

УДК 539.3

АНАЛИЗ ФИЗИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ ЯВЛЕНИЯ КРАЕВОГО РЕЗОНАНСА В УПРУГИХ ТЕЛАХ

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ, В. Т. ГРИНЧЕНКО

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 20.11.2003 ◊ Пересмотрено 6.04.2004

Проведен анализ особенностей краевого резонанса при симметричных колебаниях полуслоя со свободным торцом для различных значений коэффициента Пуассона. Показано, что с его изменением от 0 до 0.5 частота краевого резонанса возрастает от 1.99 до 2.61. При этом добротность резонанса резко падает. Рассматривая первую распространяющуюся волну как суперпозицию продольных и поперечных волн, отметим, что на частоте краевого резонанса на боковых поверхностях полуслоя поперечная волна является распространяющейся, а продольная – неоднородной. На частоте $\Omega_2 = 2.2$ практически для всех коэффициентов Пуассона на ширине полуслоя укладывается целое число поперечных (SV) полуволн ($\sigma_{yy}(\pm 1, 0) = 0$). Для умеренных значений коэффициента Пуассона ($0.22 \leq \nu \leq 0.42$) существует диапазон частот, в котором поперечная волна падает на свободный торец под углом, большим критического, и продольная волна (P) является распространяющейся. В этом случае также существует частота Ω_e^1 , на которой $\sigma_{yy}(\pm 1, 0) = 0$ (с учетом SV- и P-волн). Для умеренных значений коэффициента Пуассона частота краевого резонанса лежит между Ω_2 и Ω_e^1 .

Проведено аналіз особливостей крайового резонансу при симетричних коливаннях півшару з вільним торцем для різних значень коефіцієнта Пуассона. Показано, що з його зміною від 0 до 0.5 частота крайового резонансу зростає від 1.99 до 2.61. При цьому добротність резонансу різко падає. Розглядаючи першу хвилю, що поширюється, як суперпозицію поздовжніх і поперечних хвиль, відзначимо, що на частоті крайового резонансу на бічних поверхнях півшару поперечна хвиля поширюється, а поздовжня є неоднорідною. На частоті $\Omega_2 = 2.2$ практично для всіх коефіцієнтів Пуассона на ширині півшару вкладається ціле число поперечних (SV) півхвиль ($\sigma_{yy}(\pm 1, z) = 0$). Для помірних значень коефіцієнта Пуассона $0.22 \leq \nu \leq 0.42$ існує частотний діапазон, в якому поперечна хвиля падає на вільний торець під кутом, більшим за критичний, і поздовжня хвиля (P) є такою, що поширюється. У цьому випадку також існує частота Ω_e^1 , на якій $\sigma_{yy}(\pm 1, 0) = 0$ (з урахуванням SV- та P-хвиль). Для помірних значень коефіцієнта Пуассона частота крайового резонансу лежить між Ω_2 і Ω_e^1 .

The features of the edge resonance are analyzed for symmetric vibrations of a semi-layer with the free edge at various Poisson's ratios. It is shown that when the Poisson's ratio changes from 0 to 0.5 the frequency of the edge resonance Ω_e increases from 1.99 to 2.61. At the same time, the quality factor sharply decreases. Considering the first propagating wave as a superposition on primary and secondary waves, we note that on the edge resonant frequency the secondary wave propagates on lateral surfaces of the semi-layer, while the primary wave is an evanescent one. At frequency $\Omega_2 = 2.2$ practically for all Poisson's ratios the integer number of the secondary (SV) half-waves confines to width of the semi-layer ($\sigma_{yy}(\pm 1, z) = 0$). For moderate values of the Poisson's ratios $0.22 \leq \nu \leq 0.42$ the frequency range exists, for which the secondary wave falls to the free edge under supercritical angle, and the primary wave (P) becomes the propagating one. For this case also the frequency Ω_e^1 exists, for which $\sigma_{yy}(\pm 1, 0) = 0$ (accounting for SV- and P-waves). For moderate Poisson's ratios the edge resonant frequency lays between Ω_2 and Ω_e^1 .

ВВЕДЕНИЕ

Закономерности процесса возбуждения и распространения волн Рэлея–Лэмба в изотропном упругом полубесконечном слое являются предметом интенсивных исследований [1–6], основанных на аналитических и численных подходах. К настоящему времени накоплен значительный объем информации о структуре и свойствах волнового поля в таком волноводе при различных способах его возбуждения. Именно на этой простейшей модельной задаче удается проиллюстрировать специфические волновые эффекты, наблюдаемые в упругих телах конечных размеров и не имеющие аналогов в акустических и электромагнитных волноводах.

Одним из упомянутых эффектов является краевой резонанс [1, 2]. Это явление возникает как при свободных, так и при вынужденных колебаниях

упругих тел. В случае конечных тел речь идет о наличии специфической собственной формы колебаний, образование которой связано с интенсивным возбуждением неоднородных волн. Именно поэтому изучение механизма, обуславливающего их возбуждение, можно провести, рассматривая относительно простую задачу отражения приходящей из бесконечности нормальной волны от торца полубесконечного волновода.

Следует отметить, что частота, на которой происходит сильная локализация движения вблизи торца в полуограниченных телах, найденная численно, совпадает с частотой краевого резонанса в конечных упругих телах, полученной экспериментально. Поэтому для анализа физических причин значительного возбуждения неоднородных волн на частоте краевого резонанса можно рассматривать особенности распространения упругих волн в полуограниченных телах. Такой подход основан

на предположении о том, что характеристики стоячей волны в конечном упругом теле можно предсказать на основании анализа отражения бегущей волны от свободной поверхности. При этом существенно, что частота краевого резонанса лежит в области частот, для которой в упругом слое существует только одна распространяющаяся мода.

Экспериментально краевой резонанс впервые обнаружен Е. Шоу [1] и Дж. Оливером [2]. Изучению этого явления, которое справедливо связывают с резонансом на неоднородных волнах [3], посвящено очень много экспериментальных и теоретических работ. В результате проведенных исследований получены достаточно полные данные о значении собственной частоты и характеристиках соответствующей собственной формы колебаний. Однако накопленный фактический материал не дает возможности проанализировать физический механизм, обуславливающий возможность и неизбежность возникновения краевого резонанса как эффекта, характерного для упругих тел.

Традиционно резонансные явления в упругих телах изучаются при рассмотрении вынужденных колебаний под действием заданных на границе силовых или кинематических воздействий. В случае полуслоя появляется возможность рассмотреть дополнительный источник возбуждения волнового процесса – падающую из бесконечности волну. Она имеет конечную энергию во всем частотном диапазоне. Кроме того, отраженная (уходящая на бесконечность) волна формирует в системе специфический радиационный механизм затухания. О возникновении при этом резонансных ситуаций можно говорить, анализируя частотную зависимость силовых или кинематических характеристик отраженного волнового поля. В случае его возбуждения падающей из бесконечности волной в диапазоне частот, где распространяется только одна волна, существование резонансных явлений на распространяющихся волнах невозможно. Здесь речь может идти лишь об особом характере возбуждения неоднородных волн. При этом амплитуда таких волн всегда остается конечной в силу наличия радиационного демпфирования.

При возбуждении колебаний заданной силовой нагрузкой ситуация может измениться. Для вынужденных колебаний характерна возможность в ряде случаев устранить связь между распространяющейся и неоднородными волнами и получить краевой резонанс “в чистом виде”, т. е. обращение в бесконечность амплитуд смещений на резонансной частоте. Связь между распространяющейся и неоднородными волнами устраняется, например, для симметричных колебаний полушары и полуци-

линдра [4] при коэффициенте Пуассона $\nu = 0$. В этом случае амплитуда неоднородных волн при возбуждении колебаний самоуравновешенной нагрузкой стремиться к бесконечности [4, 7].

В случае неосесимметричных колебаний полу-бесконечного цилиндра резонанс при вынужденных колебаниях наблюдается для произвольных значений ν [8]. Для неосесимметричных колебаний полуцилиндра наименьшая частота запертого волновода больше нуля при всех возможных значениях коэффициента Пуассона. Поскольку частота краевого резонанса оказывается меньше значения нижней критической частоты, неограниченный рост амплитуды неоднородных волн при вынужденных колебаниях здесь наблюдается при произвольном ν .

Таким образом, эффективность возбуждения краевого резонанса существенно зависит как от параметров среды (коэффициента Пуассона), так и от способа возбуждения волнового поля в упругом теле. В данном исследовании определена степень влияния обоих факторов, однако упор делается на поиск физического механизма, обуславливающего возникновение краевого резонанса. При этом важную роль играют фундаментальные особенности процесса отражения упругих волн от свободной границы упругого тела.

Материал статьи изложен следующим образом. В первом разделе дана постановка граничной задачи для двух случаев возбуждения волнового поля. Во втором разделе представлена простейшая волноводная система, для которой процесс отражения от края связан с генерацией неоднородных волн. Количественные оценки погрешности решения задачи для полубесконечного слоя при приближенном удовлетворении граничных условий представлены в третьем разделе. Здесь использовано приближение, аналогичное стержневой модели, когда граничные условия на торце выполняются только для нормальных напряжений. Затем проанализированы результаты точного решения задачи и проведен анализ механизма формирования волнового поля вблизи торца волновода. В заключении суммируются результаты проведенного анализа.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоскую задачу определения волнового поля в изотропном полубесконечном упругом слое $|Y| \leq H$, $Z \geq 0$, $-\infty < X < \infty$ (случай плоской деформации) с заданными физическими характеристиками: модулем сдвига μ , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . Выбор системы коор-

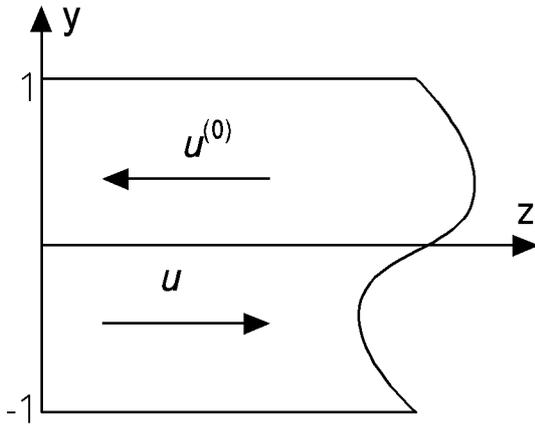


Рис. 1. Геометрия задачи

динат и геометрия области показаны на рис. 1. Волны предполагаются гармоническими с круговой частотой ω . Зависимость от времени кинематических и силовых характеристик поля задается множителем $e^{-i\omega t}$, который в последующих выкладках опущен. Частота ω считается положительной вещественной величиной. Рассматривается симметричное относительно плоскости $Y=0$ волновое поле. При построении решения соотношениями $y=Y/H, z=Z/H$ вводятся безразмерные координаты.

Рассмотрим два способа возбуждения волнового поля в волноводе. В первом случае изучается процесс отражения приходящей из бесконечности нормальной волны $\mathbf{u}^{(0)}(y, z)$ от свободного от напряжений торца волновода (см. рис. 1). Для нахождения характеристик отраженных волн $\mathbf{u}^{(1)}(y, z)$ необходимо решить следующую граничную задачу для уравнений движения Ламе [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(1)}(y, 0) + \sigma_{zz}^{(0)}(y, 0) &= 0, & |y| \leq 1, & z = 0, \\ \tau_{zy}^{(1)}(y, 0) + \tau_{zy}^{(0)}(y, 0) &= 0, & |y| \leq 1, & z = 0, \\ \sigma_{yy}^{(1)}(\pm 1, z) = \tau_{yz}^{(1)}(\pm 1, z) &= 0, & y = \pm 1, & z \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

При рассмотрении второго случая – вынужденных колебаний – ограничимся заданием равномерно распределенной нормальной нагрузки на торце. Изменение вида распределения напряжений не приводит к каким-либо качественным изменениям в характере вынужденных колебаний. Для определения характеристик генерируемого волнового

поля $\mathbf{u}^{(1)}(y, z)$ следует решить граничную задачу

$$\frac{\sigma_{zz}^{(1)}}{2\mu} = S_0, \quad \frac{\tau_{zz}^{(1)}}{2\mu} = 0. \quad (2)$$

В обоих случаях поверхности $y = \pm 1$ считаются свободными от напряжений. Количественные характеристики волновых полей будем нормировать на амплитуду падающей волны или на величину внешней нагрузки на торце S_0 .

Частные решения уравнений движения Ламе в принятой системе координат, соответствующие по форме бегущим в направлении оси Oz волнам, хорошо известны [4]. При выборе необходимых комбинаций таких решений для удовлетворения граничных условий следует принимать во внимание условия излучения. Поскольку рассматриваемый диапазон частот не включает частоту запертия второй нормальной волны, знак фазовой скорости в используемых частных решениях определен однозначно. Так, компоненты вектора смещений в падающей из бесконечности волне представляются в виде

$$\begin{aligned} u_z(y, z) &= -i\xi \left(\alpha_1^2 \alpha_2 \frac{\text{ch } \alpha_2 y}{\text{sh } \alpha_2} - \frac{\xi^2 + \alpha_2^2}{2} \alpha_1 \frac{\text{ch } \alpha_1 y}{\text{sh } \alpha_1} \right) e^{-i\xi z}, \\ u_y(y, z) &= \alpha_1^2 \left(\xi^2 \frac{\text{sh } \alpha_2 y}{\text{sh } \alpha_2} - \frac{\xi^2 + \alpha_2^2}{2} \frac{\text{sh } \alpha_1 y}{\text{sh } \alpha_1} \right) e^{-i\xi z}, \end{aligned} \quad (3)$$

где ξ – волновое число. Приведенные выражения тождественно удовлетворяют уравнениям движения упругого тела, если параметры α_j связаны с волновым числом и частотой следующими соотношениями:

$$\alpha_j = \begin{cases} \sqrt{\xi^2 - \Omega_j^2}, & |\xi| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \xi^2}, & |\xi| < \Omega_j. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь введены безразмерные частоты $\Omega_1 = \omega H/c_l$ и $\Omega_2 = \omega H/c_s$, привязанные к скоростям продольной c_l и поперечной c_s волн.

Для того, чтобы соответствующие выражениям (3) компоненты тензора напряжений σ_{zz} и τ_{yz} обращались в нуль на свободных поверхностях $y = \pm 1$ при заданном значении частоты, постоянная распространения ξ должна определяться из

дисперсионного уравнения

$$\Delta(\xi) = \left(2\xi^2 - \Omega_2\right)^2 \alpha_1 \operatorname{cth} \alpha_1 - 4\xi^2 \alpha_1^2 \alpha_2 \operatorname{cth} \alpha_2 = 0. \quad (5)$$

Это уравнение хорошо изучено, и при фиксированном значении частоты имеет конечное число вещественных и чисто мнимых корней, а также бесконечное число комплексных корней [4]. Решения уравнений движения для вещественных корней определяют систему распространяющихся волн в слое. Решения для мнимых и комплексных корней характеризуются существенной изменчивостью характеристик по координате z и используются лишь для удовлетворения граничных условий вблизи торцевых поверхностей. Численные процедуры определения значений корней также хорошо отработаны. Отметим, что в рассматриваемом диапазоне частот уравнение (5) имеет один вещественный и ни одного мнимого корня. Это обстоятельство учтено при построении общих решений граничной задачи.

Проведенный анализ дает возможность записать общее представление для вектора смещений, позволяющее выполнить граничные условия для указанных двух вариантов постановки задачи. В случае возбуждения волнового поля в слое приходящей из бесконечности нормальной волной общее представление для вектора смещений имеет вид

$$\mathbf{u}(y, z) = A_0 \mathbf{u}(\xi_1, y) e^{-i\xi_1 z} + A_1 \mathbf{u}(\xi_1, y) e^{i\xi_1 z} \times \sum_{k=2}^{\infty} \left(A_k \mathbf{u}(\xi_k, y) e^{i\xi_k z} + B_k \mathbf{u}(\xi_k^*, y) e^{-i\xi_k^* z} \right). \quad (6)$$

Здесь A_0 – заданная амплитуда падающей волны. Неизвестные постоянные A_k и B_k должны определяться из однородных граничных условий. Амплитудные функции, зависящие от толщинной координаты y , находятся в соответствии с выражениями (3). Для выбранной системы координат при проведении вычислений следует использовать корни дисперсионного уравнения (5) с положительной мнимой частью.

При рассмотрении задачи о вынужденных колебаниях в приведенном выражении (6) следует опустить слагаемое с A_0 , а неизвестные коэффициенты A_k, B_k определять из неоднородных граничных условий (2).

Для простейших моделей волноводных структур (струна, акустический волновод, продольно деформируемый тонкий упругий стержень) задачи, подобные рассматриваемой, весьма просты. В

них отраженная волна полностью повторяет падающую и отличается от нее лишь некоторым фазовым сдвигом. В нашей же задаче невозможно выполнить два граничных условия на торце, сохраняя в общем решении (6) только слагаемое с A_1 (т. е. только бегущую отраженную волну), хотя очевидно, что для рассматриваемого частотного интервала на большом расстоянии от торца в отраженном поле будет существовать только первая бегущая волна. Это рассуждение указывает на важную роль неоднородных волн при формировании волнового поля вблизи торца. Прежде чем приступить к анализу решений сформулированных выше задач, проиллюстрируем роль неоднородных волн на более простом примере.

2. ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКЕ

Простейшей моделью упругой волноводной структуры, в которой неоднородные волны играют важную роль, является модель балки, основанная на гипотезе плоских сечений. В этом случае распространение гармонических волн описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \eta^4 W = 0 \quad (7)$$

относительно амплитуды прогиба оси балки $W(x)$. Здесь волновое число η известным образом [9] связано с жесткостью, плотностью материала и частотой волны. Характер зависимости волнового числа от частоты $\eta \sim \sqrt{\omega}$ указывает на существование дисперсии изгибных волн.

Общее решение дифференциального уравнения (7) имеет вид

$$W(x) = A_1 e^{i\eta x} + A_2 e^{-i\eta x} + A_3 e^{\eta x} + A_4 e^{-\eta x}. \quad (8)$$

Частными решениями уравнения являются как бегущие ($e^{\pm i\eta z}$), так и неоднородные ($e^{\pm \eta z}$) волны.

Рассмотрим процесс отражения изгибных волн от торца полубесконечной балки $x \geq 0$ при различных типах граничных условий. Волновое поле возбуждается приходящей из бесконечности волной $W_1 = A_0 e^{-i\eta x - i\omega t}$. При падении этой волны на торец балки будет формироваться отраженное волновое поле. Легко найти представления для него при различных граничных условиях. Для балки с шарнирно опертым концом (равны нулю прогиб и изгибающий момент) отраженное поле определяется выражением $W_r(x, t) = -A_0 e^{i\eta x - i\omega t}$. В этом случае оно представляет собой волну того же типа, что и падающая, но с измененной фазой.

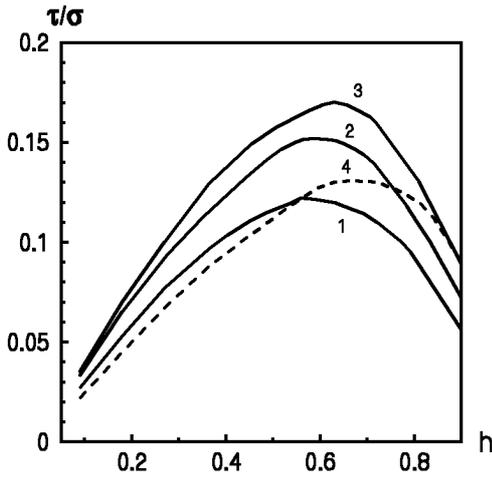


Рис. 2. Погрешность выполнения граничных условий по касательным напряжениям для $\nu=0.1$:
 1 - $\Omega_2=1.7$, 2 - $\Omega_2=1.85$, 3 - $\Omega_2=2.0$, 4 - $\Omega_2=2.15$

Ситуация принципиально меняется в случае заземленного (равны нулю прогиб и угол поворота поперечного сечения) или свободного (равны нулю изгибающий момент и перерезывающая сила) торца балки. В этих случаях уже невозможно удовлетворить граничные условия только за счет распространяющихся волн, а необходимо учитывать и неоднородные волны, входящие в общее решение (8).

Рассмотрим случай свободного торца. В этом случае сумма падающего и отраженного поля $W(x, t) = W_1(x, t) + W_r(x, t)$ должна быть такой, чтобы вторая и третья производные по x функции $W(x, t)$ обращались в нуль. Учитывая требование ограниченности возмущений на бесконечности для построения отраженного поля, используем следующую комбинацию частных решений из выражения (8):

$$W_r(x, t) = A_1 e^{i\eta x - i\omega t} + A_4 e^{-\eta x - i\omega t}. \quad (9)$$

Выполнив граничные условия, найдем значения амплитудных характеристик составляющих отраженного поля через амплитуду падающей волны:

$$W_r(x, t) = \left(-A_0 \frac{1-i}{1+i} e^{i\eta x} + A_0 \frac{2i}{1+i} e^{-\eta x} \right) e^{-i\omega t}. \quad (10)$$

Видно, что при рассматриваемых граничных условиях в процессе отражения формируются как бегущая волна с амплитудой, равной по модулю амплитуде падающей волны, так и неоднородная волна, модуль амплитуды которой превосходит амплитуду падающей волны. Для случая жесткой заделки ситуация аналогична.

Следует отметить, что изгибные волны в балке – простейший случай, когда волновое движение в упругом теле формируется при взаимодействии сдвиговых и продольных волн. Перерезывающая сила и изгибающий момент являются интегральными характеристиками нормальных и касательных напряжений соответственно. Приведенный выше результат указывает, что отражение такого составного волнового движения от свободной или заземленной границы оказывается сложным процессом, при котором должны возникать достаточно сильно выраженные локальные возмущения.

Важно отметить, что определенная с использованием такой простейшей модели амплитуда неоднородной волны не зависит от частоты. Это обусловлено тем, что в рамках балочной теории для произвольной частоты сохраняется постоянное соотношение между сдвиговыми и нормальными напряжениями, описываемое выражением $dM(x)/dx = Q(x)$. Здесь $M(x)$ и $Q(x)$ – изгибающий момент и перерезывающая сила в некотором сечении балки соответственно. При отсутствии поперечной нагрузки это соотношение между интегральными характеристиками продольных и сдвиговых напряжений в балке остается постоянным для всех частот.

В представляющей для нас основной интерес задаче об отражении нормальной волны от свободного торца полубесконечного упругого слоя существенно усложняются как сама процедура получения количественных оценок отраженного поля, так и структура отраженного поля, в формировании которого теперь участвует неограниченное число неоднородных волн. Однако, прежде чем перейти к анализу полного решения граничных задач, целесообразно рассмотреть простое приближенное решение задачи об отражении первой нормальной волны от свободного торца. Данные, полученные в результате такого приближенного решения, весьма полезны для более полного понимания возможностей приближенных теорий и возникающих при их использовании погрешностей.

Этот упрощенный анализ необходимо дополнить комментарием по поводу принципиальных различий в процессах отражения для шарнирного опирания и двух других типов граничных условий. В случае шарнирного опирания граничными условиями налагаются ограничения на касательные к торцу смещения и нормальные напряжения. Условия такого типа часто используются при рассмотрении статических и динамических задач теории упругости для тел конечных размеров. При этом решение существенно упрощается. Однако из при-

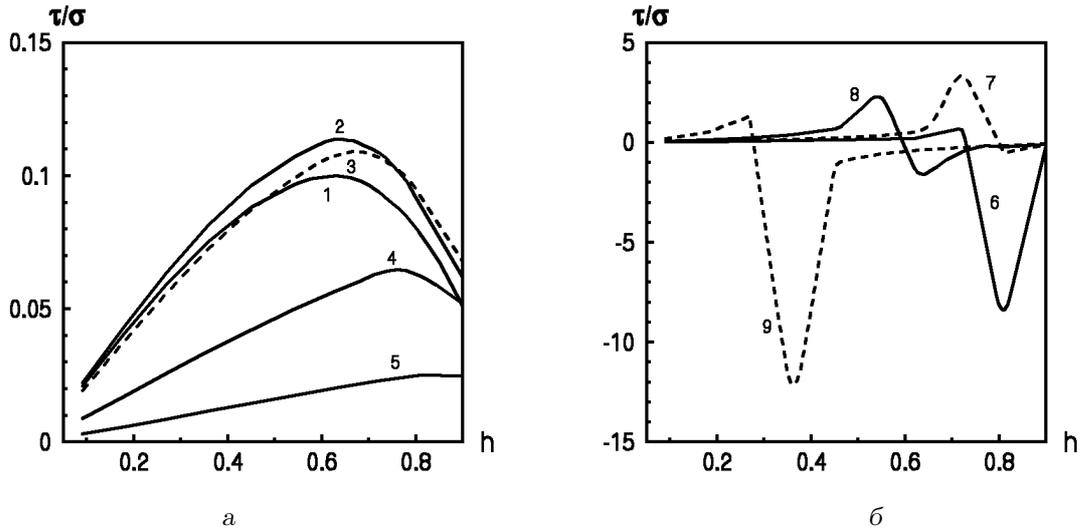


Рис. 3. Погрешность выполнения граничных условий по касательным напряжениям для $\nu=0.3$:
 1 – $\Omega_2=1.7$, 2 – $\Omega_2=1.85$, 3 – $\Omega_2=2.0$, 4 – $\Omega_2=2.15$, 5 – $\Omega_2=2.2$, 6 – $\Omega_2=2.35$, 7 – $\Omega_2=2.4$, 8 – $\Omega_2=2.5$, 9 – $\Omega_2=2.6$

веденного примера видно, что такие постановки не дают возможности учесть некоторые важные особенности волновых процессов в упругих телах.

3. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВОЛНОВОМ ПОЛЕ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ СЛОЕ

Приближенное решение, о котором будет идти речь ниже, строится по аналогии с решением задачи в рамках стержневой модели. При падении на торец волновода нормальной волны в отраженном поле учитывается только бегущая волна. При этом имеется возможность выполнить только одно граничное условие (например, для нормального напряжения). Оценка величины касательных напряжений на торце дает представление о точности решения задачи. При анализе результатов будем использовать данные о частотах краевого резонанса, полученные на основе строгого решения двумерной граничной задачи.

Проанализируем изменение по частоте погрешности выполнения граничных условий по касательным напряжениям (модуль амплитуды отраженной распространяющейся волны при этом определялся из граничных условий по нормальным напряжениям). На рис. 2 приведены распределения по торцу волновода касательных напряжений при представлении волнового поля в слое как суммы только падающей и отраженной бегущих волн. Здесь вычисления выполнены для коэффициента Пуассона $\nu=0.1$. Отметим, что краевой

резонанс для материала слоя с $\nu=0.1$ возникает на частоте $\Omega_e=2.08$.

Как видно из рисунка, с ростом частоты в диапазоне $\Omega_2 \leq \Omega_e$ погрешность выполнения граничных условий по касательным напряжениям по всей торцевой поверхности увеличивается, а для $\Omega_2 \geq \Omega_e$ – падает вплоть до частоты $\Omega_2=2.2$. Такое поведение погрешности необычно в свете устоявшегося представления о ее росте с уменьшением длины волны. При дальнейшем росте частоты, вплоть до частоты, на которой появляются распространяющиеся волны высших порядков (для $\nu=0.1$ это $\Omega^*=2.27$), погрешность выполнения граничных условий по касательным напряжениям растет. На частоте Ω_e эта погрешность достигает максимального значения по всему торцу полуслоя. Как уже отмечалось, волновое движение в нормальной волне является суперпозицией сдвиговых и продольных волн. В свете этого рост погрешности выполнения граничных условий на частоте краевого резонанса можно истолковать в том смысле, что именно здесь сдвиговые компоненты нормальной волны оказываются особенно существенными. Можно также отметить, что устранение этой погрешности при решении граничной задачи достигается за счет включения в общее решение неоднородных волн, локализованных вблизи торца. Полученные данные позволяют заключить, что именно на частоте краевого резонанса вклад неоднородных волн должен быть наиболее значимым.

На рис. 3 приведены данные о частотной зависи-

мости величины касательных напряжений на торце для слоя с $\nu=0.3$. На рис. 3, а представлены данные для частот, меньших частоты краевого резонанса, а на рис. 3, б – для частот, превышающих ее. Краевой резонанс для $\nu=0.3$ наблюдается на частоте $\Omega_e=2.315$, а распространяющиеся волны высших порядков появляются при $\Omega^*=2.75$.

При сравнении данных, представленных на рис. 2 и 3, прежде всего следует отметить существенные различия в физической картине процесса отражения первой распространяющейся волны для разных значений коэффициентов Пуассона. Оставив на некоторое время в стороне детальный анализ этих различий, отметим здесь, что погрешность выполнения граничных условий по касательным напряжениям для $\nu=0.3$ имеет несколько экстремумов. С ростом частоты она возрастает до частоты $\Omega_2=1.85$, далее – уменьшается, достигая минимального значения на частоте $\Omega_2=2.2$, а затем опять увеличивается, достигая максимума на частоте краевого резонанса $\Omega_e=2.315$. Для более высоких частот погрешность уменьшается на отрезке до $\Omega_e=2.45$ и затем вновь возрастает вплоть до $\Omega^*=2.75$. Как видим, здесь также имеется локальный максимум погрешности выполнения граничных условий по касательным напряжениям на частоте краевого резонанса. Заметим, что на рис. 2 и 3, по сути, приведены относительные величины касательных напряжений, отнесенные к максимальному значению нормального напряжения в падающей волне.

Следует также отметить, что характер изменения погрешности выполнения граничного условия по касательным напряжениям на торце для различных коэффициентов Пуассона подобен до частоты $\Omega_2=2.2$. Для более высоких частот наблюдаются принципиальные отличия, которые в значительной мере обусловлены зависимостью дисперсионных свойств нормальных волн волновода от коэффициента Пуассона.

Данные о погрешности выполнения граничных условий указывают на особую роль частоты $\Omega_2=2.2$, которая уже отмечалась в [6]. В этой работе рассматривались некоторые характерные особенности волнового поля в полуслое в окрестности частоты краевого резонанса при возбуждении симметричных волновых движений первой нормальной волной. В падающей волне выделялись неоднородная продольная (P) и распространяющаяся поперечная (SV) волны. При этом рассматривалось отражение только распространяющейся SV-компоненты. Было показано, что при ее отражении от свободного торца на частоте $\Omega_2 \sim 2.2$ для всех значений коэффициента Пуассона на высоте

полуслоя укладывается целое число SV-полуволн и наблюдается резонанс на поперечной распространяющейся волне.

Особая роль частоты Ω_2 определяется тем, что в этом случае сдвиговая составляющая в первой нормальной волне падает на границу слоя под углом, близким к 45° . При отражении такой сдвиговой волны от свободной поверхности продольные волны практически не генерируются. Для такой частоты решение граничной задачи об отражении нормальной волны от свободного торца должно быть достаточно простым, а для удовлетворения граничных условий не требуется привлекать неоднородные волны. Это подтверждается данными конкретных расчетов. На рис. 4 представлены частотные зависимости амплитуды первой неоднородной волны, нормированные на амплитуду падающей волны ($A_1/A^{(0)}$). Рис. 4, б иллюстрирует поведение амплитуды первой неоднородной волны в увеличенном масштабе. Видно, что ее значение практически равно нулю. Поскольку такая ситуация имеет место для произвольного значения коэффициента Пуассона, частота $\Omega_2=2.2$ всегда будет определять одну из границ диапазона частот, в котором может наблюдаться явление краевого резонанса.

Напомним, что до сих пор рассмотрение проводилось в рамках приближенного решения динамических задач теории упругости для балочной модели и модели, которую можно рассматривать как некоторое уточнение стержневой модели. В последнем случае использовалось точное решение уравнений движения, но в совокупности с приближенным выполнением граничных условий на торце. При таком подходе имеется возможность более глубоко понять ряд физических особенностей процесса распространения и отражения волн в волноводных структурах. Так, при анализе волнового поля в балке указывалось на то, что в рамках этой модели соотношение между сдвиговыми и нормальными напряжениями остается постоянным при любой частоте. В рассматриваемом же случае это не так. Однако при использовании точных решений уравнений движения лучше говорить об относительных вкладах продольных (P) и поперечных (SV) волн (они будут оценены ниже в результате решения граничной задачи с полным выполнением граничных условий).

При общей характеристике данных приближенного расчета волнового поля в полубесконечном слое следует обратить внимание на достаточно широкий диапазон частот, в котором погрешность выполнения граничных условий по касательным напряжениям относительно невелика. Для частот,

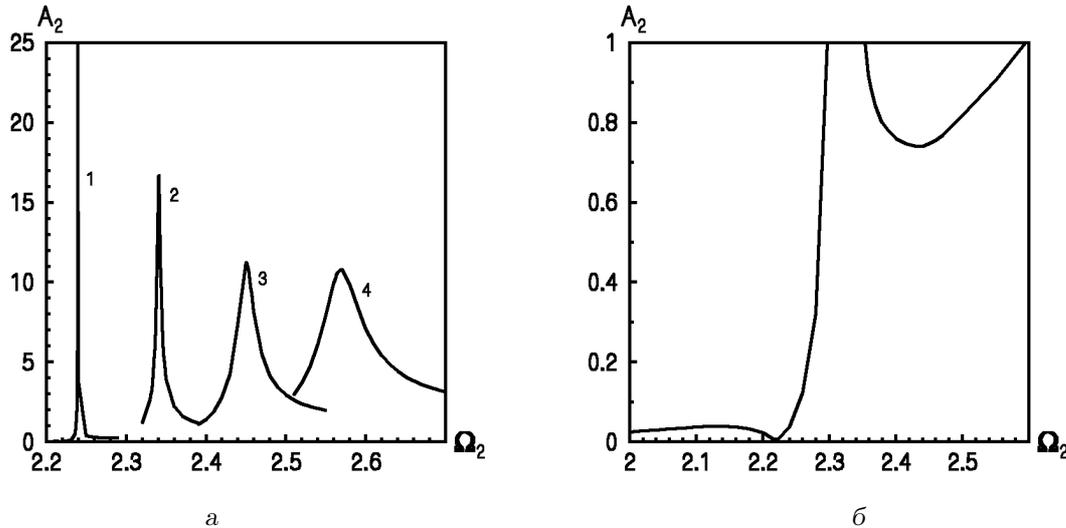


Рис. 4. Модуль амплитуды первой неоднородной волны, нормированный на амплитуду падающей (волновое поле возбуждается распространяющейся волной):
 $1 - \nu = 0.24$, $2 - \nu = 0.3$, $3 - \nu = 0.4$, $4 - \nu = 0.48$

соответствующих рис. 2 и 3, а, можно говорить о погрешности порядка 15 %. Вместе с тем, погрешность определения собственных частот конечно го по направлению оси Oz упругого тела может быть гораздо более существенной.

Для частот, лежащих выше частоты краевого резонанса, и типичного для многих материалов коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$ величина погрешности по касательным напряжениям становится значительной. Как видно из рис. 3, б, касательные напряжения могут на порядок превосходить нормальные напряжения в падающей волне. Эти результаты указывают на существенное изменение роли продольных и сдвиговых компонент в нормальной волне при изменении частоты.

4. АНАЛИЗ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Перейдем к анализу численных результатов, характеризующих краевой резонанс в полуслое. В данной работе не будем останавливаться на методе решения поставленной граничной задачи. Отметим только, что как метод однородных решений, который использовался в [3, 10, 11], так и метод суперпозиций [4, 6] дают практически одинаковые величины комплексных амплитуд нормальных волн. В рамках обоих подходов определение амплитуд возбуждения нормальных волн связано с численным решением бесконечных систем. Детали этой процедуры и оценки точности результатов приведены в [4, 6]. Дальнейший анализ основан на ре-

зультатах решения бесконечных систем для различных типов нагрузки и различных значений частоты.

При анализе резонансных ситуаций необходимо следить за изменением фазовых характеристик и увеличением модуля коэффициентов A_j . Как уже отмечалось, основное внимание в работе уделяется частотному диапазону, в котором существует только одна распространяющаяся волна. Наличие волны, уносящей энергию от торца, обуславливает существование радиационного демпфирования. За счет этого при симметричных волновых движениях (продольные колебания) в слое из материала с $\nu \neq 0$ амплитуды смещений на резонансной частоте остаются конечными, а интенсивность проявления резонанса зависит от ряда факторов. Поскольку известно [4], что форма колебаний на частоте краевого резонанса практически совпадает с формой первой неоднородной волны, будем рассматривать только частотные зависимости амплитуды первой неоднородной волны. Прежде всего, исследуем особенности проявления краевого резонанса при различных способах возбуждения волнового поля.

Вначале обратимся к характеристикам волнового поля, генерируемого заданной нормальной нагрузкой на торце. Естественно, что в этом случае будет наблюдаться некоторая частотная зависимость амплитуд как для распространяющихся, так и для неоднородных волн. Очевидно, что для амплитуды бегущей волны она непосредственно свя-

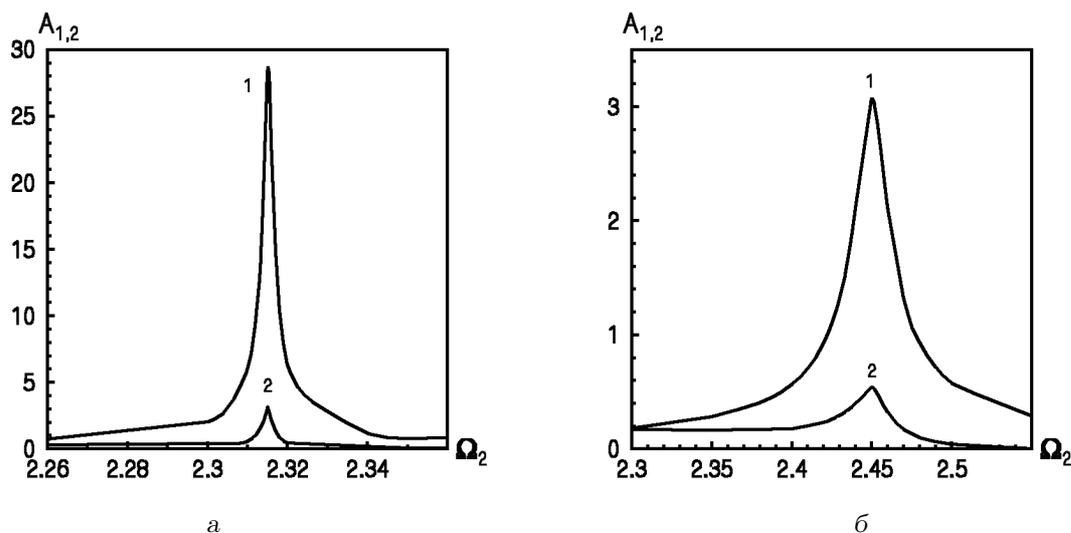


Рис. 5. Модули амплитуд отраженных волн (волновое поле возбуждается нормальной нагрузкой на торце):
 1 – неоднородная волна, 2 – распространяющаяся волна;
 а – $\nu = 0.3$, б – $\nu = 0.4$

зана с характером распределения нормальных напряжений по толщине слоя в этой волне.

На рис. 5 представлены частотные зависимости модуля амплитуд единственной распространяющейся (кривые 2 и 4) и первой неоднородной волн (кривые 1 и 3) для различных коэффициентов Пуассона. Представленные на рисунках кривые имеют типичный резонансный характер. Это отражается и на поведении фазовой характеристики амплитудных коэффициентов: вблизи определенной частоты мнимая часть комплексной амплитуды $\mathbf{Im}(A_0)$ меняет знак. Частоту, на которой $\mathbf{Im}(A_0) = 0$ естественно считать резонансной (заметим, что ее величина зависит от коэффициента Пуассона).

Интересно отметить, что в случае вынужденных колебаний при заданной нагрузке на торце наблюдается резонансное возбуждение бегущей и неоднородной волн на одной и той же частоте. При этом амплитуда первой неоднородной волны значительно превышает амплитуду распространяющейся волны, а соотношение между амплитудами существенно зависит от коэффициента Пуассона упругого материала. Для случая $\nu = 0.3$ оно равно 10.2. В слое из материала с $\nu = 0.4$ это отношение уменьшается до 5.7.

Упомянутые данные получены для случая равномерного распределения нормального напряжения на торце слоя. При изменении характера нагрузки отношения амплитуд могут измениться, и все же с качественной стороны их можно рассматривать как указание на различную степень свя-

занности движений в бегущей и в неоднородных волнах для разных значений коэффициента Пуассона. Чем он больше, тем больше резонансные колебания демпфируются убегающей волной. Как будет показано ниже, этот вывод находит свое подтверждение и при анализе характера отражения первой нормальной волны от свободного торца: амплитуды неоднородных волн высших порядков на резонансной частоте остаются меньше амплитуды распространяющейся волны.

С изменением коэффициента Пуассона меняется степень возбуждения неоднородной волны и полоса частот ее эффективного возбуждения. Эффективной характеристикой таких резонансных зависимостей является добротность, показывающая во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний на резонансе превышает амплитуду вынужденных колебаний на частоте, лежащей много ниже резонанса (при одинаковой амплитуде вынуждающей силы). Количественно добротность вычисляют как отношение резонансной частоты к ширине частотной полосы, на границах которой энергия, поступающая в систему, равна половине энергии на резонансной частоте [12]. Тем не менее, прямое использование такого определения добротности для краевого резонанса нецелесообразно, поскольку частотная зависимость энергии возбуждаемого вынужденными колебаниями волнового поля довольно сложна.

Для рассматриваемого случая симметричных волновых движений и постоянной амплитуды вынуждающей силы поток мощности через попе-

речное сечение слоя $z = \text{const}$ определяется соотношением

$$E_v = 2\mu\omega S_0 \left(\Omega_1^2 - \frac{\Omega_2^2}{2} \right) \text{Im} i \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k A_k. \quad (11)$$

Здесь A_k – комплексные амплитуды нормальных волн; ξ_k – корни дисперсионного уравнения (5). Из соотношения (11) видно, что частотная зависимость энергии определяется как частотной зависимостью амплитуд всех нормальных волны, так и кубом частоты ($\omega\Omega_{1,2}^2$), а также дисперсионными свойствами, отраженными в сложной зависимости волновых чисел от частоты ($\xi_k = f(\omega)$).

Поскольку простой связи между частотными зависимостями амплитудных характеристик и потоком мощности не существует, то для количественной оценки краевого резонанса в данной работе введем параметр Q_j , равный отношению частоты краевого резонанса к ширине частотного диапазона, на границах которого модуль амплитуды j -ой нормальной волны уменьшается в два раза. Для приведенных на рис. 5 кривых введенный параметр оказывается приблизительно одинаковым для первой распространяющейся и первой неоднородной волн: $Q_0 = Q_1$. Абсолютная величина введенной таким образом добротности Q для фиксированной моды уменьшается с ростом коэффициента Пуассона. Этот важный факт требует физического объяснения и будет обсужден ниже.

Рассмотрим теперь особенности проявления краевого резонанса при возбуждении волнового поля первой нормальной волной, приходящей из бесконечности. В рассматриваемой частотной области амплитуда отраженной бегущей волны равна амплитуде падающей ($|A_0| = |A^{(0)}| = 1$), что непосредственно следует из закона сохранения энергии. Теперь резонансные эффекты могут проявиться лишь за счет перераспределения амплитуд неоднородных волн. Возвращаясь к обсуждению рис. 4, обратим внимание на два эффекта. С уменьшением коэффициента Пуассона материала слоя параметр Q для первой неоднородной волны увеличивается и резонансные кривые становятся более острыми. Вместе с тем, возрастает уровень возбуждения неоднородных волн.

Сравнение амплитуд первой неоднородной волны для коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$ при возбуждении полуслоя нормальной нагрузкой с постоянной амплитудой ($\sigma_{zz}^{(0)} = 1$) и при возбуждении первой распространяющейся волной с постоянной амплитудой ($A^{(0)} = 1$), см. кривую 1 на рис. 5, а и кривую 2 на рис. 4, а, показало, что в обоих слу-

чаях величина добротности Q_1 одинакова. Однако, как видно из рисунков, значения амплитуд для этих двух случаев возбуждения волнового поля различаются. Чтобы более корректно сравнивать величины модулей амплитуды первой неоднородной волны при различных способах возбуждения волнового поля, следует оценить эти амплитуды при условии, что для обоих способов возбуждения одинакова энергия, поступающая в полуслой.

Энергия, переносимая падающей волной, определяется соотношением

$$E_0 = \mu\omega |A^{(0)}|^2 \Omega_2^2 (\xi^2 - \Omega_1^2) \frac{\Delta'(\xi)}{2}. \quad (12)$$

Зададим на частоте краевого резонанса амплитуду падающей волны $A^{(0)}$ таким образом, чтобы $E_v = E_0$. Тогда для коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$ при падении первой распространяющейся волны на свободный торец амплитуда первой отраженной неоднородной волны равнялась $A_1 = 10.18$. При возбуждении волновых движений постоянной нормальной нагрузкой (для $E_v = E_0$ и $\nu = 0.3$) амплитуда первой неоднородной волны будет $A_1 = 28.71$, т. е. в 2.8 раз больше.

Таким образом, для фиксированного коэффициента Пуассона величина максимальной амплитуды неоднородных волн существенно зависит от нагрузки, т. е. от согласования формы краевой моды и характера распределения вынуждающей нагрузки. При этом величина добротности Q остается постоянной. Эта ситуация типична для резонансных явлений в распределенных системах.

Сам факт значительного возбуждения неоднородных волн вблизи торца волновода на частоте краевого резонанса хорошо известен. Он свидетельствует о сложном механизме трансформации энергии, поступающей в волновод, в энергию, которую переносит первая распространяющаяся нормальная волна. При попытке дать более глубокую трактовку этого механизма, по нашему мнению, следует принять во внимание сложность структуры распространяющейся нормальной волны. Такая волна формируется как суперпозиция продольных и сдвиговых волновых движений, взаимно подпитывающих друг друга при отражении от границ волновода $y = \pm 1$. При отражении таких волн от торца волновода $z = 0$ меняются углы падения и отражения волн, что может приводить к нарушению баланса между сдвиговыми и продольными составляющими. Поскольку речь идет о резонансном явлении, следует также исследовать возможность формирования стоячей по толщине волны вблизи торца.

Для дальнейшего анализа особенностей возбуж-

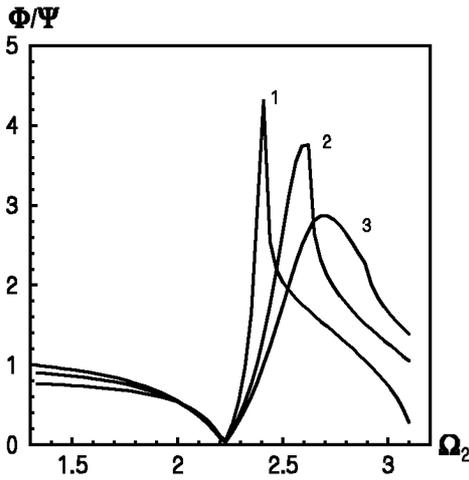


Рис. 6. Отношение амплитуд отраженной Р волны к SV волне: 1 - $\nu = 0.2$, 2 - $\nu = 0.3$, 3 - $\nu = 0.4$

дения краевого резонанса рассмотрим более подробно структуру падающей нормальной волны. Представим распространяющуюся волну в виде суперпозиции продольной (P) поперечной (SV) волн. Такое разложение не является искусственным, поскольку в силу выражений (3) для компонент вектора смещения в суммах явно выделяются слагаемые, соответствующие продольным (индекс ⁽¹⁾) и поперечным (индекс ⁽²⁾) волнам. Трудность физического анализа поля в упругом волноводе при таком разделении обусловлена особыми свойствами первой распространяющейся волны в нем. В частности, в отличие от акустического волновода, здесь первая нормальная волна не может быть представлена как суперпозиция продольных и поперечных волн, распространяющихся под некоторыми углами к оси. Для частот, близких к частоте краевого резонанса, сдвиговая компонента нормальной волны всегда является суммой двух бегущих плоских волн (α_2 – мнимая величина). В то же время, продольная волновая компонента есть не что иное, как совокупность двух неоднородных (поверхностных) волн, распространяющихся вдоль граничных поверхностей слоя (α_1 – вещественная величина). Следовательно, при распространении первой нормальной волны в полубесконечном слое на торец падают неоднородная продольная (P) и бегущая поперечная (SV) волны.

Естественно, для качественного анализа процесса отражения нормальной волны от свободного торца следовало бы рассмотреть особенности отражения P- и SV-компонент. К сожалению, в настоя-

щее время нет возможности подробно рассмотреть задачу отражения неоднородной волны от угла. Однако приведенные выше данные о характере частотных зависимостей погрешности выполнения граничных условий по касательным напряжениям дают основание предполагать, что в окрестности частоты краевого резонанса SV-компонента нормальной волны является доминирующей. Поэтому здесь мы остановимся на рассмотрении особенностей отражения именно этой компоненты.

В общем случае при отражении от свободной поверхности SV-волна порождает в отраженном поле как SV-, так и P-волны [4]. Соотношение между их амплитудами существенно зависит от угла падения SV-волны и коэффициента Пуассона материала слоя. Для компонент нормальной волны в волноводе эти углы, в свою очередь, существенно зависят от частоты. Такой качественный анализ указывает на возможную связь возникновения краевого резонанса именно с особенностями отражения SV-волны от свободной поверхности.

При падении SV-волны на свободную поверхность под углами, соответствующими частотам, близким к частоте краевого резонанса, отраженная SV-волна всегда является распространяющейся, а P-волна может быть как распространяющейся, так и неоднородной, в зависимости от коэффициента Пуассона [4]. Для значений коэффициента Пуассона $0.22 \leq \nu \leq 0.42$ частота краевого резонанса превышает величину $\Omega_2 = 2.2$. В этой частотной области при отражении SV-волны от свободного торца генерируется распространяющаяся P-волна. В то же время, как отмечалось выше, в отраженной нормальной волне продольная компонента может существовать только в форме поверхностной волны. Для ее формирования используется механизм генерации неоднородных волн вблизи торца волновода.

В этом утверждении содержится качественное объяснение причин возникновения краевого резонанса. Дальнейшее уточнение представлений о нем можно получить с использованием простой приближенной модели описания волнового поля вблизи торца (она подробно описана в [6]). В ее рамках при рассмотрении волнового поля вблизи торца учитываются только бегущие в направлении толщины продольные и поперечные волны. Из условия равенства нулю нормальных напряжений на поверхностях слоя ($\sigma_{yy}(\pm 1, 0) = 0$) определяются собственные частоты для движений типа толщинного резонанса. Значения этих частот, конечно, не совпадают с частотой краевого резонанса (это следует из принятой степени приближенности описания поля). Тем не менее, зависимость их

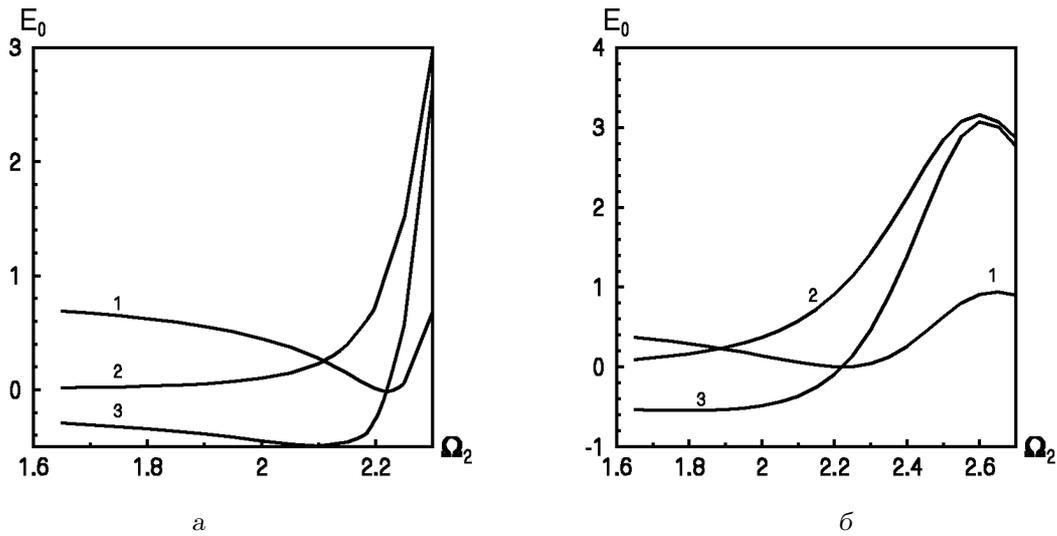


Рис. 7. Распределение энергии распространяющейся волны по отдельным составляющим:

1 – энергия, соответствующая Р волне, 2 – энергия, соответствующая SV волне,
3 – энергия, соответствующая перекрестному слагаемому;

а – $\nu = 0.1$, б – $\nu = 0.3$

значений от коэффициента Пуассона достаточно хорошо согласуется с зависимостью частоты краевого резонанса от этой характеристики материала слоя.

Для коэффициента Пуассона $\nu = 0.32$ с учетом распространяющихся SV- и Р-волн нормальное напряжение $\sigma_{yy}(\pm 1, 0)$ обращается в нуль на частоте $\Omega_2 = 2.67$. Для коэффициента Пуассона $\nu = 0.4$ это происходит при $\Omega_2 = 2.82$. С увеличением коэффициента Пуассона резонансная частота смещается в область более высоких частот, как это и характерно для частоты краевого резонанса.

Для коэффициентов Пуассона $\nu \leq 0.22$ и $\nu \geq 0.42$ наблюдается существенно иная ситуация. Здесь при отражении SV-компоненты падающей волны от свободного торца распространяющиеся волны высших порядков появляются раньше, чем угол отражения сдвиговой SV-волны достигнет критического значения и в отраженном поле на торцевой поверхности появится распространяющаяся продольная (Р) волна. Это ведет к необходимости проведения отдельного анализа для указанных диапазонов значений коэффициента Пуассона.

Для качественного объяснения зависимости параметра Q от коэффициента Пуассона следует рассмотреть количественные соотношения между SV- и Р-компонентами при отражении нормальной волны от свободного торца. Естественно, что в диапазоне частот, где существует только одна бегущая волна, в дальнем отраженном поле баланс между продольными и поперечными состав-

ляющими движения должен быть таким же, как и в падающей волне. В то же время, при отражении SV-компоненты падающей нормальной волны от свободного торца в отраженном поле в зависимости от частоты и коэффициента Пуассона меняется не только характер отраженной Р-волны (бегущая или неоднородная), но и ее амплитуда. Для того, чтобы сохранить необходимый баланс между продольными и сдвиговыми компонентами в дальнем поле, т.е. трансформировать продольные движения на торце в сдвиговые, необходимо интенсивно возбудить неоднородные волны. Качественно такая трансформация может быть описана частотной зависимостью амплитуды отраженной Р-волны.

На рис. 6 показана частотная зависимость модуля амплитуды отраженной Р-волны для различных значений коэффициента Пуассона, нормированная к амплитуде падающей SV-волны. Резонансный характер приведенных кривых подтверждает предположение о резонансном характере возбуждения неоднородных нормальных волн в полуслое. Кроме того, сохраняются качественные особенности возбуждения неоднородных волн в полуслое. Как видно из рисунка, с ростом ν наблюдается смещение максимального значения амплитуд в более высокочастотную область и уменьшение добротности резонансных кривых. Такое поведение амплитудных характеристик отраженной Р-волны хорошо согласуется с особенностями краевого резонанса, описанными выше (см. рис. 3).

Рассмотрим еще один аспект, характеризующий несогласованность движений, генерируемых при отражении падающей волны от свободного торца, и движений в нормальной волне. Предметом анализа являются количественные оценки распределение потока энергии между отдельными компонентами распространяющейся волны (SV и P). Энергия, переносимая распространяющейся волной, может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_0 = & \alpha_1^2 \xi^2 \operatorname{cth} \alpha_2 \left(\alpha_2 + \frac{\xi^2 + \alpha_2^2}{2\alpha_2} \right) - \\ & - \frac{\xi^2 \alpha_1^2 \Omega_2^2}{2 \operatorname{sh}^2 \alpha_2} + \frac{(\xi^2 + \alpha_2^2)^2}{4} \left(2\alpha_1^2 + \frac{\Omega_2^2}{2} \right) \frac{\operatorname{cth} \alpha_1}{\alpha_1} + \\ & + \frac{\Omega_2^2 (\xi^2 + \alpha_2^2)}{8 \operatorname{sh}^2 \alpha_1} - \left[(\xi^2 + \alpha_2^2) \times \right. \\ & \left. \times \left(\alpha_1^2 \alpha_2 \operatorname{cth} \alpha_2 + \left(\xi^2 + \frac{\Omega_2^2}{2} \right) \alpha_1 \operatorname{cth} \alpha_1 \right) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$E_0 = \mu \omega |A_0|^2 \xi \alpha_1^2 \widetilde{E}_0.$$

В выражении для \widetilde{E}_0 первые для слагаемых соответствуют энергии, которую переносит SV-составляющая нормальной распространяющейся волны, вторые два слагаемых – энергии P-волны, а последнее слагаемое – энергии взаимодействия. На рис. 7, а представлено распределение энергии распространяющейся волны по отдельным составляющим для коэффициента Пуассона $\nu=0.1$. Кривая 1 описывает энергию, переносимую P-волной, кривая 2 – SV-волной, а кривая 3 отвечает за перекрестное слагаемое с SV- и P-компонентами. На том графике примечательной является частота $\Omega_2=2.1$, на которой энергия взаимодействия волн минимальна и много меньше энергии, переносимой SV- и P-компонентами. Эта частота близка к частоте краевого резонанса для $\nu=0.1$ ($\Omega_e=2.108$). Вторая характерная частота – $\Omega_2=2.2$, на ней энергия, переносимая P-волной, достигает минимума. Здесь по высоте волновода укладывается целое число полуволн.

На рис. 7, б представлено распределение энергии распространяющейся волны по компонентам для $\nu=0.3$. Нумерация кривых сохранена. Общим для обоих графиков является характер частотной зависимости энергии, переносимой P- и SV-волнами при $\Omega_2 \leq 2.3$. Энергия P-волны падает, достигая минимума в окрестности частоты $\Omega_2=2.2$, и при дальнейшем росте частоты возрастает. Энергия SV-волны монотонно возрастает. Частотная зависимость энергии, соответствующей

взаимодействию волн для разных коэффициентов Пуассона, изменяется качественным образом. Для $\nu=0.3$ энергия взаимодействия (кривая 3) не имеет локальных минимумов, а возрастает монотонно с ростом частоты.

Еще одной отличительной особенностью распределения энергии распространяющейся волны между разными компонентами для разных ν является существенно различное процентное содержание энергии в них для фиксированной частоты. Так, в области низких частот ($\Omega_2=1.7$) для $\nu=0.1$ справедливо $E_{sv}/E_p=0.03$, а для $\nu=0.3$ – $E_{sv}/E_p=0.3$, т.е. наблюдается отличие на порядок. Такое существенное изменение распределения энергии распространяющейся волны между ее компонентами для разных ν подтверждает вывод о том, что волновая картина на торце волновода перестраивается с изменением коэффициента Пуассона. Кроме того, можно говорить, что для $\nu \leq 0.2$ значительное возбуждение неоднородных волн связано с перестройкой волнового поля на торце от движений, характерных для P-волн, к SV-волнам. В то же время, для $0.22 \leq \nu \leq 0.42$ краевой резонанс, как было показано выше, обусловлен возникновением распространяющейся P-волны на торце волновода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Явление краевого резонанса в упругих телах – важная иллюстрация фундаментальных особенностей процесса распространения упругих волн в телах конечных размеров. В работе представлены данные, позволяющие углубить представления о механизме формирования волновых движений, определяемых как краевой резонанс. Важной особенностью полученных результатов является то, что причину возникновения такого сложного волнового движения удается качественно объяснить, основываясь на свойствах отражения плоских упругих волн от свободной границы упругого тела. Показано, что интенсивное возбуждение неоднородных упругих волн свойственно также простейшим упругим волноводным системам.

Характеристики формы колебаний, соответствующих краевому резонансу, и добротность колебаний существенно зависят от коэффициента Пуассона упругого материала. Такая зависимость отражает влияние коэффициента Пуассона на степень преобразования сдвиговых движений в продольные при отражении упругих волн от свободной границы. Для характеристики резонанса введен параметр добротности Q , описывающий степень возбуждения первой неоднородной волны.

Показано, что величина добротности не зависит от способа возбуждения волнового поля в полуслое.

Установлено, что эффективность проявления краевого резонанса и соответствующая собственная частота Ω_e существенно зависят от коэффициента Пуассона. При изменении коэффициента Пуассона от 0 до 0.5 частота краевого резонанса увеличивается, а степень возбуждения первой неоднородной волны падает. Качественный анализ особенностей краевого резонанса для относительно малых ($\nu < 0.22$) и относительно больших ($\nu > 0.42$) значений коэффициента Пуассона требует дополнительного рассмотрения.

Основные черты полученных количественных зависимостей удастся качественно объяснить несколькими причинами. Прежде всего, существенным является то, что низшая нормальная волна в волноводе формируется суперпозицией бегущей сдвиговой волны и неоднородной продольной. В данной работе всесторонне исследован относительный вклад сдвиговых и продольных компонент и показано, что сдвиговые компоненты оказываются определяющими в области частот, близких к частоте краевого резонанса. Отсюда следует, что вторым определяющим фактором для возникновения краевого резонанса является то, что в упругих телах при отражении волн от свободной границы сильно выражено преобразование сдвиговых движений в продольные.

1. Shaw E. A. G. On the resonant vibration of thin bari-

um titanate disks // J. Acoust. Soc. Amer.– 1956.– 20, N 1.– С. 38–50.

2. Oliver J. Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by a wide-band, short-duration pulse technique // J. Acoust. Soc. Amer.– 1957.– 29, N 2.– С. 189–194.
3. Gazis D. C., Mindlin R. D. Extensional vibration and waves in a circular disk and semi-infinite plate // J. Acoust. Soc. Amer.– 1960.– 27, N 3.– С. 541–547.
4. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
5. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wilde M. V. Free localized vibration of semi-infinite cylindrical shell // J. Acoust. Soc. Amer.– 2000.– 107, N 3.– С. 1383–1393.
6. Городецкая Н. С. Еще раз о краевом резонансе // Акуст. вісн.– 2000.– 3, N 4.– С. 35–44.
7. Roitberg J., Vassiliev D., Wilde M. V. Edge resonance in an elastic semi-strip // Quart. J. Mech. Appl. Math.– 1998.– 51.– С. 1–13.
8. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Неосесимметричные колебания полубесконечного цилиндра.– Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела: 1982, 17, N 6.– 81–89 с.
9. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.– М.: Наука, 1986.– 444 с.
10. Torvik P. J. Reflection of wave trains in semi-infinite plate // J. Acoust. Soc. Amer.– 1967.– 41, N 2.– С. 346–353.
11. Auld B. A., Tsao E. J. A variational analysis of edge resonance in semi-infinite plate // IEEE Trans. SU.– 1977.– 24, N 5.– С. 317–326.
12. Ультразвук. Маленькая энциклопедия / Под ред. И. П. Голяминой.– М.: Сов. энцикл., 1979.– 400 с.