

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ВНУТРИ ПОЛОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ

Н. Д. ВАЙСФЕЛЬД

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

Получено 20.03.2003 ◊ Пересмотрено 24.12.2003

Решена задача об осесимметричном нестационарном нагружении полого цилиндра, покоящегося на жестком основании. На боковых поверхностях цилиндра заданы условия первой основной задачи теории упругости. Волновое поле внутри цилиндра определялось с помощью подхода, основанного на дискретизации уравнений движения по времени и использовании метода интегральных преобразований. Полученная одномерная векторная краевая задача решалась с помощью построения матричной функции Грина. Получено эффективное приближенное решение исходной физической задачи. Численно исследована зависимость величины напряжений цилиндра от его геометрических размеров и времени.

Розв'язано задачу про осесиметричне нестационарне навантаження порожнистого циліндра, який знаходиться у спокої на жорсткій основі. На бічних поверхнях циліндра задані умови першої основної задачі теорії пружності. Хвильове поле всередині циліндра визначалося за допомогою підходу, який базується на дискретизації рівнянь руху за часом і використання методу інтегральних перетворень. Отримана одномірна векторна крайова задача розв'язувалась за допомогою побудови матричної функції Гріна. Отримано ефективний наближений розв'язок вихідної фізичної задачі. Чисельно досліджено залежність величини напружень циліндра від його геометричних розмірів і часу.

A problem of axisymmetric non-stationary loading of a hollow cylinder situated on a rigid basis is solved. The conditions of the first fundamental problem of the theory of elasticity are set on lateral surfaces of the cylinder. Wave field inside the cylinder was determined with the help of an approach based on the time digitization of equations of motion and usage of the method of integral transformations. The received one-dimensional vector boundary problem was solved through construction of the matrix Green's function. The efficient approximate solution of the initial physical problem is received. The dependence of tensions in the cylinder on its geometrical sizes and time is numerically investigated.

ВВЕДЕНИЕ

Сплошные и полые упругие цилиндры являются одними из типичных тел, которые встречаются в практике расчетов при исследовании воздействия различных нагрузок на элементы конструкций. Исследованию напряженного состояния таких тел посвящено большое количество публикаций. Так, в [1] изложены теория и методы расчета полых упругих цилиндров, работающих в условиях сложных статических нагрузок. Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины изучались в работах [2, 3]. В монографии [4] исследованы задачи дифракции волн в многосвязных телах, ограниченных круговыми цилиндрическими поверхностями. Точные решения некоторых смешанных задач несвязанной термоупругости для конечного кругового цилиндра даны в [5].

Особенный практический интерес вызывают задачи, связанные с исследованием напряженного состояния упругих цилиндров при воздействии нестационарных нагрузок. Основные трудности при

их решении, как правило, связаны с обращением преобразования Лапласа и являются следствием сложности процесса распространения упругих волн в конечных телах. В работах [6, 7] с помощью применения преобразования Лапласа по времени рассмотрены нестационарные задачи о деформировании полого цилиндра конечной длины и многослойного цилиндра. В результате задача сведена к системе интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода, которые решались численно.

В данной работе представлено решение нестационарной задачи для конечного полого кругового цилиндра, на боковых (цилиндрических) поверхностях которого заданы условия первой основной задачи теории упругости, а на торцах – условия скользящей заделки. Для решения предлагается эффективный приближенный метод, основанный на использовании дискретизации уравнений движения по времени (вместо применения преобразования Лапласа) и методе интегральных преобразований. Это позволяет свести исходную постановку к векторной краевой задаче, которая решается с помощью аппарата матричной функции Грина.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается упругий полый конечный круговой цилиндр $a_0 \leq r \leq a_1$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq z \leq l$ (рис. 1). Один из торцов цилиндра $z=0$ находится в условиях гладкого контакта с абсолютно жестким основанием. Другой торец $z=l$ сцеплен с абсолютно жесткой накладкой массы m , к которой приложена нестационарная динамическая нагрузка $PН(t)$. Здесь P – заданная сила; $H(t)$ – единичная функция Хевисайда. Под действием этой нагрузки точки торца $z=l$ смещаются на неизвестную величину $U_0(t)$. Цилиндрические поверхности $r=a_i$, $i=0, 1$ свободны от напряжений:

$$\tau_{rz}|_{r=a_i} = 0, \sigma_r|_{r=a_i} = 0, i = 0, 1. \quad (1)$$

При такой постановке вектор смещений состоит из двух ненулевых компонент $u_r(r, \theta, t)$, $u_z(r, \theta, t)$, удовлетворяющих уравнениям движения [8]

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\mu_* \partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} + \\ + \frac{\mu_0}{\mu_*} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} = \frac{1}{\mu_* c^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \mu_* \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \\ + \frac{\mu_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1}, \quad \mu_* = 2(1 - \mu)\mu_0$$

при краевых условиях на торцах

$$\begin{aligned} u_z|_{z=0} = 0, \quad \tau_{rz}|_{z=0} = 0, \\ u_z|_{z=l} = -U_0(t), \quad \tau_{rz}|_{z=l} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для того, чтобы определить неизвестное смещение $U_0(t)$, используется уравнение движения накладки

$$\int_s \sigma_z(r, l, t) ds + PН(t) = m \frac{d^2 U_0(t)}{dt^2}. \quad (4)$$

Требуется найти неизвестную величину смещений $U_0(t)$ и волновое поле внутри цилиндра при нулевых начальных условиях.

2. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К ВЕКТОРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Предполагая, что волновое поле цилиндра будет исследоваться на временном интервале $[0; T]$, разобьем его на N интервалов с шагом $h=T/N$. В

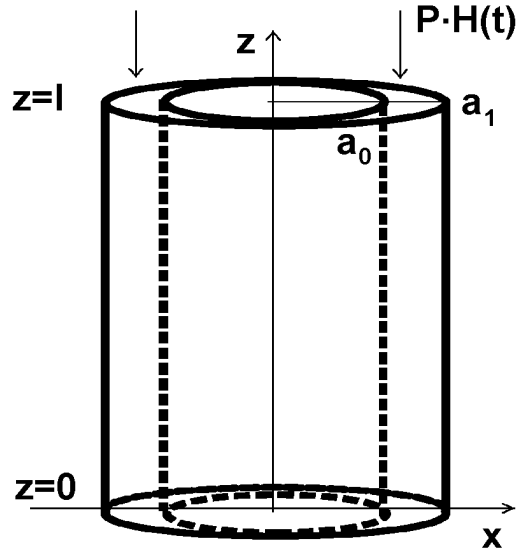


Рис. 1. Постановка задачи

формулах (2) и (4) вторая производная по времени заменяется разностным соотношением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{f_j}{h^2} - 2 \frac{f_{j-1}}{h^2} + \frac{f_{j-2}}{h^2}, \\ f_j(r, z) = f(r, z, jh), \\ j = 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

Введем обозначения

$$u_{rj}(r, z) = u_j(r, z), \quad u_{zj}(r, z) = w_j(r, z). \quad (6)$$

С учетом соотношений (5) и (6) уравнения движения (2) и краевые условия (1) и (3) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_j}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_j}{\mu_* \partial z^2} - \frac{u_j}{r^2} - \frac{u_j}{\mu_* c^2 h^2} + \\ + \frac{\mu_0}{\mu_*} \frac{\partial^2 w_j}{\partial r \partial z} = \frac{1}{\mu_* c^2} \left(\frac{u_{j-2}}{h^2} - \frac{2u_{j-1}}{h^2} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_j}{\partial r} \right) + \mu_* \frac{\partial^2 w_j}{\partial z^2} - \frac{w_j}{c^2 h^2} + \\ + \frac{\mu_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_j}{\partial z} \right) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{w_{j-2}}{h^2} - \frac{2w_{j-1}}{h^2} \right), \end{aligned}$$

$$w_j(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial w_j(r, 0)}{\partial r} + \frac{\partial u_j(r, 0)}{\partial z} = 0,$$

$$w_j(r, l) = -U_{0j}, \quad \frac{\partial w_j(r, l)}{\partial r} + \frac{\partial u_j(r, l)}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &\mu \left(a_i \frac{\partial u_j(a_i, z)}{\partial r} + u_j(a_i, z) \right) + \\ &+ (1 - \mu) \frac{\partial w_j(a_i, z)}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial w_j(a_i, z)}{\partial r} + \frac{\partial u_j(a_i, z)}{\partial z} = 0, \\ &i = 0, 1. \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\mu \left(a_i \frac{du_{nj}(a_i)}{dr} + u_{nj}(a_i, z) \right) + \\ &+ (1 - \mu) \lambda_n w_{nj}(a_i) = (1 - \mu) (-1)^n U_{0j}, \\ &\frac{dw_{nj}(a_i)}{dr} - \lambda_n u_{nj}(a_i) = 0, \\ &i = 0, 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Для формулировки векторной краевой задачи введем в рассмотрение неизвестный вектор

$$\vec{y}_{nj}(r) = \begin{pmatrix} u_{nj}(r) \\ w_{nj}(r) \end{pmatrix},$$

К первому из уравнений (7) применим косинус-преобразование Фурье, а к другому – синус-преобразование:

$$\begin{bmatrix} w_{nj}(r) \\ u_{nj}(r) \end{bmatrix} = \int_0^l \begin{bmatrix} \sin \lambda_n z w_j(r, z) \\ \cos \lambda_n z u_j(r, z) \end{bmatrix} dz, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \pi n l^{-1}, & n &= 1, 2, \dots \\ \lambda_n &= \pi n l^{-1}, & n &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

с формулами обращения

$$\begin{aligned} w_j(r, z) &= 2l^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \lambda_n z w_{nj}(r), \\ u_j(r, z) &= 2l^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} * \cos \lambda_n z u_{nj}(r) \end{aligned} \tag{11}$$

соответственно (* около знака суммы означает удвоение первого слагаемого). В результате применения интегральных преобразований (10) к уравнениям (7) и краевым условиям (9) в пространстве трансформант Фурье получаем одномерную краевую задачу:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_{nj}}{dr} \right) - \frac{\lambda_n^2 u_j}{\mu_*} - \frac{u_{nj}}{r^2} - \frac{u_{nj}}{\mu_* c^2 h^2} - \\ &- \frac{\lambda_n \mu_0}{\mu_*} \frac{dw_{nj}}{dr} = \frac{1}{\mu_* c^2} \left(\frac{u_{nj-2}}{h^2} - \frac{2u_{nj-1}}{h^2} \right), \\ &\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_{nj}}{dr} \right) - \mu_* \lambda_n^2 w_{nj} - \frac{w_{nj}}{c^2 h^2} - \\ &- \frac{\mu_0 \lambda_n}{r} \frac{d}{dr} (r u_{nj}) = (-1)^{n+1} U_{0j} \lambda_n + \\ &+ \frac{1}{c^2} \left(\frac{w_{nj-2}}{h^2} - \frac{2w_{nj-1}}{h^2} \right), \end{aligned} \tag{12}$$

а также матрицы

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{P}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{P}_1 &= \begin{pmatrix} \mu_*^{-1} + (\mu_* \lambda_n^2 c^2 h^2)^{-1} & 0 \\ 0 & \mu_*^+ (\lambda_n^2 c^2 h^2)^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и вектор

$$\begin{aligned} \vec{F}_j(r) &= \\ &= \begin{pmatrix} \mu_*^{-1} (\text{ch})^{-2} (u_{nj-2}(r) - 2u_{nj-1}(r)) \\ (-1)^{n+1} U_{0j} \lambda_n + (\text{ch})^{-2} (w_{nj-2}(r) - 2w_{nj-1}(r)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда система уравнений (12) переписывается в векторном виде

$$L \vec{y}_j(r) = \vec{F}_j(r), \tag{14}$$

где оператор L действует следующим образом:

$$\begin{aligned} L \vec{y}_j(r) &= \mathbf{I} r^{-1} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d \vec{y}_j}{dr} \right] - \mathbf{P}_0 r^{-2} \vec{y}_j + \\ &+ \mu_0 \mu_*^{-1} \lambda_n \mathbf{Q}_0 \frac{d \vec{y}_j}{dr} - \mu_0 r^{-1} \lambda_n \mathbf{Q}_1 \frac{d}{dr} [r \vec{y}_j] - \lambda_n^2 \mathbf{P}_1 \vec{y}_j. \end{aligned}$$

Построим граничные функционалы с тем, чтобы присоединить граничные условия (13) к дифференциальному уравнению (14). Для этого введем матрицы

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} \mu & (1 - \mu) \lambda_n \\ -\lambda_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} a_i \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и векторы

$$\vec{\gamma}_i = U_{0j} \begin{pmatrix} (1 - \mu)(-1)^n \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $i=0, 1$. С учетом этих обозначений граничные функционалы примут вид

$$U_i [\vec{y}_j(r)] = \mathbf{A}_i \vec{y}(a_i) + \mathbf{B}_i \frac{d\vec{y}(a_i)}{dr}, \quad i = 0, 1. \quad (15)$$

Таким образом, в пространстве трансформант Фурье получена векторная краевая задача

$$L [\vec{y}_j(r)] = \vec{F}_j(r), \quad U_i [\vec{y}_j(r)] = \vec{\gamma}_i, \quad i = 0, 1. \quad (16)$$

3. РЕШЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Решение векторной краевой задачи (16) согласно [9] запишем следующим образом:

$$\vec{y}_j(r) = \int_{a_0}^{a_1} \mathbf{G}(r, s) \vec{F}_j(s) ds + \sum_{i=0}^1 \Psi_i(r) \vec{\gamma}_i. \quad (17)$$

Здесь $\mathbf{G}(r, s)$ – матрица Грина; $\Psi_i(r)$, $i = 0, 1$ – базисные матрицы. Функцию Грина строим в виде [9]

$$\mathbf{G}(r, s) = \Phi(r, s) - \sum_{i=0}^1 \Psi_i(r) U_i[\Phi(r, s)], \quad (18)$$

где $\Phi(r, s)$ – фундаментальная матрица, т. е. такая матрица, что вектор

$$\vec{y}_j(r) = \int_{a_0}^{a_1} \Phi(r, s) \vec{F}_j(s) ds \quad (19)$$

является решением первого уравнения, входящего в задачу (16).

Для построения фундаментальной матрицы применим к дифференциальному уравнению из выражения (16) матричное интегральное преобразование [9]

$$\begin{pmatrix} \vec{y}_{j\alpha} \\ \vec{F}_{j\alpha} \end{pmatrix} = \int_0^\infty r \mathbf{K}(r, \alpha) \begin{pmatrix} \vec{y}_j(r) \\ \vec{F}_j(r) \end{pmatrix} dr, \quad (20)$$

$$\mathbf{K}(r, \alpha) = \begin{pmatrix} J_1(\alpha r) & 0 \\ 0 & J_0(\alpha r) \end{pmatrix},$$

с формулой обращения

$$\begin{pmatrix} \vec{y}_j(r) \\ \vec{F}_j(r) \end{pmatrix} = \int_0^\infty \alpha \mathbf{R}(r, \alpha) \begin{pmatrix} \vec{y}_{j\alpha} \\ \vec{F}_{j\alpha} \end{pmatrix} d\alpha, \quad (21)$$

$$\mathbf{R}(r, \alpha) = \begin{pmatrix} J_1(\alpha r) & 0 \\ 0 & J_0(\alpha r) \end{pmatrix}.$$

Здесь $J_0(\alpha r)$, $J_1(\alpha r)$ – функции Бесселя первого рода; α – параметр преобразования. После применения интегрального преобразования (20) к уравнению (16) получаем соотношение в пространстве трансформант:

$$\mathbf{M}_{n\alpha} \vec{y}_{j\alpha} = \vec{F}_{j\alpha}, \quad (22)$$

где элементы матрицы \mathbf{M} имеют вид

$$\mathbf{M}_{n\alpha}^{00} = -\alpha^2 - \mu_*^{-1} c^{-2} h^{-2} ((\lambda_n \text{ch})^2 + 1);$$

$$\mathbf{M}_{n\alpha}^{01} = -\alpha \mu_*^{-1} \mu_0 \lambda_n;$$

$$\mathbf{M}_{n\alpha}^{10} = -\alpha \mu_0 \lambda_n;$$

$$\mathbf{M}_{n\alpha}^{11} = -\alpha^2 - \mu_* \lambda_n^2 - (\text{ch})^{-2}.$$

Первый и второй верхние индексы обозначают номер строки и столбца матрицы соответственно. Из равенства (22) находим, что

$$\vec{y}_{j\alpha} = \mathbf{M}_{n\alpha}^{-1} \vec{F}_{j\alpha}.$$

Применив к полученному соотношению обратное матричное интегральное преобразование (21), запишем решение дифференциального уравнения из (16) в пространстве оригиналов

$$\vec{y}_j(r) = \int_0^\infty \alpha \mathbf{R}(r, \alpha) \mathbf{M}_{n\alpha}^{-1} \vec{F}_{j\alpha} d\alpha. \quad (23)$$

Обратная матрица $\mathbf{M}_{n\alpha}^{-1}$ имеет вид [10]

$$\mathbf{M}_{n\alpha}^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^2 \alpha^j \Gamma_{2-j}}{[(\alpha^2 + \lambda_{1,n}^2)(\alpha^2 + \lambda_{2,n}^2)]},$$

$$\lambda_{1,n}^2 = \lambda_n^2 + \frac{1 + \mu_*}{c^2 h^2 \mu_*},$$

$$\lambda_{2,n}^2 = \lambda_n^2 + \frac{1}{c^2 h^2 \mu_*}, \quad (24)$$

$$\Gamma_0 = -\mathbf{I}, \quad \Gamma_1 = \lambda_n \mu_0 \mathbf{P},$$

$$\Gamma_2 = -q_0 \lambda_n^{-2} \mathbf{P}_1^{-1}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_*^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом формулы (20) получим соотношение для определения фундаментальной матрицы:

$$\Phi(r, s) = \int_0^\infty \alpha \mathbf{R}(r, \alpha) \mathbf{M}_{n\alpha}^{-1} \mathbf{K}(s, \alpha) d\alpha, \quad (25)$$

При этом элементы матрицы $\Phi^{ij}(r, s)$ вычисляются как

$$\begin{aligned} \Phi^{00}(r, s) &= (\Gamma_2^{00} - \tilde{\lambda}_n) \Phi_1(r, s), \\ \Phi^{01}(r, s) &= -\lambda_n \mu_0 \tilde{\lambda}_n \frac{\partial \Phi_0(r, s)}{\partial r}, \\ \Phi^{10}(r, s) &= -\lambda_n \mu_0 \tilde{\lambda}_n \frac{\partial \Phi_1(r, s)}{\partial s}, \\ \Phi^{11}(r, s) &= (\Gamma_2^{11} - \tilde{\lambda}_n) \Phi_0(r, s). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_i(r, s) &= (\lambda_{2,n} - \lambda_{1,n})^{-1} \times \\ &\times \begin{cases} I_i(r\lambda_{1,n})K_i(s\lambda_{1,n}) - I_i(r\lambda_{2,n})K_i(s\lambda_{2,n}), & r < s, \\ I_i(s\lambda_{1,n})K_i(r\lambda_{1,n}) - I_i(s\lambda_{2,n})K_i(r\lambda_{2,n}), & r > s; \end{cases} \end{aligned}$$

$I_i(z), K_i(z)$ ($i=0, 1$) – модифицированные функции Бесселя;

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{\lambda_{1,n}^2 + \lambda_{2,n}^2}{\lambda_{1,n}^2 - \lambda_{2,n}^2}.$$

Согласно формуле (18), построим базисные матрицы. Они должны удовлетворять следующей матричной краевой задаче [9]:

$$\begin{aligned} L[\Psi_i(r)] &= 0, \\ U_i[\Psi_j(r)] &= \begin{cases} \mathbf{I}, & i = j, \\ \mathbf{0}, & i \neq j, \end{cases} \quad (i, j = 0, 1). \end{aligned} \quad (27)$$

Для нахождения базисных матриц удобно предварительно построить фундаментальную матричную систему решений первого уравнения, входящего в систему (27). С помощью непосредственной проверки [9] убеждаемся, что матрица

$$\mathbf{Y}(r) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Omega} \alpha \mathbf{R}(r, \alpha) \mathbf{M}_{n\alpha}^{-1} d\alpha \quad (28)$$

является решением указанного однородного уравнения. Здесь Ω – контур, охватывающий все нули характеристического многочлена $(\alpha^2 + \lambda_{1,n}^2)(\alpha^2 + \lambda_{2,n}^2)$. Подставим выражение (22) для матрицы $\mathbf{M}_{n\alpha}^{-1}$ в формулу (28). Подсчитаем вычет в простом полюсе $\alpha = i\lambda_{1,n}$ (если взять

вычеты в остальных простых полюсах, получим линейно-зависимые решения). Это позволяет найти матрицу $\mathbf{Y}_0(r)$, определяющую решение, регулярное в нуле. Ее элементы запишутся так:

$$\begin{aligned} Y^{00}(r) &= I_1(\lambda_{1,n}r) \frac{\Gamma_2^{00}i - \lambda_{1,n}^2}{2(\lambda_{2,n} - \lambda_{1,n})}, \\ Y^{01}(r) &= I_1(\lambda_{1,n}r) \frac{-\lambda_n \lambda_{1,n} \mu_0 \mu_*^{-1}}{2(\lambda_{2,n} - \lambda_{1,n})}, \\ Y^{10}(r) &= I_0(\lambda_{1,n}r) \frac{i\lambda_n \mu_0}{2(\lambda_{2,n} - \lambda_{1,n})}, \\ Y^{11}(r) &= I_0(\lambda_{1,n}r) \frac{\Gamma_2^{11} + \lambda_{1,n}^2}{2(\lambda_{2,n} - \lambda_{1,n})}. \end{aligned} \quad (29)$$

Чтобы получить матричное решение $\mathbf{Y}_1(r)$, регулярное на бесконечности, нужно в формулах (29) заменить модифицированную функцию Бесселя первого рода на модифицированную функцию Бесселя второго рода. Построив фундаментальную матричную систему решений, определим базисные матрицы с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \Psi_0(r) &= \mathbf{Y}_0(r) \tilde{\mathbf{A}}_0 + \mathbf{Y}_1(r) \tilde{\mathbf{B}}_0, \\ \Psi_1(r) &= \mathbf{Y}_0(r) \tilde{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{Y}_1(r) \tilde{\mathbf{B}}_1. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь матрицы-коэффициенты $\tilde{\mathbf{A}}_i, \tilde{\mathbf{B}}_i, i=0, 1$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_0 &= -U_1^{-1}[\mathbf{Y}_0]U_1[\mathbf{Y}_1]L_0^{-1}, & \tilde{\mathbf{B}}_0 &= L_0^{-1}, \\ \tilde{\mathbf{A}}_1 &= -U_0^{-1}[\mathbf{Y}_0]U_0[\mathbf{Y}_1]L_1^{-1}, & \tilde{\mathbf{B}}_1 &= L_1^{-1}, \\ L_0 &= -U_0[\mathbf{Y}_0]U_1^{-1}[\mathbf{Y}_0]U_1[\mathbf{Y}_1] + U_0[\mathbf{Y}_1], \\ L_1 &= -U_1[\mathbf{Y}_0]U_0^{-1}[\mathbf{Y}_0]U_0[\mathbf{Y}_1] + U_1[\mathbf{Y}_1]. \end{aligned}$$

Нахождение базисных матриц завершает процедуру построения матричной функции Грина. С учетом формул обращения (11) решение исходной задачи запишем в виде

$$\begin{aligned} u_j(r, z) &= 2l^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} * \cos \lambda_n z \times \\ &\times \left[\int_{a_0}^{a_1} (G_{nj}^{00}(r, s)F_{nj}^0(s) + G_{nj}^{01}(r, s)F_{nj}^1(s)) ds + \right. \\ &\left. + (\Psi_0^{00}(r) + \Psi_0^{01}(r) + \Psi_1^{00}(r) + \Psi_1^{01}(r))\gamma^0 \right], \end{aligned} \quad (31)$$

$$w_j(r, z) = 2l^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \lambda_n z \times \left[\int_{a_0}^{a_1} (G_{nj}^{10}(r, s)F_{nj}^0(s) + G_{nj}^{11}(r, s)F_{nj}^1(s)) ds + (\Psi_0^{10}(r) + \Psi_0^{11}(r) + \Psi_1^{10}(r) + \Psi_1^{11}(r))\gamma^1 \right] \quad (32)$$

Этими соотношениями определяются значения компонентов вектора смещений материальных точек цилиндра в последовательные моменты времени. Полученное решение соответствует случаю заданного кинематического возбуждения торца $z=l$.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕИЗВЕСТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ СМЕЩЕНИЯ

По формулам (31) и (32) можно найти неизвестное решение задачи, если известна величина смещений торца цилиндра в соответствующие моменты времени U_{0j} . Для определения последней используется соотношение (4), в котором вторая производная по времени заменяется согласно формуле (5), а значения напряжений выражаются через значения смещений (31), (32) в соответствии с законом Гука:

$$\sigma_{zj}(r, z) = \frac{\lambda}{2} u_j(r, z) + u_j'(r, z) + \mu_* w_j'(r, z). \quad (33)$$

Полученные решения содержат условно сходящиеся ряды. Поэтому перед подстановкой выражений (31), (32) в соотношение (33) следует сначала выделить слабо сходящиеся части указанных рядов. Для этого используется асимптотическое разложение функций Бесселя для больших значений порядка [11], что дает возможность исследовать поведение элементов матричной функции Грина и базисных матриц при $n \rightarrow \infty$. Проведем это исследование на примере формулы (31).

Ряд, входящий в выражение, разбивается на два слагаемых:

$$\sum_{n=0}^{\infty} * \cos \lambda_n z u_{nj}(r) = \sum_{n=0}^K * \cos \lambda_n z u_{nj}(r) + \sum_{n=K+1}^{\infty} \cos \lambda_n z u_{nj}(r). \quad (34)$$

В последнем из них член ряда $u_{nj}(r)$ заменяется его асимптотическим представлением при больших значениях n $\tilde{u}_{nj}(r)$. Величина K тут выбирается таким образом, чтобы в асимптотическом представлении можно было ограничиться главным

членом. К выражению (34) добавляется и вычитается конечная сумма $\sum_{n=0}^K * \cos \lambda_n z \tilde{u}_{nj}(r)$, после чего решение представляется в виде

$$u_j(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \lambda_n z \tilde{u}_{nj}(r) + \sum_{n=0}^K * \cos \lambda_n z (u_{nj}(r) - \tilde{u}_{nj}(r)). \quad (35)$$

Ряд, входящий в соотношение (35), можно просуммировать, используя формулу из [12]. В результате получаем новое приближенное представление решения (31), отличающееся от исходного тем меньше, чем большим выбирается значение K :

$$u_j(r, z) = \int_{a_0}^{a_1} \left(-\frac{(a_1 r - a_0) l^3 U_{0j} \mu_0}{a_1 2\pi^3 \mu_* \sqrt{a_1 s}} + \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu_*} \right) \frac{a_1 r - a_0}{\sqrt{a_1 s}} \frac{(1 - \exp(c(r-s)))}{\mu_* c^2 h^2} \right) \times \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\sin(\pi z l^{-1})}{\cos z + \text{ch}(s-r)} ds + \sum_{n=0}^K \cos \lambda_n z (u_{nj}(r) - \tilde{u}_{nj}(r)). \quad (36)$$

Проведя аналогичную процедуру с формулой (32), получим выражение для определения смещений $w_j(r, z)$:

$$w_j(r, z) = \int_{a_0}^{a_1} \left(-\frac{a_0 \mu_* l^3 U_{0j} r}{2\pi^3 c^2 h^2 a_1 \sqrt{a_1 s}} + \left(1 - \frac{1}{\mu_*} \right) \mu_0 \frac{a_0 r}{\sqrt{a_1 s}} \frac{\exp(c(r-s))}{\mu_*} \right) \times \frac{z \partial^2}{\partial z^2} \frac{\cos(\pi z l^{-1})}{\sin z + \text{sh}(s-r)} ds + \sum_{n=0}^K \sin \lambda_n z (w_{nj}(r) - \tilde{w}_{nj}(r)). \quad (37)$$

Подставив выражения (36) и (37) в формулу (4), найдем соотношение для определения величины смещения U_{0j} . Таким образом, волновое поле цилиндра определено.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В качестве упругого материала цилиндра выбиралась сталь. На рисунках приведены кривые, иллюстрирующие зависимость величины σ_r/P

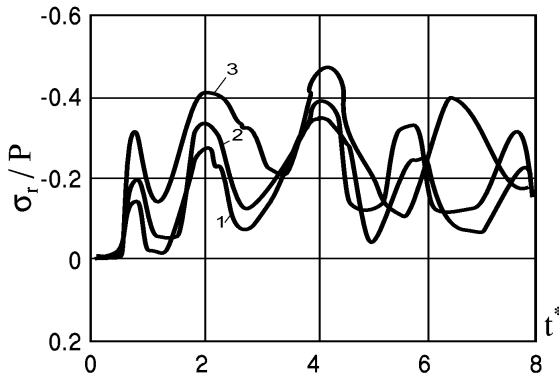


Рис. 2. Зависимость величины σ_r/P от безразмерного времени $t^* = tc/l$ ($l/a_0 = 0.1$)

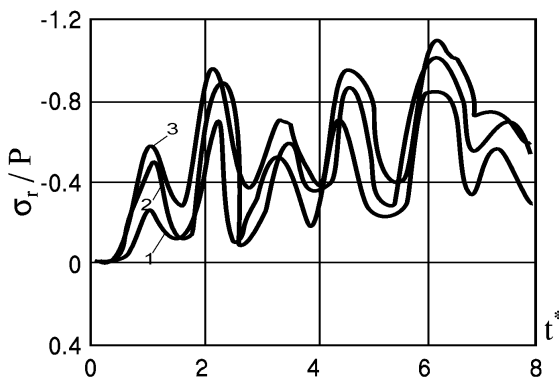


Рис. 3. Зависимость величины σ_r/P от безразмерного времени $t^* = tc/l$ ($l/a_0 = 0.5$)

от размеров цилиндра и безразмерного времени tc/l для точки внутри цилиндра с координатами $((a_0 + a_1)/2, l/2)$. Кривая 1 соответствует $a_1 = 2a_0$, кривая 2 – $a_1 = 5a_0$, кривая 3 – $a_1 = 10a_0$ при относительном удлинении $l/a_0 = 0.1$ (рис. 2) и $l/a_0 = 0.5$ (рис. 3).

Как видно из графиков, абсолютные значения напряжений уменьшаются с увеличением его толщины. Это естественно, поскольку в более толстом цилиндре приложенная нагрузка перераспределяется на большую площадь поперечного сечения. Заметим, что при этом толщина цилиндра мало влияет на моменты наступления пиковых значений смещений во времени. Последнее обстоятельство указывает на то, что при заданном способе возбуждения колебаний основная энергия движения сосредотачивается в нижней форме колебаний. Ее собственная частота достаточно точно определяется по стержневой модели и не зависит от толщины цилиндра.

С увеличением длины цилиндра увеличиваются

абсолютные значения напряжений, момент наступления пиков значений отстоит по времени дальше, кроме того, на графике наблюдается большее количество максимумов и минимумов. Заданная точность вычислений рядов и интегралов 10^{-5} сохраняется до момента времени $t^* = 15$. При дальнейшем увеличении времени происходит рост ошибки округления. Это вызвано необходимостью сохранения большего числа членов ряда в соотношениях (31), (32).

ВЫВОДЫ

1. Получено эффективное приближенное решение задачи об определении напряженного состояния упругого цилиндра под действием осесимметричной нестационарной нагрузки для небольших значений времени при выполнении условий первой основной задачи теории упругости на цилиндрической поверхности.
2. Определена зависимость величины напряжений цилиндра от его геометрических размеров и времени. Определены границы применимости предложенного подхода при изучении процесса во времени.
3. Предложенный подход в принципе позволяет решить задачу для случая полого конуса, усеченного сферическими поверхностями, когда на сферических поверхностях конуса заданы условия первой основной задачи теории упругости, а на конической поверхности – условия скользящей заделки.

1. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. – М.: Высшая школа, 1975. – 526 с.
2. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины // Акуст. ж. – 1978. – 6, N 24. – С. 861–866.
3. Мелешко В. В. Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины // Динамика и прочность машин. – 1979. – Вып. 29. – С. 82–86.
4. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко В. А. Дифракция упругих волн. – К.: Наукова думка, 1978. – 307 с.
5. Попов Г. Я. Точные решения некоторых смешанных задач несвязанной термоупругости для конечного кругового полого цилиндра с вырезом вдоль образующей // ПММ. – 2002. – 66, N 4. – С. 703–713.
6. Янютин Е. Г., Янчевский И. В. Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций. – Харьков: Изд-во ХГАДТУ, 2001. – 184 с.

7. Янютин Е. Г., Дзюбак Л. П. Нестационарные деформационные процессы в многослойном цилиндре // Прикл. мех.– 1999.– **35**, N 8.– С. 10–17.
8. Новацкий В. Теория упругости.– К.: Наукова думка, 1978.– 307 с.
9. Попов Г. Я., Абдыманапов С. А., Ефимов В. В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач.– Алматы: Руан, 1999.– 112 с.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.– М.: Гостехтеориздат, 1954.– 491 с.
11. Бэйтмен Г., Эрдейи Ф. Высшие трансцендентные функции: том 2.– М.: Наука, 1954.– 258 с.
12. Прудников Г. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды.– М.: Наука, 1981.– 797 с.