендикулярно до його поверхні.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу про коливання в'язко-пружного шару $0 \leq r < \infty$, $0 \leq z \leq h$ при навантаженні його абсолютно жорстким гладким штампом з радіусом a , зміщення торця якого $z = h$ відбуваються за гармонічним законом: $u_z(r, h) = u_0 e^{i\omega t}$ ($\omega = 2\pi f$), рис. 1. Зауважимо, що такий вибір знаку показника комплексної експоненти обумовлений необхідністю одержати кінцеві результати у формі, прийнятній для порівняння з експериментальними результатами [5]. Вважати-мемо, що поверхня поза штампом вільна від навантажень, а поверхня шару $z = 0$ лежить на абсолютно жорсткій гладкій основі. Така постановка ідентична до задачі про симетричне навантаження шару $|z| \leq h$ (при $z = -h$ прикладено штамп, який коливається назустріч: $u_z(r, -h) = -u_0 e^{i\omega t}$).

Динамічні деформації матеріалу шару описуються рівнянням Ламе, яке для гармонічного випадку має вигляд [16]

$$c_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

(експоненційний часовий множник $e^{i\omega t}$ опущено).

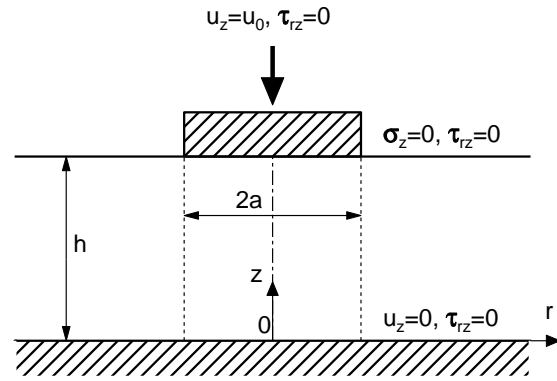


Рис. 1. Схема в'язко-пружного шару, навантаженого штампом

Тут c_1, c_2 – комплексні швидкості поздовжніх та поперечних хвиль у матеріалі відповідно; $\mathbf{u} = \{u_r, u_z\}$ – вектор амплітуд зміщень. Уявні частини комплексних швидкостей пружних хвиль визначаються дисипативними властивостями матеріалу і, взагалі кажучи, можуть бути частотно залежними. Тоді

$$c_1^2 = 2 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \frac{G}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho},$$

де ρ – густина матеріалу циліндра; G – комплексний модуль зсуву для в'язко-пружного матеріалу; ν – коефіцієнт Пуассона (його можна вважати дійсною величиною [3, 6]).

Сформулюємо граничні умови при $|z| = h$. Як уже сказано, нормальні зміщення під штампом мають задану амплітуду:

$$u_z = u_0 \quad \text{при} \quad z = h, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (2)$$

Окрім того, за умови гладкого контакту дотичні напруження під штампом відсутні:

$$\tau_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad z = h, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (3)$$

За межами контакту відсутні нормальні й дотичні напруження:

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad z = h, \quad r \geq a. \quad (4)$$

Напруження σ_z і τ_{rz} відповідно до закону Гука виражаються через компоненти зміщень:

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2\nu}{2G} \sigma_z &= (1 - \nu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right), \\ \frac{1}{G} \tau_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}. \end{aligned} \quad (5)$$

Як і в роботах [6, 7], нас цікавитиме механічний імпеданс поверхні під штампом. У даному випадку він визначається за формулою

$$Z = \frac{F_z}{i\omega u_0} = \frac{2\pi}{i\omega u_0} \int_0^a \sigma_z r dr \quad \text{при } z = h, \quad (6)$$

де F_z – сила, яку треба прикласти для забезпечення заданого зміщення торця; σ_z – осьові нормальні напруження у шарі.

Строго кажучи, викладена постановка задачі є дещо штучною, оскільки під час зворотного руху торця штампа можливе його відставання від поверхні. Тому на практиці у контактних віброметричних системах робочу частину штампа завжди притискають до поверхні тіла з певним статичним зусиллям [8]. Очевидно, що величина цього зусилля повинна бути достатньо малою, щоб істотно не змінити геометричні й фізичні параметри системи. У такому випадку статичною компонентою нормальної реакції можна знехтувати.

2. АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК

2.1. Застосування методу парних інтегральних рівнянь

Сформульована у попередньому розділі задача за своєю суттю є змішаною задачею динамічної теорії пружності. Тому для її ефективного розв'язання слід застосувати метод парних граничних інтегральних рівнянь [17, 18].

Компоненти зміщень і механічних напружень у шарі представимо у вигляді інтегралів Ханкеля [19]:

$$\frac{u_r(r, z)}{u_0} = \int_0^\infty U(\lambda, z) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (7)$$

$$\frac{u_z(r, z)}{u_0} = \int_0^\infty W(\lambda, z) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda,$$

$$\frac{\sigma_z(r, z)}{2G} = \int_0^\infty S(\lambda, z) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (8)$$

$$\frac{\tau_{rz}(r, z)}{2G} = \int_0^\infty T(\lambda, z) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda.$$

З рівностей (5) знаходимо зв'язок між образами напружень і зміщень:

$$2S(\lambda, z) = (\kappa - 2)\lambda U + \kappa \frac{dW}{dz}, \quad (9)$$

$$2T(\lambda, z) = \frac{dU}{dz} - \lambda W.$$

Тут і надалі

$$\kappa = \frac{c_1^2}{c_2^2} = 2 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} > 1.$$

Для того, щоб вирази (7) були розв'язками рівняння (1), образи зміщень необхідно записати у вигляді

$$U(\lambda, z) = \kappa \lambda A(\lambda) \operatorname{ch} p_1 z - p_2 B(\lambda) \operatorname{ch} p_2 z, \quad (10)$$

$$W(\lambda, z) = -\kappa p_1 A(\lambda) \operatorname{ch} p_1 z + \lambda B(\lambda) \operatorname{ch} p_2 z,$$

де $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ – невідомі поки що функції; $p_{1,2} = p_{1,2}(\lambda, \omega) = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2/c_{1,2}^2}$.

З однорідної граничної умови для дотичних напружень на всій поверхні $z = h$ одержуємо

$$T(r, h) = 0. \quad (11)$$

Це дозволяє встановити зв'язок між функціями $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$:

$$B(\lambda) = \kappa \frac{\lambda p_1}{\left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)} \frac{\operatorname{sh} p_1 h}{\operatorname{sh} p_2 h} A(\lambda). \quad (12)$$

Тепер, враховуючи формули (7), (9) і (12), отримуємо образи σ_z і u_z у формі

$$S(\lambda, h) = -\kappa A(\lambda) \frac{\Delta(\lambda, \omega)}{\left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)} \operatorname{sh} p_1 h, \quad (13)$$

$$W(\lambda, h) = \frac{\kappa}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2} A(\lambda) \frac{p_1}{\left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)} \operatorname{sh} p_1 h.$$

Тут введено позначення для визначника Релея–Лемба:

$$\Delta(\lambda, \omega) = \left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)^2 \operatorname{cth} p_1 h - \lambda^2 p_1 p_2 \operatorname{cth} p_2 h.$$

Для продовження розв'язання задачі запишемо нормальні напруження під штампом у вигляді деякої невідомої неперервної функції радіальної координати $\sigma(r)$. Це дозволяє формально поширити граничну умову для σ_z на всю поверхню:

$$\sigma_z(r, h) = \begin{cases} \sigma(r), & 0 \leq r \leq a, \\ 0, & a < r < \infty \end{cases} \quad (14)$$

і використати властивості інтегрального перетворення Ханкеля для визначення невідомої функції напружень. На практиці це дає можливість одержати в інтегральній формі зв'язок між $A(\lambda)$ і $\sigma(r)$.

При остаточному ж знаходженні $\sigma(r)$ необхідно використати граничну умову для нормальних зміщень u_z під штампом.

При застосуванні викладеної методики зручно перейти від інтегральних співвідношень до алгебраїчних. Для цього скористаємось тим, що функція $\sigma(r)$ дозволяє розклад у ряд Фур'є–Діні за повною і ортогональною на $0 \leq r \leq a$ системою власних функцій:

$$\frac{\sigma(r)}{2G} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n J_0(\mu_n r), \quad (15)$$

$$\mu_0 = 0, \quad J_0'(\mu_n a) = 0, \quad n \geq 1.$$

Тут S_n , $n=0, 1, 2, \dots$ – довільні коефіцієнти. Тепер, враховуючи формулу (13) для образу $S(\lambda, h)$, можна прирівняти між собою інтегральний вираз для $\sigma(r, h)$ і продовжену граничну умову (14), (15):

$$\begin{aligned} -\kappa \int_0^{\infty} A(\lambda) \frac{\Delta(\lambda, \omega)}{\left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)} \text{sh } p_1 h J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = \\ = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} S_n J_0(\mu_n r), & 0 \leq r \leq a, \\ 0, & a < r < \infty, \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

що у просторі образів за Ханкелем дає розклад невідомої функції $A(\lambda)$ у ряд з довільними коефіцієнтами S_n :

$$\begin{aligned} A(\lambda) = -\frac{1}{\kappa} \frac{\left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)}{\Delta(\lambda, \omega) \text{sh } p_1 h} \lambda a J_1(\lambda a) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n}{\lambda^2 - \mu_n^2} J_0(\mu_n a). \end{aligned} \quad (17)$$

Тут прийнято до уваги, що [20, с. 648]

$$\int_0^a J_0(\mu_n r) J_0(\lambda r) r dr = \frac{\lambda a}{\lambda^2 - \mu_n^2} J_0(\mu_n a) J_1(\lambda a).$$

Принагідно зауважимо, що співвідношення (16) дозволяє отримати простий вираз для механічного імпедансу поверхні контакту шару зі штампом (6):

$$\frac{Z}{2G} = \frac{\pi a^2}{i\omega u_0} S_0. \quad (18)$$

Звідси можна зробити важливий висновок – на формування нормальної реакції контактної зони

впливає лише перший коефіцієнт ряду (16), який описує розподіл напружень під штампом.

З урахуванням наведених вище міркувань шукані розв'язки для зміщень і напружень запишемо у вигляді рядів відносно S_n :

$$\begin{aligned} \frac{u_r(r, z)}{u_0} &= -a \sum_{n=0}^{\infty} S_n J_0(\mu_n a) \mathcal{I}_r^{(n)}(r, z), \\ \frac{u_z(r, z)}{u_0} &= -a \sum_{n=0}^{\infty} S_n J_0(\mu_n a) \mathcal{I}_z^{(n)}(r, z), \\ \frac{\sigma_z(r, z)}{2G u_0} &= a \sum_{n=0}^{\infty} S_n J_0(\mu_n a) \mathcal{I}_\sigma^{(n)}(r, z), \\ \frac{\tau_{rz}(r, z)}{2G u_0} &= -a \sum_{n=0}^{\infty} S_n J_0(\mu_n a) \mathcal{I}_\tau^{(n)}(r, z). \end{aligned} \quad (19)$$

Тут

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_r^{(n)}(r, z) &= \int_0^{\infty} \frac{J_1(\lambda a) J_1(\lambda r)}{\Delta(\lambda, \omega)} \frac{\lambda^3}{\lambda^2 - \mu_n^2} \times \\ &\times \left[\left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2}\right) \frac{\text{ch } p_1 z}{\text{sh } p_1 h} - p_1 p_2 \frac{\text{ch } p_2 z}{\text{sh } p_2 h} \right] d\lambda; \\ \mathcal{I}_z^{(n)}(r, z) &= \int_0^{\infty} \frac{J_1(\lambda a) J_0(\lambda r)}{\Delta(\lambda, \omega)} \frac{p_1 \lambda^2}{\lambda^2 - \mu_n^2} \times \\ &\times \left[\left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2}\right) \frac{\text{sh } p_1 z}{\text{sh } p_1 h} - \lambda^2 \frac{\text{sh } p_2 z}{\text{sh } p_2 h} \right] d\lambda; \\ \mathcal{I}_\sigma^{(n)}(r, z) &= \int_0^{\infty} \frac{J_1(\lambda a) J_0(\lambda r)}{\Delta(\lambda, \omega)} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \mu_n^2} \times \\ &\times \left[\left(\lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)^2 \frac{\text{ch } p_1 z}{\text{sh } p_1 h} - \lambda^2 p_1 p_2 \frac{\text{ch } p_2 z}{\text{sh } p_2 h} \right] d\lambda; \\ \mathcal{I}_\tau^{(n)}(r, z) &= \int_0^{\infty} \frac{J_1(\lambda a) J_1(\lambda r)}{\Delta(\lambda, \omega)} \frac{p_1 \lambda^3}{\lambda^2 - \mu_n^2} \times \\ &\times \left[\frac{\text{sh } p_1 z}{\text{sh } p_1 h} - \frac{\text{sh } p_2 z}{\text{sh } p_2 h} \right] d\lambda. \end{aligned} \quad (20)$$

Прирівнявши інтегральний вираз для $u_z(r, h)$ і його значення під штампом, після підстановки формули (17) одержуємо на інтервалі $0 \leq r \leq a$ рів-

ність

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty S_n J_0(\mu_n a) \frac{J_1(\lambda a) J_0(\lambda r)}{\lambda^2 - \mu_n^2} \frac{p_1 \lambda^2 d\lambda}{\Delta(\lambda, \omega)} = -2 \frac{c_2^2}{\omega^2 a} U_0. \quad (21)$$

Зрозуміло, що ліву й праву частини співвідношення (21) знову можна розкласти у ряд за системою власних функцій $\{J_0(\mu_m r), m \geq 0 \mid 0 \leq r \leq a\}$. Проведення стандартної процедури алгебраїзації дозволяє після зміни порядку інтегрування перетворити функціональне рівняння (21) у нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{n=0}^\infty S_n J_0(\mu_n a) J_0(\mu_m a) \times \int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a)}{(\lambda^2 - \mu_n^2)(\lambda^2 - \mu_m^2)} \frac{p_1 \lambda^3 d\lambda}{\Delta(\lambda, \omega)} = -\frac{c_2^2}{\omega^2} U_0 \delta_{0m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

де δ_{0m} – символ Кронекера. Легко помітити, що завдяки специфічному вигляду правої частини системи її m -те рівняння можна скоротити на $J_0(\mu_m a)$.

Дослідивши асимптотичну поведінку функцій $J_1(\lambda a)$ в околі своїх коренів, пересвідчуємось, що точки $\lambda = \mu_n, \mu_m$ не є точками розриву підінтегральних функцій. Окрім того, при комплексних c_1 і c_2 рівняння Релея–Лемба не має дійсних коренів. Тому невластні інтеграли у коефіцієнтах при S_n не є сингулярними.

2.2. Виділення сингулярності розв'язку

Нескінченна система (22) належить до систем лінійних рівнянь першого роду (це впливає з самої процедури її отримання). Як правило, такі системи відзначаються поганою обумовленістю, що утруднює їхнє чисельне розв'язання. Такий стан справ є прямим наслідком порушення неперервності нормальних напружень, значення яких на краю штампма мають розрив другого роду. Визначення характеру такої локальної особливості для σ_z важливе з точки зору забезпечення умов існування та єдиності обмеженого розв'язку вихідної задачі [21, 22]. У нашому випадку ідея цієї методики полягає у тому, що всі поля мають бути представлені у формі, яка б забезпечувала фізично обгрунтовану поведінку зміщень і напружень

поблизу краю штампма, на якому відбувається зміна типу однієї з граничних умов. Слід зазначити, що явне виділення особливості дозволяє перейти від системи (22) до еквівалентної лінійної системи відносно невідомих коефіцієнтів регулярної частини розв'язку, яка швидко збігається і забезпечує реалізацію ефективного алгоритму для чисельного аналізу просторових розподілів механічних полів [21].

Відомо, що механічні напруження при контакті вільної пружної поверхні з жорстким штампом мають кореневу особливість поблизу краю штампма [22]. Тому функція розподілу напружень з формули (14) поводитиме себе як

$$\frac{\sigma(r)}{2G} \sim \frac{\text{const}}{\sqrt{1 - (r/a)^2}}, \quad r \rightarrow a. \quad (23)$$

Зауважимо, що аналогічний характер особливості на краю штампма має місце при формулюванні мішаної граничної задачі з використанням дотичних напружень і зміщень [23].

Розклавши асимптотику для нормальних напружень за повною системою базисних функцій на відрізьку $0 \leq r \leq a$, маємо

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (r/a)^2}} = \sum_{n=0}^\infty S'_n J_0(\mu_n r). \quad (24)$$

Після алгебраїзації співвідношення (24) з урахуванням стандартного інтегралу [20, с. 696]

$$\int_0^1 \frac{J_0(xy) x dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sin y}{y}$$

одержуємо

$$S'_n = \frac{2}{J_0^2(\mu_n a)} \frac{\sin \mu_n a}{\mu_n a} \rightarrow (-1)^{n+1} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad n \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Таким чином, невідомі коефіцієнти у ряді для напружень (15) з великими номерами будуть поводити себе як $S'_n \sim \text{const}(-1)^{n+1}$. Згідно з методом покращеної редукції [21] ця оцінка дозволяє наближено записати напруження під штампом у вигляді

$$\frac{\sigma(r)}{2G} \approx \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{S}_n J_0(\mu_n r) + \tilde{S}_N \sum_{n=N}^\infty (-1)^{n+1} J_0(\mu_n r) \quad (26)$$

з відповідною корекцією виразів для зміщень і механічних напружень:

$$\begin{aligned}
 \frac{u_r(r, z)}{u_0} &= -a \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{S}_n J_0(\mu_n a) \mathcal{I}_r^{(n)}(r, z) - \\
 &- a \tilde{S}_N \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^{n+1} J_0(\mu_n a) \mathcal{I}_r^{(n)}(r, z), \\
 \frac{u_z(r, z)}{u_0} &= -a \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{S}_n J_0(\mu_n a) \mathcal{I}_z^{(n)}(r, z) - \\
 &- a \tilde{S}_N \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^{n+1} J_0(\mu_n a) \mathcal{I}_z^{(n)}(r, z); \\
 \frac{\sigma_z(r, z)}{2G u_0} &= a \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{S}_n J_0(\mu_n a) \mathcal{I}_\sigma^{(n)}(r, z) + \\
 &+ a \tilde{S}_N \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^{n+1} J_0(\mu_n a) \mathcal{I}_\sigma^{(n)}(r, z), \\
 \frac{\tau_{rz}(r, z)}{2G u_0} &= -a \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{S}_n J_0(\mu_n a) \mathcal{I}_\tau^{(n)}(r, z) - \\
 &- a \tilde{S}_N \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^{n+1} J_0(\mu_n a) \mathcal{I}_\tau^{(n)}(r, z).
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Підстановка суми (26) замість ряду (15) в граничну умову для нормальних напружень під штампом дозволяє одержати скінченну лінійну алгебраїчну систему, аналогічну за формою до нескінченної системи (22):

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{S}_n J_0(\mu_n a) \times \\
 &\times \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda a)}{(\lambda^2 - \mu_n^2)(\lambda^2 - \mu_m^2)} \frac{p_1 \lambda^3 d\lambda}{\Delta(\lambda, \omega)} + \\
 &+ \tilde{S}_N \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^{n+1} J_0(\mu_n a) \times \\
 &\times \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda a)}{(\lambda^2 - \mu_n^2)(\lambda^2 - \mu_m^2)} \frac{p_1 \lambda^3 d\lambda}{\Delta(\lambda, \omega)} = \\
 &= -\frac{c_2^2}{\omega^2} U_0 \delta_{0m}, \\
 &m = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Тепер шукані коефіцієнти апіорі враховують асимптотичну поведінку напружень на краю

штампа. Отже, при виборі достатньо великого N у системі (28) одержані наближені розв'язки для фізичних полів будуть збігатися швидше, ніж відрізки відповідних рядів при застосуванні простої редуkcії.

3. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ

3.1. Вибір розрахункових параметрів

Чисельний аналіз проводився для пружного шару з такими фізичними характеристиками: $\rho = 1100 \text{ кг/м}^3$, $\text{Re } c_1 = 1500 \text{ м/с}$, $\text{Re } c_2 = 1.7 \text{ м/с}$. Ці значення добре узгоджуються з загальноприйнятими уявленнями про пружні параметри м'яких біотканин для частот $20 \div 20000 \text{ Гц}$ [1, 3, 6, 14]. Зауважимо, що саме цей діапазон становить найбільший інтерес для задач електронної аускультатції та комп'ютерної діагностики респіраторних захворювань.

З огляду на те, що більшість відомих нам експериментів з визначення імпедансних властивостей поверхні тіла проводилась для $f \leq 400 \text{ Гц}$ [4, 5, 24], при розрахунках ми обмежимося саме цими значеннями частоти вібрації штампa. Цей вибір є тим більш природним, що у діапазоні до 1 кГц поведінка імпедансу якісно не змінюється [8] (дані для більш високих частот відсутні). Тут $k_1 a, k_1 h \ll 1$, що дозволяє знехтувати затуханням поздовжніх хвиль і вважати c_1 дійсним.

Для затухання поперечних хвиль було запропоновано модель

$$c_2 = \text{Re } c_2 (1 + i(\delta_1 + \omega \delta_2)),$$

яка при $\delta_1, \omega \delta_2 \ll 1$ близька до моделі дисипації, запропонованої в [6]. При розрахунках вважалось, що $\delta_1 = 0.1$, $\delta_2 = 0.0001 \text{ с}$.

Товщина в'язко-пружного шару приймалася рівною $h = 20 \text{ мм}$, що в цілому відповідає товщині шару м'яких біотканин над кісткою передпліччя дорослої людини. Така оцінка є значно більш реалістичною, ніж 6.5 мм , як вважалось у роботах [6, 7]. Діаметр штампa варіювався відповідно до набору значень, використаних в експериментальному дослідженні [5]: $2a = 8.075, 11.8$ і 16.03 мм .

3.2. Перевірка збіжності алгоритму

Перш за все, перевіримо якість виконання граничних умов при $z = h$ (2) для різної кількості коефіцієнтів $N + 1$, утриманих у наближеному розв'язку задачі. На рис. 2 представлені поверхневі розподіли модулів комплексних амплітуд

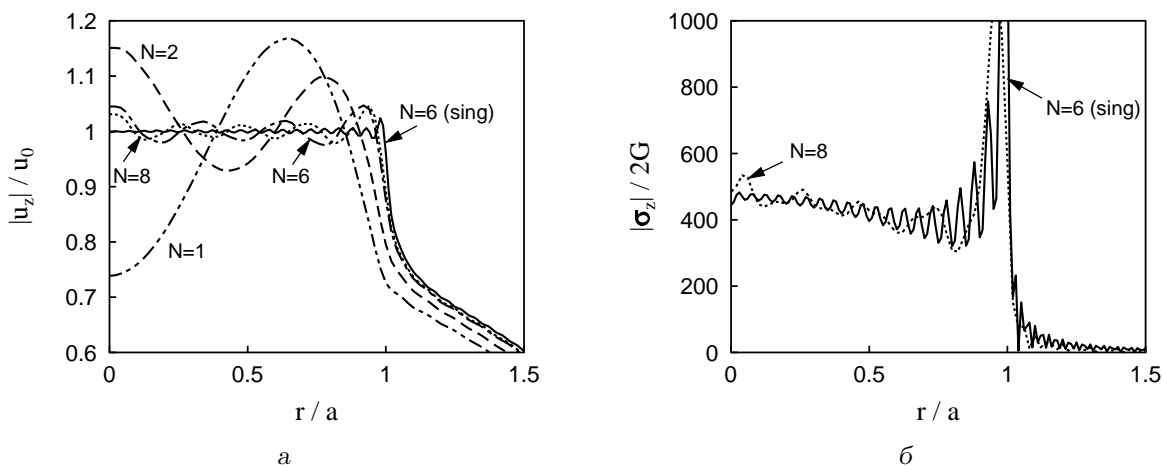


Рис. 2. Ілюстрація точності виконання граничних умов для чисельного розв'язку на частоті $f = 100$ Гц при $2a = 16.03$ мм: а – амплітуда вертикальних зміщень $|u_z|$, б – амплітуда нормальних напружень $|\sigma_z|$

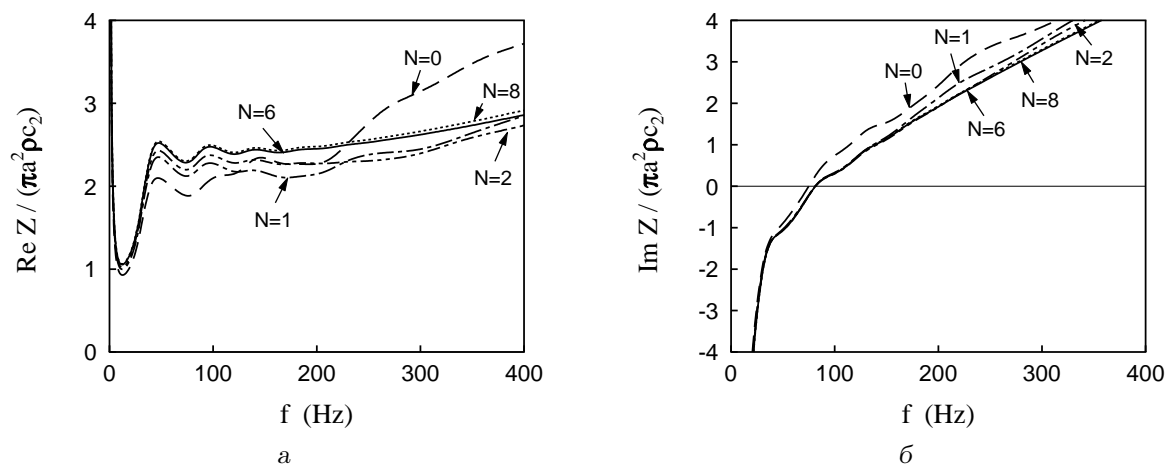


Рис. 3. Збіжність частотної залежності імпедансу при збільшенні порядку системи при застосуванні простої редукції ($2a = 16.03$ мм): а – $\text{Re } Z$, б – $\text{Im } Z$

нормальних (вертикальних) зміщень $u_z(r, h)$ і нормальних напружень $\sigma_z(z, h)$, обчислених за відповідними інтегральними співвідношеннями.

З графіків видно, що при збільшенні N обчислене значення нормованої амплітуди вертикальних зміщень під штампом досить швидко наближається до одиниці (при цьому фаза u_z залишається дуже близькою до нуля). Як і слід було очікувати, точність чисельного розв'язку відчутно покращується при застосуванні метода покращеної редукції з виділенням особливості (див. рис. 2, а): при $N = 6$ на проміжку $0 \leq r/a \leq 0.97$ похибка по зміщеннях не перевищує 1.5 %. Отже, запропонований

алгоритм дозволяє ефективно знаходити розподіл зміщень у пружному шарі.

Розглянувши рис. 2, б, впевнюємось у тому, що як для простої, так і для покращеної редукції чисельні розв'язки демонструють різке (на два і більше порядків) спадання амплітуди нормальних напружень за краєм штамп. Таким чином, можна говорити про задовільне виконання граничної умови $\sigma_z = 0$ при $r > a$. Окрім того, як і слід було очікувати, при підході зсередини до краю штамп амплітуда напружень різко зростає, відображаючи асимптотичну тенденцію (23).

Звертає на себе увагу те, що для обох варіантів

алгоритму спостерігається осциляція $|\sigma_z|$ по поверхні штамп. Така поведінка розв'язку не має під собою фізичного підґрунтя, а є алгоритмічним артефактом. Зауважимо, що застосування методу покращеної редукції не дозволило зменшити амплітуду осциляцій напружень для $r/a > 0.5$. Найбільш вірогідне пояснення цього полягає у тому, що на практиці в алгоритмі з покращенням редукції підсумовування асимптотичного ряду при S_N обмежувалось певним скінченням його відрізком з N_∞ членів. Окрім того, всі невластні інтеграли наближено обраховувались методом парабол з контрольованою точністю на відрізку $0 \leq \lambda \leq \lambda_\infty < \infty$. Відсутність істотного покращення збіжності при збільшенні N_∞ від 18 до 38 і λ_∞ від μ_{19} до μ_{39} може також свідчити про наростання чисельної похибки заокруглення, у першу чергу при наближеному обчисленні функцій Бесселя та їхніх коренів.

Перейдемо до оцінювання швидкості збіжності значення імпедансу Z , рис. 3 (нормування проводилось по дійсній частині c_2). Відомо, що шукана величина є інтегральною (енергетичною) характеристикою системи. Тому, навіть при застосуванні простої редукції, вже при $N=6$ спостерігається стабілізація трьох-чотирьох значущих цифр її дійсної та уявної частин, що можна вважати достатнім для достовірного чисельного аналізу. Загальну ж тенденцію для Z вдається прослідкувати вже при $N \leq 2$.

3.3. Динамічні характеристики на поверхні контакту

Динамічними характеристиками на поверхні контакту є механічний імпеданс та розподіл нормальних напружень під штампом.

Перш за все, розглянемо особливості поведінки функції $Z(f)$. На рис. 4 представлені експериментальні й розрахункові частотні залежності уявної та дійсної частин механічного імпедансу шару біотканини при контакті зі штампами з діаметрами $2a=8.075, 11.8$ і 16.03 мм. Експериментальні криві для поверхні передпліччя людини за даними [5] зображені суцільними лініями. Проаналізуємо ці характеристики більш детально. З графіків видно, що розглянута система демонструє яскраво виражену резонансну поведінку при $f \approx 100$ Гц ($\text{Im } Z \approx 0$).

У статті [6] було запропоновано вираз для низькочастотної одномодової асимптотики імпедансу при контактній взаємодії циліндричного зразка біотканини з вібратором, який фактично є стержневим наближенням Z при нехтуванні впливом

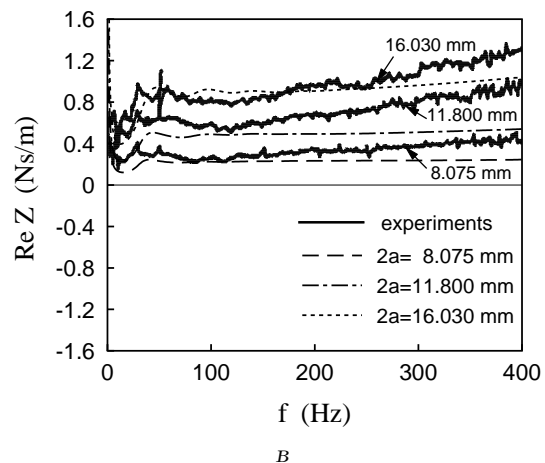
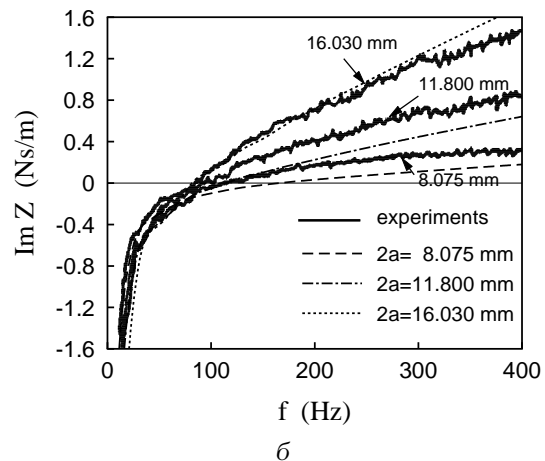
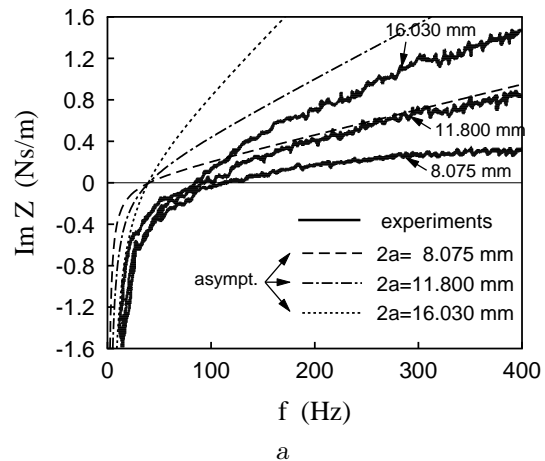


Рис. 4. Порівняння експериментальних кривих для імпедансу передпліччя людини (за даними [5]) з розрахунковими залежностями при різних діаметрах вібратора

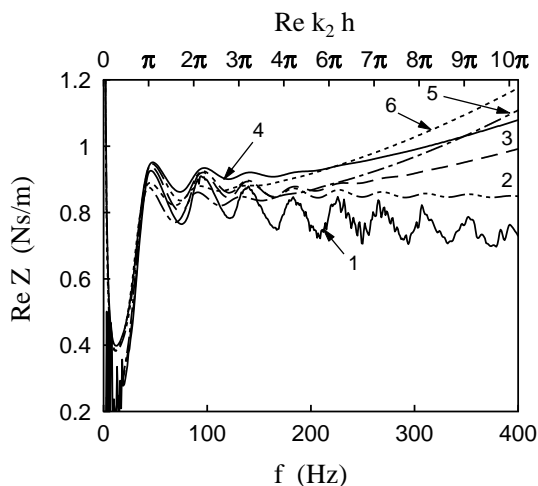


Рис. 5. Активна частина імпедансу шару для різних параметрів затухання ($2a = 16.03$ мм):

- 1 - $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0.00001$ с; 2 - $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0.0001$ с;
 3 - $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0.0003$ с; 4 - $\delta_1 = 0.1$, $\delta_2 = 0$ с;
 5 - $\delta_1 = 0.1$, $\delta_2 = 0.0001$ с; 6 - $\delta_1 = 0.1$, $\delta_2 = 0.0003$ с

згинальних коливань:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \mathcal{Z} = \frac{\pi a^2}{h} \left[\frac{1}{i\omega} E + i\omega \rho \left(\frac{1}{3} h^2 + \frac{\nu^2}{2} a^2 \right) \right]. \quad (29)$$

Тут $E = 2(1 + \nu) \mathbf{Re} G$ – модуль Юнга матеріалу. Рис. 4, а дає можливість порівняти асимптотичну оцінку (29) з експериментальними значеннями $\mathbf{Im} \mathcal{Z}$. Впадає в око якісна подібність зображених кривих, яка говорить про домінуючий внесок поздовжніх коливань циліндра біотканини під штампом у величину механічного імпедансу. Водночас, наявні значні розбіжності між асимптотичними залежностями (29) та результатами [5]. По-перше, для експериментальних кривих резонансна частота, на якій $\mathbf{Im} \mathcal{Z} = 0$, лежить значно вище, ніж для розрахункових. По-друге, на експериментальних кривих при зміні радіусу штампа можна відзначити досить істотну змінюваність резонансної частоти: 112 Гц для $2a = 8.075$ мм, 96 Гц для $2a = 11.8$ мм і 85 Гц для $2a = 16.03$ мм. Для всіх трьох асимптотичних залежностей резонансна частота залишається практично незмінною: $39 \div 40$ Гц. По-третє, насправді приєднана маса у зоні контакту виявляється приблизно вдвічі меншою, ніж за низькочастотною оцінкою (29) (до певної міри це справедливо і для еквівалентної пружності системи).

На рис. 4, б проведено порівняння експериментальних залежностей $\mathbf{Im} \mathcal{Z}$ з відповідним розв'язком задачі про гармонічні коливання шару. У цьому разі як кількісний, так і якісний збіг за трьома зазначеними вище позиціями виявляється набагато кращим. Найбільш помітними ж розбіжностями

ми є неспівпадання величин резонансних частот (при розрахунку – 166, 115 і 82 Гц для $2a = 8.075$, 11.8 і 16.03 мм відповідно), а також дещо нижчі величини приєднаної маси для двох менших штампів. Зауважимо, що варіювання $\mathbf{Re} c_2$ у межах від 1 до 2.2 м/с не дозволило досягти відчутної зміни величини $\mathbf{Im} \mathcal{Z}$ на частотах, вищих за резонансну. На нашу думку, зазначена невідповідність теорії з експериментом [5] може бути пояснена за рахунок наявності тертя на ділянці контакту вібратора й поверхні тіла людини. Дійсно, за рахунок тертя приєднана маса біотканини в околі штампавібратора має дещо зрости (до речі, це призведе і до зниження резонансних частот). Що ж до штампа з $2a = 16.03$ мм, то для нього частотна характеристика імпедансу є більш “м'якою”. Справа у тому, що таке значення діаметра уже наближається до характерного поперечного розміру кістки передпліччя. Тому більш відчутною стає кривизна твердої основи і розглянута площинна модель шару перестає бути адекватною.

Рис. 4, в ілюструє поведінку дійсної частини імпедансу для розглянутої системи. З графіка видно, що характер і величини розрахункових залежностей $\mathbf{Re} \mathcal{Z}$ досить близькі до відповідних експериментальних даних. Дещо занижені значення для теоретичних кривих також дозволяють припустити наявність тертя у системі [5].

На рис. 5 зображено частотні залежності активної частини імпедансу контактної ділянки для різних значень параметрів затухання δ_1 і δ_2 . Добре помітно, що при усіх варіантах розрахунку поведінка $\mathbf{Re} \mathcal{Z}$ в області високих частот є досить близькою – її значення осцилює навколо певної константи або повільно зростає. Така поведінка пояснюється домінуванням радіаційної складової імпедансу. Дійсно, розглянутий шар вже при $f \approx 50$ Гц має хвильову товщину відносно поперечної хвилі порядку π . При цьому процес випромінювання енергії у хвилеводі з одною вільною поверхнею починається за умови існування, принаймні, одної біжучої хвилі ($\mathbf{Re} k_2 h > \pi/2$) [13]. Уведення ж дисипації у біотканині дозволяє фізично обґрунтувати ефект необоротного випромінювання акустичної енергії при вібронантаженні тіла людини і надає можливість застосування модельної системи з необмеженими розмірами. З графіка видно, що для $\delta_1 \neq 0$ повинно спостерігатись необмежене зростання $\mathbf{Re} \mathcal{Z}$ при $f \rightarrow 0$, що не відповідає дійсності. Цей результат є вадою моделі, згідно з якою вводиться частотно незалежна складова дисипації у середовищі. Відзначимо, що зміна величин δ_1 , δ_2 у широких межах мало впливає на частотну залежність $\mathbf{Im} \mathcal{Z}$, викликаючи ли-

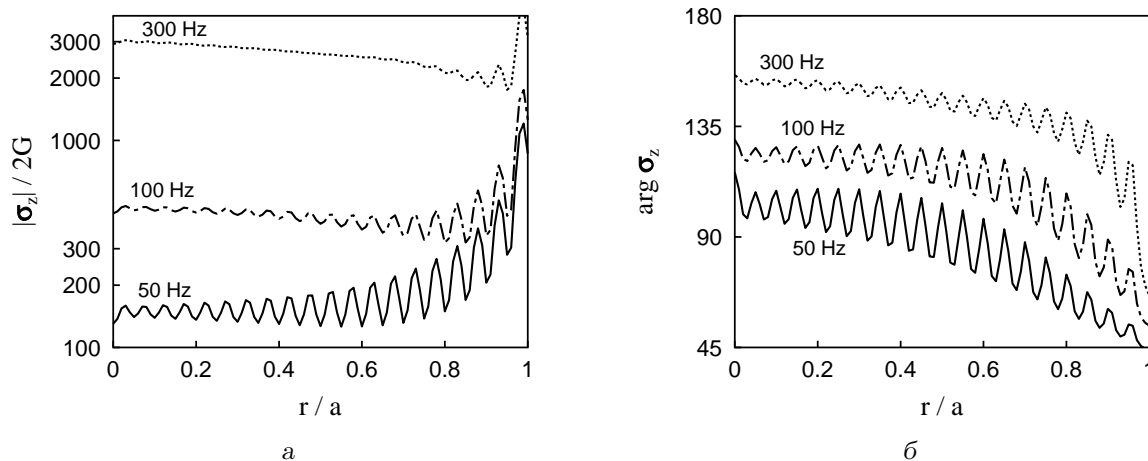


Рис. 6. Розподіл амплітуд (а) і фаз (б) нормальних напружень під штампом $\sigma_z(r, h)$ для $2a = 16.03$ мм

ше незначне її зменшення на високих частотах.

Перейдемо до рис. 6, на якому показані графіки розподілів амплітуди і фази $\sigma_z(r, h)$ при $0 \leq r \leq a$ для частот, які належать трьом характерним зонам – дорезонансній (50 Гц), навколорезонансній (100 Гц) і післярезонансній (300 Гц). Незважаючи на паразитні осциляції, на графіку чітко спостерігається, що зі збільшенням частоти змінюється характер розподілу напружень: від монотонного “увігнутого” з мінімумом у центрі штампа і зростанням при наближенні до краю (нижче резонансу) до “опуклого” з максимумом у центрі штампі і спаданням при $r/a \leq 0.9$ (після резонансу). При цьому зі збільшенням частоти амплітуда механічних напружень під штампом суттєво зростає. Окрім того, при збільшенні частоти від 50 до 300 Гц спостерігається зростання фази майже на 90° по всій поверхні штампа, а відносний розподіл фаз під штампом залишається практично незмінним (набіг фази σ_z від центру до краю штампа становить близько 60°). Така тенденція добре узгоджується з поведінкою імпедансу контактної поверхні.

Слід зауважити, що одержані картини перебудови розподілу напружень під штампом у залежності від частоти спростовують припущення про сталий характер функції $\sigma(r)$ в усьому розглянутому діапазоні [24]. Більше того, ми зайвий раз переконались, що ця функція не є регулярною, а має інтегровану кореневу особливість при $r = a$. Цей результат є серйозним аргументом на користь спеціального розгляду задачі з нав’язаною амплітудою вертикальних зміщень замість традиційних постановок із заданою наперед кусково-неперервною функцією напружень на всій поверхні об’єкта ви-

мірювань [24, 25].

3.4. Розподіли вертикальних і горизонтальних зміщень у шарі

Для того, щоб глибше зрозуміти фізичні особливості формування динамічної реакції поверхні контакту зі штампом, розглянемо просторові розподіли амплітуд вертикальних (нормальних) і горизонтальних (радіальних) зміщень у шарі для двох штампів: $2a = 8.075$ мм ($h/a \approx 0.202$) – рис. 7 – і $2a = 16.03$ мм ($h/a \approx 0.401$) – рис. 8. Для кожного зі штампів обчислення проведені на трьох характерних частотах: у дорезонансному, резонансному й післярезонансному діапазонах. Хоча ці графіки не дають повного уявлення про кінематику матеріальних частинок шару, вони дозволяють зробити певні висновки про інтенсивність їх залучення до коливального руху в залежності від глибини залягання і відстані від центру штампа.

Незважаючи на різницю у геометричних характеристиках двох розглянутих систем, у їхній поведінці багато спільного. Як і слід було очікувати, для всіх значень z/h максимальні величини вертикальних зміщень u_z спостерігаються під центром штампа, причому при збільшенні частоти швидкість спадання амплітуд u_z з глибиною зростає. Так, у післярезонансному діапазоні вертикальна компонента зміщень прилеглої до жорсткої основи частини матеріалу під штампом ($z/h < 0.5$) близька до нуля. Одночасно відбувається значне зростання горизонтальних зміщень u_r у приповерхневому шарі. Наприклад, для більшого штампа, діаметр якого має один порядок з висотою шару,

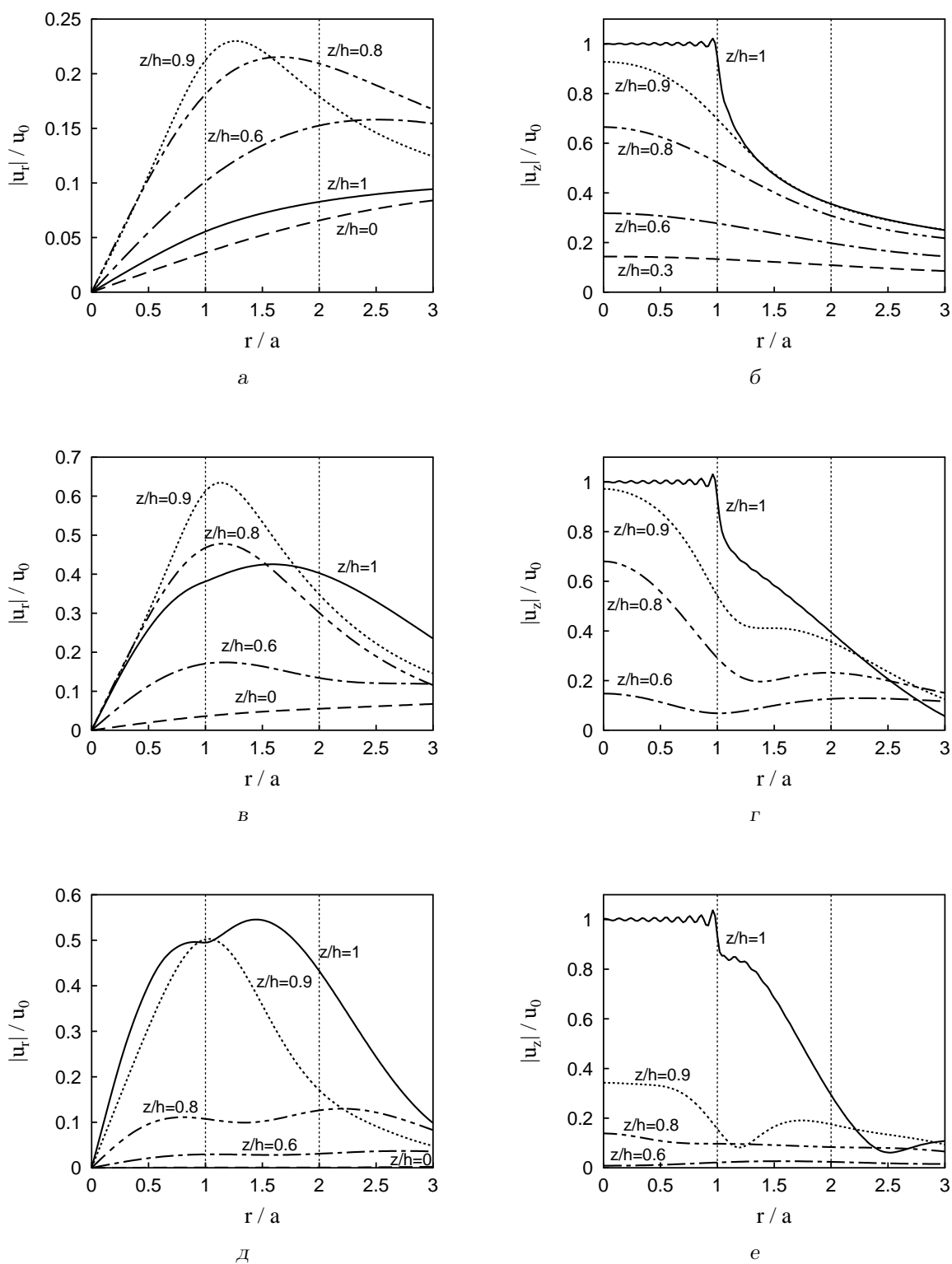


Рис. 7. Амплітуди вертикальних і горизонтальних зміщень точок шару при діаметрі штампa $2a = 8.075$ мм:
 а, б – $f = 50$ Гц, в, г – $f = 166$ Гц, д, е – $f = 300$ Гц,
 а, в, д – u_z , б, г, е – u_r

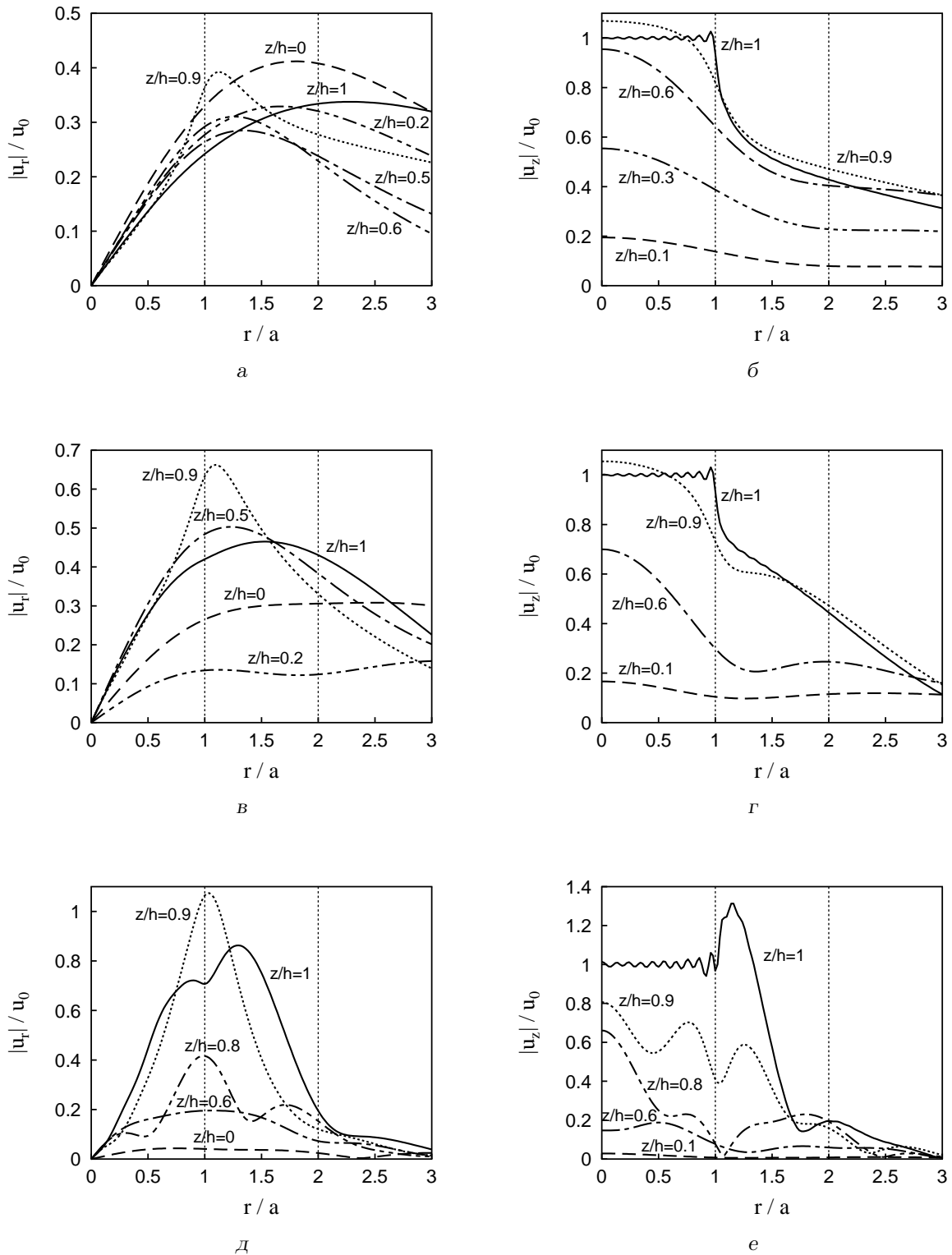


Рис. 8. Амплітуди вертикальних і горизонтальних зміщень точок шару при діаметрі штампa $2a = 16.03$ мм:
 а, б – $f = 50$ Гц, в, г – $f = 82$ Гц, д, е – $f = 300$ Гц,
 а, в, д – u_z , б, г, е – u_r

на частоті $f = 300$ Гц горизонтальні зміщення при $0.9 \leq r/a \leq 1$ близькі за амплітудами до вертикальних. Амплітуди ж горизонтальних зміщень для ($z/h < 0.5$) здебільшого залишаються невисокими і спадають з ростом частоти. Це дозволяє говорити про високочастотну локалізацію деформацій матеріалу шару на невеликих глибинах залягання під штампом. Опосередковано цей висновок підтверджується розрахунками величини механічного імпедансу Z для шарів з $h = 1, 2$ і 3 см – для цих випадків $\text{Im } Z$ для $f > 200$ Гц виявились дуже близькими.

Таким чином, у матеріалі шару, розташованому безпосередньо під штампом, спостерігається ефективна трансформація вертикальних зміщень у горизонтальні, амплітуди яких зростають зі збільшенням частоти. Це створює сприятливі умови для реалізації механізму сухого тертя на контакті штамп – поверхня шару.

З відносної малорухомоті частини матеріалу, який залягає на глибинах $z/h < 0.5$, випливає ще один важливий висновок. При розглянутих геометричних, фізичних та хвильових параметрах системи величина імпедансу ділянки під штампом буде слабо залежати від точного вигляду граничних умов при $z = 0$: гладкий безвіддиривний контакт з жорсткою основою, контакт з тертям, або повне зчеплення. Це дозволяє зупинитись на розглянутому рівні ідеалізації моделі, який забезпечує найбільш простий математичний вигляд розв'язків.

Варто відзначити, що розподіли амплітуд горизонтальних зміщень виявились досить складними й немонотонними. Так, на дорезонансних і резонансних частотах максимальні значення u_r при $0 \leq r \leq a$ спостерігаються не безпосередньо під штампом, а на певній невеликій глибині (див. рис. 7, а, в і 8а, в). Для великих штампів ($2a \sim h$) це справедливо і на післярезонансних частотах (див. рис. 8, д). При $2a = 16.03$ мм зафіксовано ще одну аномалію – до і на резонансі горизонтальні зміщення при $z = 0$ не завжди є найменшими.

Для післярезонансної частоти $f = 300$ Гц спостерігається певна перебудова розподілів полів зміщень як під штампамі, так і у ближній зоні (див. рис. 7, д, е і 8д, е). Як і слід було очікувати, ці зміни більш яскраво виражені для більшого штампів. Тут матеріал шару “не встигає” за штампом, що призводить до формування пучностей зміщень відразу за краєм штампів.

До певної міри аналогічну поведінку демонструють розрахункові розподіли ближнього поля зміщень у задачі про віброзбудження пружної шаруватої структури, яка моделює поверхню тіла [25].

ВИСНОВКИ

1. З використанням граничних інтегральних співвідношень, які зводяться до нескінченної системи лінійних інтегральних рівнянь, розв'язано задачу про гармонічні коливання в'язко-пружного шару, навантаженого плоским гладким штампом кругового перерізу. На основі апріорної інформації про поведінку механічних напружень на краю штампів побудовано ефективний алгоритм для обчислення розподілів механічних полів у матеріалі шару та механічного імпедансу ділянки поверхні, яка контактує зі штампом.
2. Встановлено, що у діапазоні частот від 0 до 400 Гц розглянута система демонструє резонансну поведінку, причому величина резонансної частоти суттєво залежить від діаметра штампів. Окрім того, за рахунок наявності дисипації у матеріалі та механізму випромінювання поперечних хвиль формується активна складова імпедансу поверхні контакту, яка має один порядок величини з реактивною складовою. Розрахункові частотні залежності імпедансу добре співвідносяться з даними, одержаними в експериментах по віброзбудженню біцепса людини.
3. Показано, що стержньове (низькочастотне) наближення для уявної частини імпедансу виявилось менш точним, ніж повний розв'язок для шару. Це свідчить про істотну роль, яку грають поперечні моди коливань і присутність матеріалу шару поза штампом, у формуванні динамічної реакції поверхні під штампом.
4. Визначено, що при переході через резонанс суттєво змінюється характер розподілу механічних напружень під штампом. При цьому поблизу краю штампів нормальні напруження мають кореневу особливість. Така поведінка вказує на неадекватність математичних постановок, у яких задається регулярний розподіл напружень під штампом, незмінний у всьому діапазоні частот.
5. Вивчення просторових розподілів полів зміщень матеріалу шару показало, що найбільш інтенсивного збудження зазнає приповерхнева зона під штампом. При цьому вертикальні зміщення, індуковані штампом, ефективно трансформуються у горизонтальні. Зі збільшенням частоти наростає локалізація деформацій у приповерхневій зоні шару. Зауважи-

мо, що саме інтенсивні горизонтальні зміщення поверхні під погано зафіксованим сенсором створюють характерну віброакустичну заваду при аускультатії звуків дихання на поверхні грудної клітки людини.

6. Одержані результати можуть служити основою для застосування розглянутого методу при розв'язанні контактних задач з іншими типами граничних умов.

ПОДЯКИ

Автори глибоко вдячні доктору фіз.-мат. наук О. М. Гомілку за корисні поради та плідну дискусію при дослідженні асимптотичних властивостей розв'язку задачі.

1. *Oestreicher H. L.* Field and impedance of an oscillating sphere in a viscoelastic medium with an application to biophysics // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1951.– **23**, N 6.– P. 707–714.
2. *Олійник В. Н.* Раціональне проектування п'єзоакселерометрів для вимірювань на піддатливих поверхнях // *Акуст. вісн.*– 1998.– **1**, N 3.– С. 54–65.
3. *Zhang X., Royston T. J., Mansy H. A., Sandler R. H.* Radiation impedance of a finite circular piston on a viscoelastic half-space with application to medical acoustics // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 2001.– **109**, N 2.– P. 795–802.
4. *Vermarien H., van Vollenhoven E.* The recording of heart vibrations: A problem of vibration measurement on soft tissue // *Med. Biol. Engng Comput.*– 1984.– **22**.– P. 168–178.
5. *Тиманин Е. М.* Модель формирования импедансных свойств мягких биологических тканей // *Методы вибрационной диагностики реологических характеристик мягких материалов и биологических тканей.*– Горький: ИПФ АН СССР, 1989.– С. 75–91.
6. *Олійник В. Н.* Моделирование контактной взаємодії обмеженої ділянки поверхні тіла людини з вібратором // *Акуст. вісн.*– 2003.– **6**, N 2.– С. 58–67.
7. *Олійник В. Н.* Моделирование механічної реакції циліндра з в'язко-пружної біотканини при гармонічному навантаженні торців в умовах повного зчеплення з вібратором // *Акуст. вісн.*– 2004.– **7**, N 2.– С. 65–71.
8. *Verburg J., van Vollenhoven E.* Phonocardiography: physical and technical aspects and clinical uses // *Non invasive physiological measurements.*– London: Academic press, 1979.– P. 213–259.
9. *Pasterkamp H., Kraman S. S., Wodicka G. R.* Respiratory sounds. Advances beyond the stethoscope // *J. Respir. Crit. Care Med.*– 1997.– **156**.– P. 974–987.
10. *Лебедева Л. П.* Измерение динамического комплексного модуля сдвига тканей животных // *Акуст. ж.*– 1965.– **11**, N 2.– С. 197–200.
11. *Gennisson J.-L., Catheline S., Chaffai S., Fink M.* Transient elastography in anisotropic medium: Application to the measurement of slow and fast shear wave speeds in muscles // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 2003.– **114**, N 1.– P. 536–540.
12. *Titze I. R., Klemuk S.A., Gray S.* Methodology for rheological testing of engineering biomaterials at low audio frequencies // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 2004.– **115**, N 1.– P. 392–401.
13. *Олійник В. Н.* Акустические свойства слоя на жестком основании при локальном вибровозбуждении // *Акуст. вісн.*– 2002.– **5**, N 1.– С. 42–49.
14. *Пашовкин Т. Н., Сарвазян А. П.* Механические характеристики мягких биологических тканей // *Методы вибрационной диагностики реологических характеристик мягких материалов и биологических тканей.*– Горький: ИПФ АН СССР, 1989.– С. 105–115.
15. *Greenleaf J. F., Fatemi M., Insana M.* Selected methods for imaging elastic properties of biological tissues // *Ann. Rev. Biomed. Engng.*– 2003.– **5**.– P. 57–78.
16. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
17. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред.– М.: Наука, 1989.– 344 с.
18. *Парфененко Д. Н., Улитко А. Ф.* Вдавливание в упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму кругового сегмента // *Изв. РАН. МТТ.*– 1994.– N 6.– С. 32–41.
19. *Сеймов В. М.* Динамические контактные задачи.– К.: Наук. думка, 1976.– 284 с.
20. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Физматгиз, 1971.– 1108 с.
21. *Гринченко В. Т., Вовк И. В.* Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках.– К.: Наук. думка, 1986.– 235 с.
22. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* О локальных особенностях в математических моделях физических полей // *Мат. методи і фіз.-мех. поля.*– 1998.– **41**, N 1.– С. 12–34.
23. *Улитко А. Ф.* Векторные разложения в пространственной теории упругости.– К.: Академперіодика, 2002.– 342 с.
24. *Еремін Е. В., Тиманин Е. М.* Интерпретация механического импеданса слоя, измеренного с помощью твердого круглого штампа // *Акуст. ж.*– 2000.– **46**, N 4.– С. 490–495.
25. *Клочков Б. Н.* Ближнее поле силового низкочастотного источника на слоистой биоткани // *Акуст. ж.*– 2002.– **48**, N 1.– С. 70–76.