

УДК 539.3:534.13

О ПРИМЕНЕНИИ МОДЕЛИ БАЛКИ ТИМОШЕНКО В ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРИСОЕДИНЕННЫМ ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ

Ю. В. ТРОЦЕНКО

Институт математики НАН Украины, Киев

Получена 22.10.2003

Рассмотрена задача о границах применимости теории балок Тимошенко при определении изгибных колебаний круговой цилиндрической оболочки с присоединенным абсолютно твердым телом. Показано, что учет деформаций сдвига поперечного сечения балки позволяет определять низшие частоты и формы колебаний рассматриваемой механической системы для сравнительно коротких оболочек.

Розглянуто задачу про межі застосування теорії балок Тимошенка при визначенні згинних коливань кругової циліндричної оболонки з приєднаним абсолютно твердим тілом. Показано, що врахування деформацій зсуву поперечного перерізу балки дозволяє визначити нижчі частоти та форми коливань розглянутої механічної системи для порівняно коротких оболонок.

The problem of scope of applicability of the theory of Timoshenko's beams to determination of bending vibrations of a circular cylindrical shell with attached absolute rigid body is considered. It is shown that accounting for shear strains of the beam's cross-section allows to determine the lowest frequencies and vibrational eigenforms of the considered mechanical system for rather short shells.

ВВЕДЕНИЕ

Как правило, в инженерной практике при решении задач динамики составных механических конструкций, представляющих собой различного рода соединения оболочек, пластин и деформируемых тел возникают вопросы по определению характеристик собственных колебаний таких связанных систем. Отметим, что подобные задачи относятся к разряду неклассических задач математической физики, поскольку речь идет о соединении элементов, поведение которых описывается уравнениями различной размерности. Это вызывает определенные трудности при их решении, поэтому на практике используют модели реальных конструкций, упрощенные за счет введения в рассмотрение дополнительных гипотез и допущений.

Данная статья является логическим продолжением работы [1], где решена задача об определении собственных колебаний тонкостенной круговой цилиндрической оболочки с присоединенным на одном из ее торцов абсолютно твердым телом, а также даны рекомендации по использованию упрощенной балочной расчетной схемы указанной конструкции. Для упрощенной схемы использована классическая балочная теория Эйлера – Бернулли. Естественным образом возникает вопрос о возможности расширения границ применимости упрощенной модели путем учета дефор-

маций сдвига и инерции поворота поперечного сечения балки [2].

Несмотря на то, что исследованию собственных колебаний балки Тимошенко, в том числе и с присоединенными твердыми телами на торцах, посвящено достаточное количество работ [3–9], проблема определения границ применимости этой теории при моделировании тонкостенных составных конструкций остается не решенной.

По-видимому, впервые вопрос о возможности моделирования цилиндрической оболочки балкой Тимошенко с теоретической точки зрения рассмотрен в работе К. Форсберга [3], где сделан вывод о том, что включение деформаций сдвига и инерции вращения в уравнения балочной теории существенно улучшает точность балочного приближения до значений относительных длин оболочки $l/R \geq 7$, тогда как элементарная балочная теория дает хорошие результаты только для очень длинных оболочек ($l/R > 20$).

Работа [4] посвящена определению границ применимости и оценке погрешности балочной аппроксимации удлиненной тонкостенной конструкции при определении ее динамических характеристик. Здесь речь шла о возможности инкорпорации в балочную расчетную схему дискретных включений типа масс и осцилляторов, расположенных в оболочечной конструкции несимметрично относительно оси вращения оболочки, а также масс, рав-

номерно распределенных по кольцевой координате оболочки (включая учет шпангоута). Проанализирован случай шарнирного опирания торцов цилиндрической оболочки.

В работе [5] рассмотрена задача о собственных колебаниях балки Тимошенко при действии на нее осевой и поперечной сил. Показано, что влияние инерции вращения и сдвига на собственную частоту основного тона изгибных колебаний увеличивается с увеличением значений осевой и поперечной сил.

Собственные изгибные колебания консольно закрепленной балки Тимошенко, несущей абсолютно твердое тело на свободном торце, исследованы в работе [6]. Проведено сравнение расчетных данных с результатами, полученными по элементарной балочной теории.

Работа [7] посвящена построению частотного уравнения для определения собственных изгибных колебаний балки Тимошенко с присоединенными на торцах твердыми телами. Изучен вопрос о влиянии на поведение частот положения центра масс твердого тела.

В работе [8] рассмотрены собственные изгибные колебания свободно опертой балки. Сделан вывод о том, что частоты изгибных колебаний балки Тимошенко нельзя удовлетворительным образом выразить с помощью только одного поправочного коэффициента. В связи с этим предложены модифицированные формулы, обладающие более высокой точностью. Работа [9] также посвящена построению более точной теории для анализа колебаний коротких балок.

Данная статья посвящена обобщению результатов работы [1] и установлению границ применимости упрощенной балочной модели Тимошенко при определении неосесимметричных колебаний тонкой круговой цилиндрической оболочки с абсолютно твердым телом, присоединенным на одном из ее торцов. Постановка задачи и ее решение с учетом оболочечных эффектов, а также ее упрощение на основе элементарной балочной теории представлены в [1]. Ниже даны постановка задачи и ее точное решение для определения собственных изгибных колебаний балки Тимошенко с присоединенным на торце абсолютно твердым телом; приведены некоторые результаты расчетов, на основании которых можно сделать выводы о границах применимости приведенной расчетной схемы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим механическую систему, состоящую из балки Тимошенко и абсолютно твердого тела,

которое жестко прикреплено к одному из ее торцов. Предположим, что второй торец балки некоторым образом закреплен. Считаем, что тело обладает двумя взаимно ортогональными плоскостями симметрии, линией пересечения которых является ось Oz , совпадающая с нейтральной линией балки. Координатную плоскость Oxz совместим с одной из плоскостей симметрии твердого тела, а начало системы координат $Oxyz$ расположим в плоскости торцевого сечения балки, свободного от твердого тела. Для описания перемещений твердого тела введем прямоугольную систему координат $Cx_cy_cz_c$ с началом в центре инерции твердого тела и осями Cx_c , Cy_c , параллельными осям Ox и Oy соответственно. Кроме того, удобно ввести в рассмотрение систему координат $O_1x_1y_1z_1$ с единичными ортами \vec{i}_1 , \vec{j}_1 , \vec{k}_1 , оси которой параллельны осям Ox , Oy и Oz , а начало связано с точкой крепления твердого тела к балке.

Поскольку механическая система имеет две плоскости симметрии, то ее колебания в плоскостях Oxz и Oyz можно рассматривать независимо. Поэтому далее будем рассматривать движения системы только в плоскости Oxz .

Обозначим перемещения точек нейтральной линии упругой балки в направлении оси Ox через $w(z, t)$. Тогда угол наклона касательной можно представить в виде [2]

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \psi + \tau, \quad (1)$$

где ψ – угол наклона касательной к упругой линии балки от действия только изгибающих моментов; τ – угол наклона от изменения перерезывающих сил.

В точке крепления твердого тела при $z=l$ (l – длина балки) должны выполняться кинематические условия сопряжения, т. е. равенство соответствующих перемещений и углов поворота балки и тела

$$w(l, t) = w_0, \quad \psi(l, t) = \vartheta_{02}.$$

Здесь w_0 и ϑ_{02} – перемещение точки O_1 и угол поворота твердого тела относительно оси O_1y_1 .

Вектор перемещения точек твердого тела \vec{U}^* можно представить в виде

$$\vec{U}^* = \vec{U}_0 + [\vec{\theta}_0 \times \vec{r}], \quad (2)$$

где \vec{r} – радиус-вектор точек твердого тела; $\vec{U}_0 = \{w_0, 0, 0\}$ и $\vec{\theta}_0 = \{0, \vartheta_{02}, 0\}$ – векторы малого перемещения и поворота системы координат $O_1x_1y_1z_1$. В развернутом виде для вектора (2) будем иметь следующее выражение:

$$\vec{U}^* = (w_0 + z_1\vartheta_{02})\vec{i}_1 + (-\vartheta_{02}x_1)\vec{k}_1. \quad (3)$$

Для вывода уравнений движения системы воспользуемся принципом возможных перемещений. Потенциальная энергия деформации для балки Тимошенко имеет вид [10]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l \kappa GF \tau^2 dz, \quad (4)$$

где κ – коэффициент, зависящий от характера распределения сдвигов по сечению и способа определения среднего значения для угла сдвига τ ; EJ и GF – изгибная и сдвиговая жесткости соответственно.

Работа сил инерции на возможных перемещениях будет иметь вид

$$\delta A = -\gamma \iiint_V \ddot{U}^* \delta \vec{U}^* dV - \rho F \int_0^l \ddot{w} \delta w dz - \rho J \int_0^l \ddot{\psi} \delta \psi dz, \quad (5)$$

где γ и ρ – плотности материалов твердого тела и балки соответственно. Двоеточие над величинами в уравнении (5) означает двукратное дифференцирование по времени t .

Приравняв вариацию потенциальной энергии деформации балки к работе внешних сил на возможных перемещениях, получим следующее вариационное уравнение:

$$EJ \int_0^l \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial \delta \psi}{\partial z} \right) dz + \kappa GF \int_0^l \tau \frac{\partial \delta w}{\partial z} dz - \kappa GF \int_0^l \tau \delta \psi dz = -\rho F \int_0^l \ddot{w} \delta w dz - \rho J \int_0^l \ddot{\psi} \delta \psi dz - (m_0 \ddot{w}_0 + L_{03} \ddot{\vartheta}_{02}) \delta w_0 - (L_{03} \ddot{w}_0 + J_{y1} \ddot{\vartheta}_{02}) \delta \vartheta_{02}. \quad (6)$$

Здесь

$$L_{03} = \gamma \iiint_V z_1 dV \quad \text{и} \quad J_{y1} = \gamma \iiint_V (x_1^2 + z_1^2) dV -$$

статический момент инерции твердого тела относительно плоскости $O_1 y_1 z_1$ и момент инерции твердого тела относительно оси $O_1 y_1$ соответственно; m_0 – масса твердого тела.

Обозначим через l_c координату центра тяжести твердого тела в системе координат $O_1 y_1 z_1$. Тогда будем иметь

$$L_{03} = m_0 l_c, \quad J_{y1} = m_0 l_c^2 + J_{yc},$$

где J_{yc} – момент инерции твердого тела относительно оси Cy_c .

Выполнив в левой части уравнения (6) интегрирование по частям и приняв во внимание кинематические условия сопряжения, а также независимость вариаций δw и $\delta \psi$, получим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \kappa GF \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0, \\ \rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - EJ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \kappa GF \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \psi \right) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\left[\kappa GF \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \psi \right) + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + L_{03} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right]_{z=l} = 0, \quad (8)$$

$$\left[EJ \frac{\partial \psi}{\partial z} + L_{03} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + J_{y1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right]_{z=l} = 0.$$

Для жестко закрепленного торца балки будем иметь следующие граничные условия:

$$w(0, t) = 0, \quad \psi = 0. \quad (9)$$

В случае свободного торца получим

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \psi \right)_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (10)$$

К соотношениям (7)–(10) необходимо добавить соответствующие начальные условия на искомые функции.

Систему уравнений (7), путем несложных преобразований, приведем к виду

$$\begin{cases} EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - \rho J \left(1 + \frac{E}{\kappa G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{\kappa G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ EJ \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} - \rho J \left(1 + \frac{E}{\kappa G} \right) \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{\kappa G} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} + \rho F \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Для случая свободных гармонических колебаний системы с частотой ω представим функции $w(z, t)$ и $\psi(z, t)$ как

$$w(z, t) = W(z) e^{i\omega t}, \quad \psi(z, t) = \Psi(z) e^{i\omega t}. \quad (12)$$

Введем в рассмотрение следующие безразмерные величины, которые связаны с соответствующими

щими размерными по формулам

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{\omega^2 L^4 \rho F}{EJ} & r^2 &= \frac{J}{FL^2}, & s^2 &= \frac{EJ}{\kappa GFL^2}, \\ \bar{m}_0 &= \frac{m_0}{\rho FL} & \bar{J}_{y_c} &= \frac{J_{y_c}}{\rho FL^3}, & \bar{l}_c &= \frac{l_c}{L}, \\ \bar{W} &= \frac{W}{L}, & \bar{z} &= \frac{z}{L}, & \bar{L}_{03} &= \bar{m}_0 \bar{l}_c, \\ & & \bar{J}_{y_1} &= \bar{m}_0 \bar{l}_c^2 + \bar{J}_{y_c}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь β – безразмерная собственная частота колебаний системы; r^2 – квадрат радиуса инерции балки (коэффициент учитывающий инерцию поворота поперечного сечения балки); s^2 – коэффициент, учитывающий влияние деформаций сдвига; L – некоторый (пока произвольный) линейный размер. В дальнейшем черточки над безразмерными величинами для простоты записи будем опускать.

С учетом формул (12) и (13) соотношения (7) – (11) запишем в виде

$$\begin{cases} \frac{d^4 W}{dz^4} + \beta^2 (r^2 + s^2) \frac{d^2 W}{dz^2} + \\ \quad + \beta^2 (\beta^2 r^2 s^2 - 1) W = 0, \\ \frac{d^4 \Psi}{dz^4} + \beta^2 (r^2 + s^2) \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + \\ \quad + \beta^2 (\beta^2 r^2 s^2 - 1) \Psi = 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 W}{dz^2} - \frac{d\Psi}{dz} + \beta^2 s^2 W = 0, \\ s^2 \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + \frac{dW}{dz} + (\beta^2 r^2 s^2 - 1) \Psi = 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$\left(\frac{dW}{dz} - \Psi - \beta^2 s^2 m_0 W - \right. \\ \left. - \beta^2 s^2 m_0 l_c \Psi \right)_{z=l} = 0, \quad (16)$$

$$\left(\frac{d\Psi}{dz} - \beta^2 L_{03} W - \beta^2 J_{y_1} \Psi \right)_{z=l} = 0.$$

Граничные условия для свободного торца задаются соотношениями

$$\left(\frac{dW}{dz} - \Psi \right)_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{d\Psi}{dz} \right|_{z=0} = 0. \quad (17)$$

При защемленном торце должны выполняться условия

$$W(0) = 0, \quad \Psi(0) = 0. \quad (18)$$

Соотношения (15) дают возможность выразить Ψ и $d\Psi/dz$ через функцию W и ее производные:

$$\begin{cases} \Psi = \frac{s^2}{b_0} \frac{d^3 W}{dz^3} + \frac{(\beta^2 s^4 + 1)}{b_0} \frac{dW}{dz}, \\ \frac{d\Psi}{dz} = \frac{d^2 W}{dz^2} + \beta^2 s^2 W. \end{cases} \quad (19)$$

Подставив выражения (19) в уравнения (16) – (18), получим следующую краевую задачу на собственные значения относительно функции W при жестком закреплении торца оболочки при $z=0$:

$$\frac{d^4 W}{dz^4} + b_2 \frac{d^2 W}{dz^2} - \beta^2 b_0 W = 0, \quad (20)$$

$$\left(f_1 \frac{d^3 W}{dz^3} + f_2 \frac{dW}{dz} + f_3 W \right)_{z=l} = 0, \quad (21)$$

$$\left(f_4 \frac{d^3 W}{dz^3} + f_5 \frac{d^2 W}{dz^2} + f_6 \frac{dW}{dz} + f_7 W \right)_{z=l} = 0,$$

$$W(0) = 0, \quad \left(b_1 \frac{dW}{dz} + s^2 \frac{d^3 W}{dz^3} \right)_{z=0} = 0. \quad (22)$$

В случае свободного торца балки при $z=0$ граничные условия (22) следует заменить на

$$\left(\frac{d^2 W}{dz^2} + \beta^2 s^2 W \right)_{z=0} = 0, \quad (23)$$

$$\left(\frac{d^3 W}{dz^3} + b_2 \frac{dW}{dz} \right)_{z=0} = 0.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 - \beta^2 r^2 s^2; & b_1 &= \beta^2 s^4 + 1; \\ b_2 &= \beta^2 (r^2 + s^2); & f_1 &= 1 + \beta^2 s^2 L_{03}; \\ f_2 &= \beta^2 b_1 L_{03} + b_2; & f_3 &= \beta^2 m_0 b_0; \\ f_4 &= \beta^2 s^2 J_{y_1}; & f_5 &= -b_0; \\ f_6 &= \beta^2 b_1 J_{y_1}; & f_7 &= b_0 \beta^2 (L_{03} - s^2). \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, решение задачи о собственных изгибных колебаниях балки Тимошенко с присоединенным на торце абсолютно твердым телом свелось к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (20) при соответствующих граничных условиях. При необходимости определения величин Ψ и $d\Psi/dz$ необходимо воспользоваться выражениями (19).

Заметим, что если в уравнениях (19) – (24) положить $r^2 = s^2 = 0$, то как частный случай получим

задачу о собственных колебаниях балки Эйлера – Бернулли с присоединенным твердым телом [1]. Соответственно, если пренебречь только членами, учитывающими деформации сдвига ($s^2=0$), будем иметь балку Рэлея.

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Перейдем к построению точного решения сформулированной краевой задачи. Общим решением уравнения (20) при $\mu \geq b_2/2$ будет

$$W(\beta, z) = A \operatorname{sh} \gamma_1 z + B \operatorname{ch} \gamma_1 z + C \sin \gamma_2 z + D \cos \gamma_2 z, \tag{25}$$

где $\gamma_1 = \sqrt{\mu - b_2/2}$; $\gamma_2 = \sqrt{\mu + b_2/2}$. Для случая, когда $\mu < b_2/2$, будем иметь

$$W(\beta, z) = A' \sin \gamma_1 z + B' \cos \gamma_1 z + C' \sin \gamma_2 z + D' \cos \gamma_2 z, \tag{26}$$

где $\gamma_1 = \sqrt{b_2/2 - \mu}$, $\gamma_2 = \sqrt{\mu + b_2/2}$. В формулах (25), (26) $\mu = \sqrt{(b_2/2)^2 + b_0 \beta^2}$.

Решения (25), (26) удобно представить в следующем виде:

$$W_i(\beta, z) = C_{1i} S_i(\beta, z) + C_{2i} T_i(\beta, z) + C_{3i} U_i(\beta, z) + C_{4i} V_i(\beta, z). \tag{27}$$

Здесь и далее

$$i = \begin{cases} 1, & \forall \mu \geq b_2/2, \\ 2, & \forall \mu < b_2/2. \end{cases}$$

Линейно независимые функции S_i , T_i , U_i и V_i являются линейными комбинациями функций, входящих в выражения (25), (26), и обладают тем свойством, что матрица Коши для них при $z=0$ является единичной. Указанные функции можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} S_1(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_2^2 \operatorname{ch} \gamma_1 z + \gamma_1^2 \cos \gamma_2 z \right), \\ T_1(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} \operatorname{sh} \gamma_1 z + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} \sin \gamma_2 z \right), \\ U_1(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\operatorname{ch} \gamma_1 z - \cos \gamma_2 z \right), \\ V_1(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{1}{\gamma_1} \operatorname{sh} \gamma_1 z - \frac{1}{\gamma_2} \sin \gamma_2 z \right); \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} S_2(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_2^2 \cos \gamma_1 z - \gamma_1^2 \cos \gamma_2 z \right), \\ T_2(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} \sin \gamma_1 z - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} \sin \gamma_2 z \right), \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} U_2(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\cos \gamma_1 z - \cos \gamma_2 z \right), \\ V_2(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{1}{\gamma_1} \sin \gamma_1 z - \frac{1}{\gamma_2} \sin \gamma_2 z \right). \end{aligned}$$

Следует отметить, что приведенные функции несколько отличаются от известных балочных функций Крылова в том смысле, что не удастся выразить первые три производные от них по переменной z через эти же функции (как это делается в элементарной балочной теории). В связи с этим дополнительно введем в рассмотрение следующие функции:

$$\begin{aligned} Q_{11}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_1 z + \gamma_2 \sin \gamma_2 z \right), \\ Q_{21}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_1^2 \operatorname{ch} \gamma_1 z + \gamma_2^2 \cos \gamma_2 z \right), \\ Q_{31}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_1^3 \operatorname{sh} \gamma_1 z - \gamma_2^3 \sin \gamma_2 z \right), \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} Q_{12}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_2 \sin \gamma_2 z - \gamma_1 \sin \gamma_1 z \right), \\ Q_{22}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_2^2 \cos \gamma_2 z - \gamma_1^2 \cos \gamma_1 z \right), \\ Q_{32}(\beta, z) &= \frac{1}{2\mu} \left(\gamma_1^3 \sin \gamma_1 z - \gamma_2^3 \sin \gamma_2 z \right). \end{aligned}$$

Здесь второй индекс соответствует значению индекса i . Тогда первые три производные от $W_i(\beta, z)$ по переменной z можно вычислить по следующим

формулам:

$$\begin{aligned}
 W_1'(\beta, z) &= C_{11}\zeta V_1(\beta, z) + C_{21}S_1(\beta, z) + \\
 &+ C_{31}Q_{11}(\beta, z) + C_{41}U_1(\beta, z), \\
 W_1''(\beta, z) &= C_{11}\zeta U_1(\beta, z) + C_{21}\zeta V_1(\beta, z) + \\
 &+ C_{31}Q_{21}(\beta, z) + C_{41}Q_{11}(\beta, z), \\
 W_1'''(\beta, z) &= C_{11}\zeta Q_{11}(\beta, z) + C_{21}\zeta U_1(\beta, z) + \\
 &+ C_{31}Q_{31}(\beta, z) + C_{41}Q_{21}(\beta, z), \\
 W_2'(\beta, z) &= -C_{12}\zeta V_2(\beta, z) + C_{22}S_2(\beta, z) + \\
 &+ C_{32}Q_{12}(\beta, z) + C_{42}U_2(\beta, z), \\
 W_2''(\beta, z) &= -C_{12}\zeta U_2(\beta, z) - C_{22}\zeta V_2(\beta, z) + \\
 &+ C_{32}Q_{22}(\beta, z) + C_{42}Q_{12}(\beta, z), \\
 W_2'''(\beta, z) &= -C_{12}\zeta Q_{12}(\beta, z) - C_{22}\zeta U_2(\beta, z) + \\
 &+ C_{32}Q_{32}(\beta, z) + C_{42}Q_{22}(\beta, z).
 \end{aligned}$$

Здесь и далее $\zeta = \gamma_1^2 \gamma_2^2$. При представлении решений в форме (27) произвольные постоянные можно выразить через значения функций W_i и их производных в точке $z=0$:

$$\begin{aligned}
 W_i(\beta, 0) &= C_{1i}, & W_i'(\beta, 0) &= C_{2i}, \\
 W_i''(\beta, 0) &= C_{3i}, & W_i'''(\beta, 0) &= C_{4i}.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Рассмотрим случай, когда свободный от твердого тела торец балки жестко закреплен. Подставляя решение (27) в граничные условия (21) и (22), получим однородную алгебраическую систему относительно постоянных интегрирования C_{3i} и C_{4i} . Она имеет следующий вид:

$$\begin{cases} C_{3i}a_{11}^{(i)} + C_{4i}a_{12}^{(i)} = 0, \\ C_{3i}a_{21}^{(i)} + C_{4i}a_{22}^{(i)} = 0. \end{cases} \tag{32}$$

При этом $C_{1i}=0$; $C_{2i} = -K_1 C_{4i}$, где $K_1 = s^2/b_1$. Величины $a_{kj}^{(i)}$, входящие в систему уравнений (32),

определяются по формулам

$$\begin{aligned}
 a_{11}^{(1)} &= f_1 Q_{31}(\beta, l) + f_2 Q_{11}(\beta, l) + f_3 U_1(\beta, l), \\
 a_{12}^{(1)} &= f_1 (Q_{21}(\beta, l) - K_1 \zeta U_1(\beta, l)) + \\
 &+ f_2 (U_1(\beta, l) - K_1 S_1(\beta, l)) + \\
 &+ f_3 (V_1(\beta, l) - K_1 T_1(\beta, l)), \\
 a_{21}^{(1)} &= f_4 Q_{31}(\beta, l) + f_5 Q_{21}(\beta, l) + \\
 &+ f_6 Q_{11}(\beta, l) + f_7 U_1(\beta, l), \\
 a_{22}^{(1)} &= f_4 (Q_{21}(\beta, l) - K_1 \zeta U_1(\beta, l)) + \\
 &+ f_5 (Q_{11}(\beta, l) - K_1 \zeta V_1(\beta, l)) + \\
 &+ f_6 (U_1(\beta, l) - K_1 S_1(\beta, l)) + \\
 &+ f_7 (V_1(\beta, l) - K_1 T_1(\beta, l)), \\
 a_{11}^{(2)} &= f_1 Q_{32}(\beta, l) + f_2 Q_{12}(\beta, l) + f_3 U_2(\beta, l), \\
 a_{12}^{(2)} &= f_1 (Q_{22}(\beta, l) + K_1 \zeta U_2(\beta, l)) + \\
 &+ f_2 (U_2(\beta, l) - K_1 S_2(\beta, l)) + \\
 &+ f_3 (V_2(\beta, l) - K_1 T_2(\beta, l)), \\
 a_{21}^{(2)} &= f_4 Q_{32}(\beta, l) + f_5 Q_{22}(\beta, l) + \\
 &+ f_6 Q_{12}(\beta, l) + f_7 U_2(\beta, l), \\
 a_{22}^{(2)} &= f_4 (Q_{22}(\beta, l) + K_1 \zeta U_2(\beta, l)) + \\
 &+ f_5 (Q_{12}(\beta, l) + K_1 \zeta V_2(\beta, l)) + \\
 &+ f_6 (U_2(\beta, l) - K_1 S_2(\beta, l)) + \\
 &+ f_7 (V_2(\beta, l) - K_1 T_2(\beta, l)).
 \end{aligned}$$

Из условия существования решения алгебраической системы (32) получим характеристическое уравнение для определения параметра β :

$$\det \begin{vmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)} \end{vmatrix} = 0. \tag{33}$$

Если параметр β определен, то из решения системы (32) найдем $C_{3i} = -C_{4i} (a_{12}^{(i)} / a_{11}^{(i)})$.

Аналогичным образом, удовлетворяя условия (21) и (23), получим систему алгебраических уравнений относительно постоянных C_{1i} и C_{2i} для случая, когда левый торец балки свободен от нагрузок:

$$\begin{cases} C_{1i}a_{11}^{(i)} + C_{2i}a_{12}^{(i)} = 0, \\ C_{1i}a_{21}^{(i)} + C_{2i}a_{22}^{(i)} = 0. \end{cases} \tag{34}$$

При этом $C_{3i} = -K_2 C_{1i}$; $C_{4i} = -b_2 C_{2i}$, где $K_2 = s^2 \beta^2$. Соответственно величины $a_{kj}^{(i)}$, входящие в систему уравнений (34), будут определяться как

$$a_{11}^{(1)} = f_1(\zeta Q_{11}(\beta, l) - K_2 Q_{31}(\beta, l)) + f_2(\zeta V_1(\beta, l) - K_2 Q_{11}(\beta, l)) + f_3(S_1(\beta, l) - K_2 U_1(\beta, l));$$

$$a_{12}^{(1)} = f_1(\zeta U_1(\beta, l) - b_2 Q_{21}(\beta, l)) + f_2(S_1(\beta, l) - b_2 U_1(\beta, l)) + f_3(T_1(\beta, l) - b_2 V_1(\beta, l));$$

$$a_{21}^{(1)} = f_4(\zeta Q_{11}(\beta, l) - K_2 Q_{31}(\beta, l)) + f_5(\zeta U_1(\beta, l) - K_2 Q_{21}(\beta, l)) + f_6(\zeta V_1(\beta, l) - K_2 Q_{11}(\beta, l)) + f_7(S_1(\beta, l) - K_2 U_1(\beta, l)),$$

$$a_{22}^{(1)} = f_4(\zeta U_1(\beta, l) - b_2 Q_{21}(\beta, l)) + f_5(\zeta V_1(\beta, l) - b_2 Q_{11}(\beta, l)) + f_6(S_1(\beta, l) - b_2 U_1(\beta, l)) + f_7(T_1(\beta, l) - b_2 V_1(\beta, l)),$$

$$a_{11}^{(2)} = -f_1(\zeta Q_{12}(\beta, l) + K_2 Q_{32}(\beta, l)) - f_2(\zeta V_2(\beta, l) + K_2 Q_{12}(\beta, l)) + f_3(S_2(\beta, l) - K_2 U_2(\beta, l)),$$

$$a_{12}^{(2)} = -f_1(\zeta U_2(\beta, l) + b_2 Q_{22}(\beta, l)) + f_2(S_2(\beta, l) - b_2 U_2(\beta, l)) + f_3(T_2(\beta, l) - b_2 V_2(\beta, l)),$$

$$a_{21}^{(2)} = -f_4(\zeta Q_{12}(\beta, l) + K_2 Q_{32}(\beta, l)) - f_5(\zeta U_2(\beta, l) + K_2 Q_{22}(\beta, l)) - f_6(\zeta V_2(\beta, l) + K_2 Q_{12}(\beta, l)) + f_7(S_2(\beta, l) - K_2 U_2(\beta, l)),$$

$$a_{22}^{(2)} = -f_4(\zeta U_2(\beta, l) + b_2 Q_{22}(\beta, l)) - f_5(\zeta V_2(\beta, l) + b_2 Q_{12}(\beta, l)) + f_6(S_2(\beta, l) - b_2 U_2(\beta, l)) + f_7(T_2(\beta, l) - b_2 V_2(\beta, l)).$$

Частотное уравнение снова будет иметь вид (33). После определения β из решения системы (34) найдем $C_{2i} = -C_{1i}(a_{11}^{(i)}/a_{12}^{(i)})$.

Таким образом, получена достаточно простая расчетная схема решения задачи о собственных из-

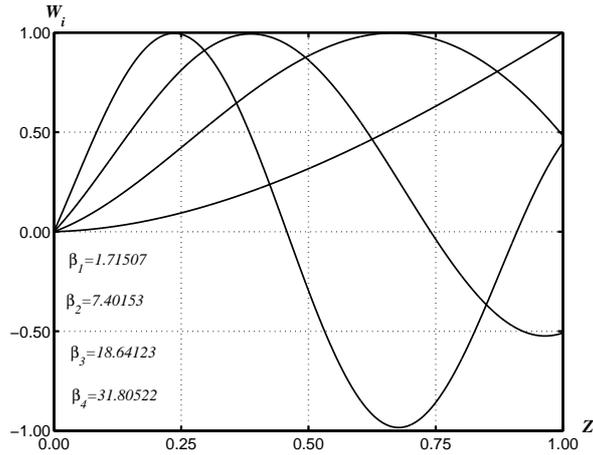


Рис. 1. Первые четыре собственные формы колебаний и соответствующие им частоты консольно закрепленной балки Тимошенко с присоединенным на торце твердым телом

гибных колебаниях балки Тимошенко с присоединенным на торце абсолютно твердым телом. Решения представлены для жесткого крепления и незакрепленного торца балки. За счет представления решения в виде (27) можно без особых затруднений реализовать и другие наиболее часто встречающиеся на практике типы граничных условий. Предложенная формульная схема решения рассматриваемой задачи удобна и для реализации ее на ПЭВМ.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Ниже приведены некоторые результаты расчетов для случая жесткого крепления торца оболочки при $z=0$. На рис. 1 показаны первые четыре собственные формы и соответствующие им частоты колебаний консольно закрепленной балки Тимошенко, несущей на свободном торце твердое тело.

В качестве исходных данных приняты данные из работы [6]: $e=0.2$, $\eta=0.01$, $\mu=1$, $j=0.2$, $\kappa=1/1.2$, $\nu=0.3$. Связь безразмерных величин, введенных в ней, с величинами, представленными формулами (13), осуществляется по формулам

$$\eta = r^2, \quad \lambda = \frac{2(1+\nu)}{\kappa}, \quad e = l_c, \quad \mu = m_0, \\ s^2 = \lambda\eta, \quad J_{y1} = \mu(e^2 + j^2), \quad j = \sqrt{\frac{J_{yc}}{\mu l^2}}.$$

При этом все линейные размеры отнесены к длине балки ($L=l$).

Таблица. Частоты колебаний системы, полученные по различным расчетным схемам:
 (I) – оболочечная схема, (II) – балочная схема Тимошенко, (III) и (IV) – балочная схема с учетом только деформаций сдвига или только инерции поворота, (V) – балочная схема Эйлера – Бернулли

l/R		2	4	6	8	10
β_1^*	(I)	0.04104	0.02062	0.01266	0.00868	0.00640
	(II)	0.04152	0.02073	0.01269	0.00868	0.00640
	(III)	0.04156	0.02076	0.01271	0.00869	0.00640
	(IV)	0.05582	0.02372	0.01367	0.00909	0.00660
	(V)	0.05600	0.02376	0.01369	0.00910	0.00660
β_2^*	(I)	0.21491	0.16684	0.12665	0.09380	0.07040
	(II)	0.21560	0.16707	0.12666	0.09380	0.07040
	(III)	0.21856	0.16971	0.12842	0.09490	0.07110
	(IV)	0.45942	0.24775	0.16542	0.11600	0.08380
	(V)	0.46749	0.25257	0.16903	0.11840	0.08530
β_3^*	(I)	0.59670	0.34020	0.25126	0.20393	0.16650
	(II)	0.68582	0.35616	0.25673	0.20530	0.16650
	(III)	0.68635	0.35722	0.25836	0.20749	0.16890
	(IV)	2.39765	0.86431	0.46155	0.30342	0.22220
	(V)	3.86339	1.02308	0.501883	0.32016	0.23180
β_4^*	(I)	0.84825	0.57846	0.39471	0.30000	0.24788
	(II)	1.29893	0.62354	0.40681	0.30614	0.25096
	(III)	1.33409	0.64521	0.41891	0.31307	0.25542
	(IV)	3.99919	1.69206	0.94024	0.60134	0.42342
	(V)	10.47193	2.65297	1.20558	0.70117	0.46959

Сравнение полученных результатов с частотами и формами, представленными в работе [6], свидетельствует об их полном совпадении.

Обратимся к вопросу о применимости приведенной расчетной схемы для определения собственных колебаний цилиндрической оболочки с присоединенным на торце абсолютно твердым телом. Для проведения сравнения полученных результатов перейдем к безразмерным величинам, введенным в работе [1] (далее они обозначены индексом *). Отметим, что в цитируемой работе считалось, что к оболочке присоединено твердое тело, имеющее форму кругового цилиндра с радиусом R и длиной $H=2l_c$. Если в формулах (13) положить $L=R$, а также учесть, что $F=2\pi Rh$, $J=\pi R^3h$, где h – толщина оболочки, то

$$\beta^{*2} = \frac{(1-\nu^2)}{2}\beta^2, \quad m_0 = \frac{1}{2}m_0^*, \quad r^2 = \frac{1}{2},$$

$$J_{y_1} = \frac{1}{2} \left[m_0^* l_c^2 + \frac{m_0^*}{12} (H^2 + 3) \right].$$

Все остальные соотношения для введенных по формулам (13) безразмерных величин остаются без изменений. Во всех расчетах коэффициент

сдвига κ определялся по следующей формуле [12]:

$$\kappa = \frac{2(1+\nu)}{(4+3\nu)}. \quad (35)$$

В таблице приведены результаты вычислений первых четырех частот изгибных колебаний системы. При этом приняты следующие исходные данные: $m_0^*=50$, $l_c^*=0.5$, $\nu=0.3$, $h=0.01$. Длина оболочки l варьировалась. Расчеты проведены на основе технической теории оболочек – (I), с использованием балочной теории Тимошенко – (II), по балочной теории с учетом только деформаций сдвига ($r^2=0$) – (III), с учетом только инерции поворота поперечного сечения балки ($s^2=0$) – (IV) и по балочной схеме Эйлера – Бернулли ($r^2=s^2=0$) – (V).

Данные таблицы показывают, что при выбранной массе тела элементарная теория балок дает хорошие результаты при вычислении первой частоты только для длинных оболочек ($l/R \geq 10$). Учет деформаций сдвига и инерции вращения в уравнениях балки значительно улучшают точность балочного приближения рассматриваемой конструкции. Так, при $l/R > 6$ первые две частоты, вычисленные по теории оболочек и по теории балок Тимошенко, практически совпадают, а для третьей и четвертой частот расхождение составляет не бо-

лее 3 %. При этом определяющую роль играет учет деформаций сдвига. Инерция поворота может оказывать существенное влияние при расчете высших частот системы.

Пространственное изображение поверхности относительной погрешности определения первых трех частот колебаний системы по балочной теории Тимошенко δ_i как функции от массы присоединенного тела и длины оболочки представлено на рис. 2 (правые графики соответствуют более узким диапазонам изменения m_0). Из рисунка видно, что погрешности δ_i существенно зависят от массы присоединенного тела и длины оболочки. Увеличение длины оболочки при фиксированной массе тела и увеличение массы тела при фиксированной длине оболочки приводит к уменьшению погрешностей δ_i . Так, уже при $m_0^* > 1$ и $l/R > 1$ погрешность определения первой частоты системы не превышает 5 %. Погрешности определения первых трех частот системы не превышают 1 % при $m_0^* > 1$ и $l/R > 6$.

Амплитудные значения W_i первых четырех радиальных форм колебаний оболочки, отнесенные к их максимальным значениям, представлены на рис. 3 ($z^* = z/l$). Сплошными линиями показаны формы колебаний, определенные по теории оболочек, штриховыми – по теории балок Тимошенко и штрих-пунктирными – по элементарной теории балок. В качестве исходных данных выбирались данные, при которых получены результаты таблицы для $l/R = 4$. Из графиков следует, что балочная модель Тимошенко позволяет определять не только низшие частоты рассматриваемой механической конструкции, но и соответствующие им формы колебаний. Максимальные различия в формах колебаний при их расчете по рассмотренным схемам наблюдаются в окрестностях торцевых сечений оболочки. Эти различия носят локальный характер и обусловлены проявлением краевых эффектов деформирования оболочки, которые усиливаются при уменьшении ее относительной толщины. В свою очередь, элементарная теория балок при выбранных параметрах системы дает удовлетворительные результаты лишь при расчете первой формы колебаний.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе дано точное решение задачи об определении собственных изгибных колебаний балки Тимошенко с присоединенным на торце абсолютно твердым телом. Решение представлено в удобной форме, позволяющей получать результаты расчетов для различных приближенных моделей балок

при любых входных данных.

При проведении численных экспериментов основное внимание уделено вопросу о возможности использования приведенной расчетной схемы при определении собственных частот изгибных колебаний балочного типа, совершаемых цилиндрической оболочкой с присоединенным на торце твердым телом. Проанализировано влияние учета инерции поворота поперечного сечения балки, а также деформаций сдвига на точность балочной аппроксимации оболочки с телом. При этом показано, что именно учет деформаций сдвига позволяет с достаточной для практики точностью определять низшие частоты и формы собственных колебаний рассматриваемой механической системы. Влияние же инерции поворота оказывается незначительным.

Проанализировано влияние массы твердого тела и длины оболочки на относительную погрешность частот, получаемых с использованием балочной схемы Тимошенко. Показано, что на формирование низших частот системы существенное влияние оказывает твердое тело. При этом незначительное увеличение инерционных свойств последнего даже при малых длинах оболочки ведет к резкому снижению погрешности. Увеличение длины оболочки также влечет за собой уменьшение относительной погрешности вносимой балочным приближением.

Из приведенного анализа результатов расчета частот и форм собственных колебаний цилиндрической оболочки с присоединенным к ее торцу абсолютно твердым телом следует, что балочная теория, построенная на учете деформаций сдвига и инерции поворота поперечного сечения, имеет существенно большую область применимости, по сравнению с классической теорией балок Эйлера – Бернулли. Она дает приемлемые для практического использования результаты при определении не только низших, но и высших форм колебаний рассматриваемой механической системы.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при частичной поддержке НИП N 0102 U000917.

1. Карпачев Ю. А., Троценко В. А., Троценко Ю. В. Свободные неосесимметричные колебания цилиндрической оболочки с присоединенным твердым телом // Акуст. вісн.– 2001.– 4, N 1.– С. 44–59.
2. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.– М.: Наука, 1967.– 444 с.

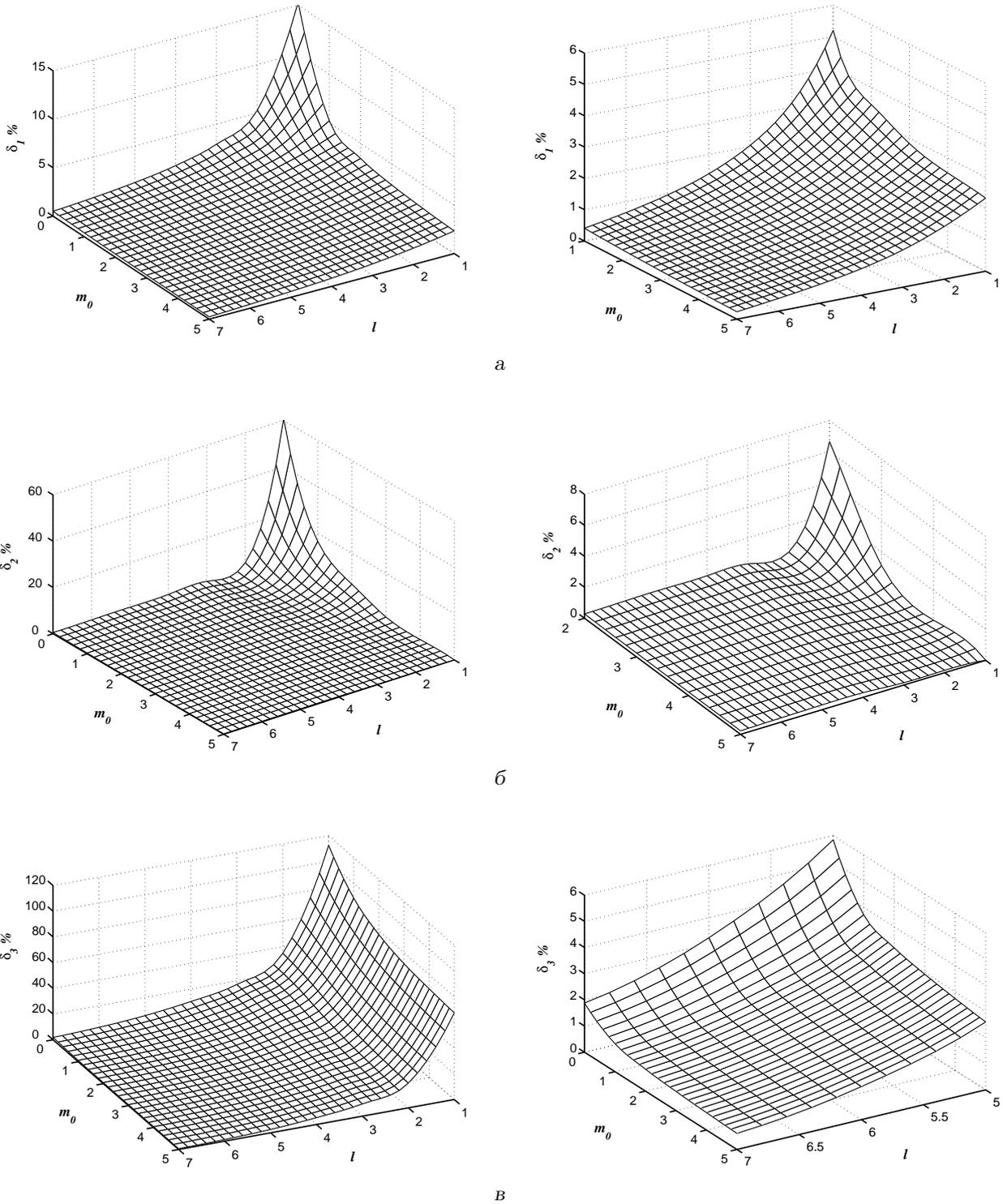


Рис. 2. Относительная погрешность δ_i (%) вычисления первых трех частот системы по балочной теории Тимошенко в зависимости от безразмерной массы твердого тела m_0^* и относительной длины оболочки l/R :

а – первая собственная частота, б – вторая собственная частота, в – третья собственная частота

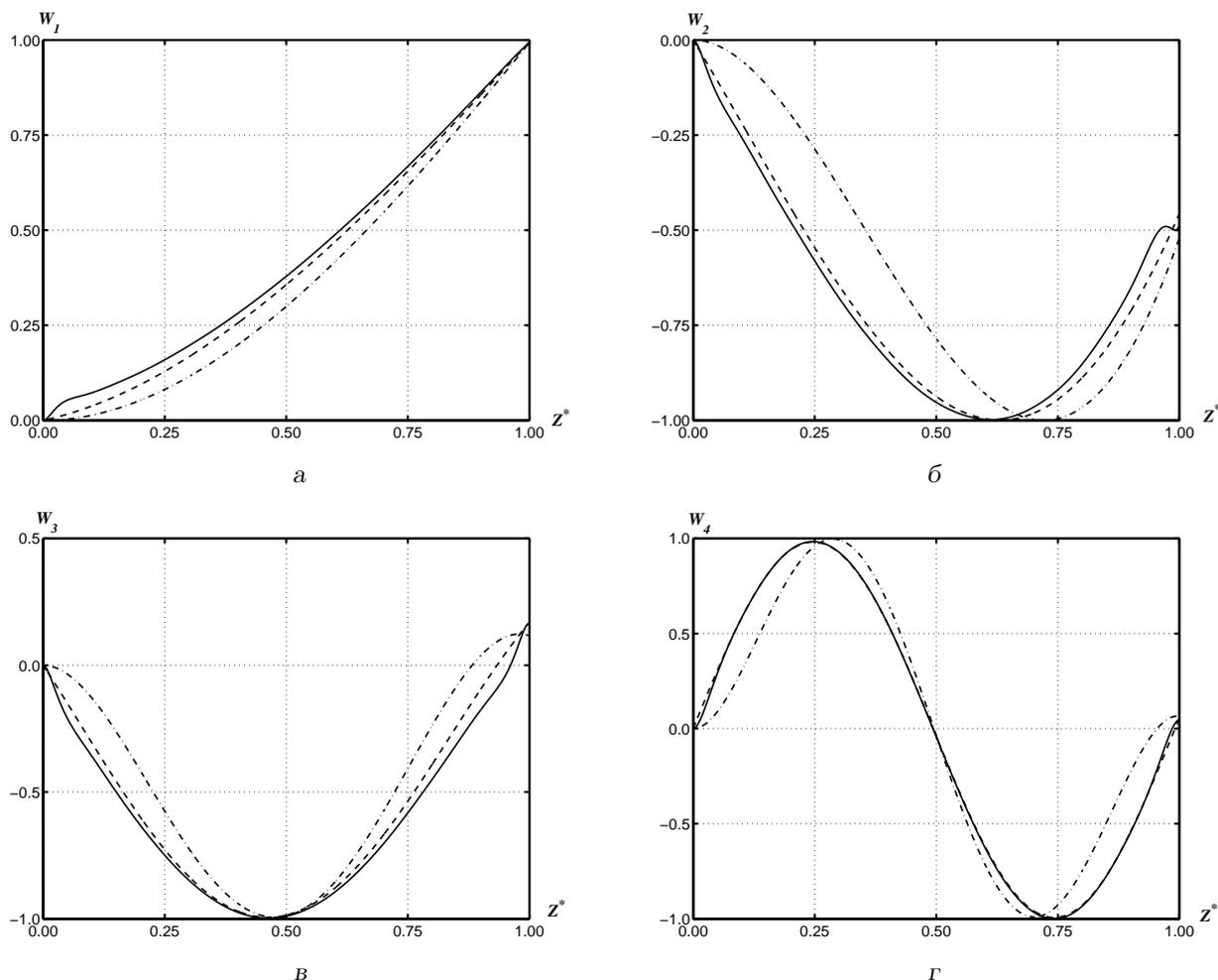


Рис. 3. Сравнение амплитудных значений первых четырех форм колебаний системы (а–г соответственно), определенных по теории оболочек (сплошные), по балочной теории Тимошенко (штриховые) и по балочной теории Эйлера–Бернулли (штрих-пунктирные)

3. Форсберг К. Осесимметричные и балочного типа колебания тонкой цилиндрической оболочки // Ракет. техн. космонавт.– 1969.– 7, N 2.– С. 37–45.
4. Выломов В. Н., Малинин А. А. Анализ точности аппроксимации балочной моделью в задачах динамики тонкостенных конструкций // Прикл. пробл. прочн. пластич.– 1976.– N 5.– С. 42–47.
5. Григорьева Г. Н., Лурье Ф. М. Влияние инерции вращения и сдвига на собственную частоту изгибных колебаний стержня // Строит. мех. расчет сооруж.– 1983.– N 2.– С. 51–54.
6. Laura P. A. A., Rossi R. E. Vibrations of a Timoshenko beam clamped at one end and carrying a finite mass at the other // Appl. Acoust.– 1990.– 30, N 4.– P. 293–301.
7. White M. W. D., Heppler G. R. Vibrations modes and frequencies of a Timoshenko beam with attached rigid bodies // Trans. ASME. J. Appl. Mech.– 1995.– 62, N 1.– P. 193–199.
8. Aalami B., Atzori B. Flexural vibrations and Timoshenko's beam theory // AIAA J.– 1974.– vol. 12, N 5.– P. 679–685.
9. Murty A. V. K. Vibrations of short beams // AIAA J.– 1969.– N 1.– P. 34–38.
10. Вибрации в технике. Колебания линейных систем: том 1.– М.: Машиностроение, 1978.– 352 с.
11. Филипов А. П. Колебания деформируемых систем.– М.: Машиностроение, 1970.– 734 с.
12. Cowper G. R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory // J. Appl. Mech.– 1966.– vol. 33, N 2.– P. 335–340.