

УДК 534.3+611.539

# ГЕНЕРАЦІЯ ЗВУКУ ОБМЕЖЕНОЮ ОБЛАСТЮ ЗБУРЕНОЇ ТЕЧІЇ В ЖОРСТКОСТІННОМУ КАНАЛІ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ. ЧАСТИНА 1. ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ

А. О. БОРИСЮК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 11.09.2003

Розроблено загальну теорію генерації звуку обмеженою областю збуреної течії в нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу і встановлено кількісний зв'язок між характеристиками згенерованого звукового поля та параметрами каналу й потоку. В ній область збуреної течії моделювалась розподіленими квадрупольними й дипольними джерелами, характеристики яких вважалися відомими. Розглянуті випадки рівномірного та нерівномірного розподілу джерел. Показано, що згенерована звукова енергія не спадає зі збільшенням відстані від джерел і дорівнює сумі енергій акустичних мод каналу. При цьому енергія окремої моди складається з трьох доданків. Перший з них являє собою енергію, згенеровану об'ємними квадрупольними, другий – енергію, випромінєну поверхневими дипольними, а третій зумовлений взаємодією квадрупольних і дипольних. Для різних значень числа Маха течії проведено аналіз порядку цих доданків і отримано відповідні спрощені вирази для звукової енергії.

Разработана общая теория генерации звука ограниченной областью возмущенного течения в бесконечном прямом жесткостенном канале кругового поперечного сечения и установлена количественная связь между характеристиками генерируемого звукового поля и параметрами канала и течения. В ней область возмущенного течения моделировалась распределенными квадрупольными и дипольными источниками, характеристики которых считались известными. Рассмотрены случаи равномерного и неравномерного распределения источников. Установлено, что генерируемая звуковая энергия не убывает с возрастанием расстояния от источников и равна сумме энергий акустических мод канала. При этом энергия отдельной моды состоит из трех слагаемых. Первое из них представляет собой энергию, генерируемую объемными квадрупольными, второе – энергию, излучаемую поверхностными дипольными, а третье обусловлено взаимодействием квадрупольных и дипольных. Для разных значений числа Маха течения проведен анализ порядка этих слагаемых и получены соответствующие упрощенные выражения для звуковой энергии.

A general theory of noise generation by a limited region of a disturbed flow in an infinite straight rigid channel with circular cross-section is developed, and quantitative relationships between the characteristics of generated noise field and the parameters of the channel and the flow are found. A disturbed flow is modeled by the distributed quadruple and dipole sources, the characteristics of which are assumed to be known. The cases of uniform and non-uniform distribution of the sources are considered. It is shown that the noise energy does not decrease as the distance from the sources increases, and is equal to a sum of energies of acoustic modes of the channel. As to the energy of the acoustic mode, it consists of three parts. The first part is the energy generated by the volume quadruples, the second one results from the surface dipoles, and the third is conditioned by interaction of the quadruples and the dipoles. The analysis of orders of magnitudes of these parts is carried out for different values of the flow Mach number, and corresponding simplified expressions for the acoustic power are obtained.

## ВСТУП

Дослідження течій в каналах різних геометрій і розмірів є актуальною задачею в автомобіле-літакобудуванні, нафтогазовій промисловості, архітектурі, медицині тощо. При цьому значний інтерес становлять збурення течій і випромінювання звуку в місцях локальних неоднорідностей каналів (налипання на стінках, зварювальних швів, стенозів та ін.). Це зумовлено тим, що у згаданих випадках акустичне поле містить дані про параметри конструкції та середовища в зоні виникнення шумів, а отже існує можливість розроблення неінвазивних методів знаходження таких місць за аналізом зареєстрованого звукового сигналу [1–6].

Зазначені методи можуть бути розроблені лише за наявності теорій, які, адекватно описуючи реологію, гідродинаміку і акустику течій в око-

лі неоднорідності каналу, встановлювали б кількісний зв'язок між характеристиками потоку й згенерованого звукового поля. Однак, як показує аналіз наукової літератури, досконалих теорій такого роду поки що немає. Існують лише роботи, в яких вивчаються поля гідродинамічних параметрів течій за локальними звуженнями труб (див. [2–4, 7–10] і відповідні посилання в них), або ж згенеровані наперед заданими джерелами акустичні поля в жорсткостінних каналах (див., наприклад, [11–13]). Тут при вивченні акустичних полів джерела моделюються лише об'ємними квадрупольними. Водночас, вплив стінки каналу, яка спричиняє появу поверхневих дипольних [11, 14], не враховується.

Дана робота присвячена розробленню загальної теорії генерації звуку обмеженою областю збуреної течії в нескінченному прямому жорсткостінно-

му каналі кругового поперечного перерізу і встановленню кількісного зв'язку між характеристиками згенерованого звукового поля та параметрами каналу й течії в ньому. При цьому область збуреної течії моделюється розподіленими квадрупольними і дипольними гідродинамічними джерелами, характеристики яких вважаються відомими. Розглядаються випадки як рівномірного, так і нерівномірного їхнього розподілу.

Стаття складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку літератури і додатку. В першому розділі сформульовано задачу і записано відповідні рівняння та граничні умови. В другому розділі дано розв'язок задачі і проведено його аналіз. Далі сформульовані висновки проведеного дослідження, наведені списки цитованої літератури і прийнятих позначень.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається нескінченний прямий жорстко-стінний канал кругового поперечного перерізу радіуса  $a$  (див. рисунок), в якому тече рідина густини  $\rho$  і в'язкості  $\nu$ . Вважається, що осереднена осьова швидкість дорівнює  $U$ , а течія характеризується малим числом Маха  $M$  ( $M = U/c_0 \ll 1$ , де  $c_0$  – швидкість звуку в незбуреній рідині). В скінченному об'ємі  $V_0$  течія збурена і створює в каналі акустичне поле. Необхідно знайти це поле і встановити кількісний зв'язок між його характеристиками та параметрами каналу й потоку.

Згідно з класичною теорією Лайтхіла [11] можна без втрати загальності вважати, що в'язкість рідини відіграє суттєву роль лише в області збуреної течії, а згенерований звук поширюється в ідеальному стисливому середовищі. За цих умов шукаємо акустичне поле описується рівнянням Лайтхіла [11], в якому права частина містить як об'ємні квадрупольні джерела  $\partial^2 T_{ij} / \partial y_i \partial y_j$ , так і зумовлені наявністю стінки поверхневі дипольні джерела  $\partial F_i / \partial y_i$ :

$$\frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho_a = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_i}, \quad (1)$$

$$0 < r < a, \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad |z| < \infty.$$

Граничними умовами вважаємо відсутність радіальної швидкості на стінці каналу

$$\left. \frac{\partial p_a}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (2)$$

і умову випромінювання в нескінченність.

У співвідношеннях (1) і (2) введені такі позначення:  $\rho_a$  і  $p_a$  – відповідно акустичні флуктуації густини і тиску, які зв'язані співвідношенням [12, 13]

$$p_a = c_0^2 \rho_a; \quad (3)$$

$T_{ij} \approx \rho u_i u_j$  і  $F_i = n_j (\tau_{ij} + p \delta_{ij})$  – напруження Лайтхіла та  $i$ -та компонента прикладених до стінки каналу сил на одиницю площі ( $T_{ij}$  та  $F_i$  зникають відповідно за межами об'єму  $V_0$  і поверхні  $S_0$ , яка його оточує);  $\tau_{ij} = (2/3) \mu \epsilon_{kk} \delta_{ij} - 2 \mu \epsilon_{ij}$  – дотичні напруження;  $\epsilon_{ij} = (\partial u_i / \partial y_j + \partial u_j / \partial y_i) / 2$  – тензор швидкостей деформації;  $n_j - j$ -та компонента зовнішньої нормалі до стінки каналу;  $u_i - i$ -та компонента швидкості рідини;  $\mu = \rho \nu$  – її динамічна в'язкість;  $p$  – тиск;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Крім цього, тут і далі передбачається підсумовування по індексах, що повторюються.

У циліндричній системі координат  $(r, \phi, z)$ , яка вводиться для розв'язування задачі, оператор Лапласа і права частина рівняння (1) мають такий вигляд [15, 16]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} &= \frac{\partial^2 \rho u_r^2}{\partial r_0^2} + \frac{\partial^2 \rho u_z^2}{\partial z_0^2} + \left( \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi_0^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial r_0} \right) \rho u_\phi^2 + \left( \frac{\partial}{\partial r_0} \left( \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \phi_0} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{r_0} \frac{\partial}{\partial \phi_0} \left( \frac{\partial}{\partial r_0} \right) - \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial}{\partial \phi_0} \right) \rho u_r u_\phi + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 \rho u_r u_z}{\partial r_0 \partial z_0} + \left( \frac{1}{r_0} \frac{\partial^2}{\partial \phi_0 \partial z_0} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \phi_0} \right) \right) \rho u_\phi u_z, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_i} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0 F_r}{\partial r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi_0} + \frac{\partial F_z}{\partial z_0},$$

де  $(r_0, \phi_0, z_0)$  – координати джерела.

### 2. АКУСТИЧНЕ ПОЛЕ

#### 2.1. Акустичні густина і тиск

Розв'язування граничної задачі (1), (2) починається з того, що права частина рівняння (1) формально переписується у вигляді суми об'ємних

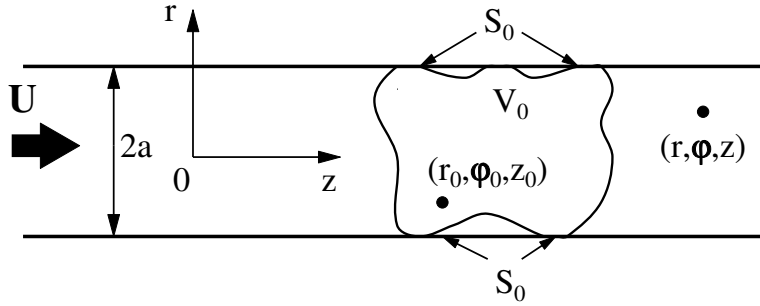


Рисунок. Геометрія задачі

джерел:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_{ij}(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_i(\vec{r}_{0a}, t_0)}{\partial y_i} = \\ = \frac{\partial^2 T_{ij}(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_i(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i} \delta(r_0 - a), \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\vec{r}_0 = (r_0, \phi_0, z_0) \in V_0$ ;  $\vec{r}_{0a} = \vec{r}_0|_{r_0=a} = (a, \phi_0, z_0) \in S_0$  (див. рисунок);  $t_0$  – пов'язаний з джерелом час;  $\delta(\cdot)$  – дельта-функція Дірака. Тоді, згідно з теоремою Гріна [14, 15], акустичні флуктуації густини  $\rho_a$  в каналі визначаються сумою внесків джерел (5) в об'ємі  $V_0$  і флуктуацій густини  $\rho_a$  на поверхні  $S_0$ , яка цей об'єм оточує:

$$\begin{aligned} \rho_a(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iiint_{V_0} \left( \frac{\partial^2 T_{ij}(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} + \right. \\ \left. + \frac{\partial F_i(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i} \delta(r_0 - a) \right) G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) dV_0(\vec{r}_0) + \\ + c_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iint_{S_0} \left( G(\vec{r}, t; \vec{r}_{0a}, t_0) \frac{\partial \rho_a(\vec{r}_{0a}, t_0)}{\partial r_0} - \right. \\ \left. - \rho_a(\vec{r}_{0a}, t_0) \frac{\partial G(\vec{r}, t; \vec{r}_{0a}, t_0)}{\partial r_0} \right) dS_0(\vec{r}_{0a}), \end{aligned} \quad (6)$$

$$dV_0(\vec{r}_0) = r_0 dr_0 d\phi_0 dz_0,$$

$$dS_0(\vec{r}_{0a}) = a d\phi_0 dz_0.$$

Функція ж Гріна  $G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0)$  має задовольняти неоднорідне хвильове рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 G = -\frac{1}{r} \delta(r - r_0) \times \\ \times \delta(\phi - \phi_0) \delta(z - z_0) \delta(t - t_0), \end{aligned} \quad (7)$$

граничну умову

$$\left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (8)$$

і умову випромінювання в нескінченність.

Внаслідок рівності нулеві нормальних похідних густини  $\rho_a$  і функції Гріна  $G$  на стінці каналу (див. формули (2), (3) і (8)) поверхневий інтеграл у співвідношенні (6) зникає, і воно набуває вигляду

$$\begin{aligned} \rho_a(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iiint_{V_0} \left( \frac{\partial^2 T_{ij}(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} + \right. \\ \left. + \frac{\partial F_i(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i} \delta(r_0 - a) \right) G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) dV_0(\vec{r}_0). \end{aligned}$$

Переходячи в другому доданку, який визначає внесок поверхневих диполів, від об'ємного інтегралу до поверхневого, отримуємо загальний вираз для акустичних флуктуацій густини в каналі:

$$\begin{aligned} \rho_a(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iiint_{V_0} \frac{\partial^2 T_{ij}(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} \times \\ \times G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) dV_0(\vec{r}_0) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iint_{S_0} \frac{\partial F_i(\vec{r}_{0a}, t_0)}{\partial y_i} \times \\ \times G(\vec{r}, t; \vec{r}_{0a}, t_0) dS_0(\vec{r}_{0a}). \end{aligned} \quad (9)$$

Тоді згенерований акустичний тиск  $p_a$  знаходиться за формулою (3).

Співвідношення (3) і (9) встановлюють кількісний зв'язок між об'ємними квадрупольми  $\partial^2 T_{ij}/\partial y_i \partial y_j$  і поверхневими дипольми  $\partial F_i/\partial y_i$  та параметрами згенерованого ними акустичного поля в каналі. Крім цього, формули (3) і (9) містять інформацію про геометрію каналу й областей розподілу гідродинамічних джерел  $\partial^2 T_{ij}/\partial y_i \partial y_j$  та  $\partial F_i/\partial y_i$ . На цьому етапі єдиним невідомим членом у цих співвідношеннях залишається функція Гріна  $G$ . Її побудові присвячено наступний підрозділ.

**2.2. Функція Гріна**

Функцію Гріна  $G$  будемо, застосовуючи до системи рівнянь (7), (8) часове перетворення Фур'є:

$$\tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) e^{i\omega(t-t_0)} d(t-t_0),$$

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega$$

і розкладаючи функцію  $\tilde{G}$  в ряд по акустичних модах каналу  $\Psi_{nm}(r, \phi) = J_n(\alpha_{nm}r) \cos(n\phi)$ :

$$\tilde{G} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{G}_{nm} \Psi_{nm}(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{G}_{nm} J_n(\alpha_{nm}r) \cos(n\phi). \tag{10}$$

Тут  $J_n$  – циліндричні функції Беселя першого роду порядку  $n$ ;  $\alpha_{nm} = \zeta_{nm}/a$  – радіальні хвильові числа;  $\zeta_{nm}$  – корені рівняння  $J'_n(\zeta_{nm}) = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$

Підставивши ряд (10) в образи Фур'є рівняння (7):

$$\nabla^2 \tilde{G} + k_0^2 \tilde{G} = \frac{1}{2\pi c_0^2 r} \delta(r-r_0) \delta(\phi-\phi_0) \delta(z-z_0),$$

( $k_0 = \omega/c_0$ ) і граничної умови (8):  $\partial \tilde{G} / \partial r|_{r=a} = 0$ , а також врахувавши ортогональність акустичних мод каналу  $\Psi_{nm}(r, \phi)$

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \Psi_{nm}(r, \phi) \Psi_{sq}(r, \phi) r dr d\phi = \begin{cases} \|\Psi_{nm}\|^2, & (n, m) = (s, q), \\ 0, & (n, m) \neq (s, q) \end{cases}$$

і виконавши умову випромінювання в нескінченність, знаходимо невідомі коефіцієнти  $\tilde{G}_{nm}$ . Після цього співвідношення (10) набуває вигляду

$$\tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) = -\frac{i}{4\pi c_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}(r_0, \phi_0)}{\|\Psi_{nm}\|^2} \times \Psi_{nm}(r, \phi) \frac{e^{ik_{nm}|z-z_0|}}{k_{nm}}, \tag{11}$$

в якому  $k_{nm} = \sqrt{k_0^2 - \alpha_{nm}^2}$  – осьові хвильові числа. Квадрат норми моди  $\|\Psi_{nm}\|^2$  дається таким вира-

зом:

$$\|\Psi_{nm}\|^2 = \int_0^a \int_0^{2\pi} \Psi_{nm}^2(r, \phi) r dr d\phi = \begin{cases} \pi a^2 J_0^2(\alpha_{0m}a), & n = 0, \\ (\pi a^2/2) J_n^2(\alpha_{nm}a) [1 - (n^2/\alpha_{nm}^2 a^2)], & n \geq 1. \end{cases}$$

Формула (11) є функцією Гріна рівняння Гельмгольца для нескінченного прямого жорсткостінного каналу кругового поперечного перерізу. Застосування оберненого перетворення Фур'є до неї дає шукану функцію Гріна хвильового рівняння:

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = -\frac{i}{4\pi c_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}(r_0, \phi_0)}{\|\Psi_{nm}\|^2} \Psi_{nm}(r, \phi) \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_{nm}|z-z_0|}}{k_{nm}} e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega, \tag{12}$$

яка використовується у виразах (3) і (9) для акустичних флуктуацій тиску і густини.

У співвідношеннях (11) і (12) модуль різниці осьових координат  $|z-z_0|$  визначає випадки генерації звуку вниз і вгору за течією від джерела, розташованого у поперечному перерізі каналу  $z=z_0$ . Положення ж частоти  $\omega$  відносно критичних частот каналу

$$\omega_{nm} = c_0 \alpha_{nm}$$

визначає (через хвильові числа  $k_{nm}$  в експоненті  $\exp(ik_{nm}|z-z_0|)$ ) випадки однорідних

$$\omega \geq \omega_{nm}, \quad e^{ik_{nm}|z-z_0|} = e^{i|k_{nm}||z-z_0|}$$

і неоднорідних

$$0 < \omega < \omega_{nm}, \quad e^{ik_{nm}|z-z_0|} = e^{-|k_{nm}||z-z_0|}$$

хвиль, а відтак межі інтегрування по частоті у формулах (3), (9) і (12).

Аналіз співвідношень (11) і (12) показує, що функції Гріна  $\tilde{G}$  і  $G$  є симетричними відносно площини розташування джерела  $z=z_0$ . Ця симетрія є наслідком дещо ідеалізованої постановки задачі, в якій ідеться про існування обмеженої області збуреної течії, але нічого не сказано про причини її виникнення. В реальних ситуаціях така область може виникнути в разі наявності локального звуження каналу (зварювального шва, стенозу тощо). Врахування такої неоднорідності при

постановці відповідної початково-граничної задачі (через урахування відбиття звуку від неоднорідності та його проходження крізь неоднорідності в обидві сторони) має спричинити значне ускладнення її розв'язку і виразів для відповідних функцій Гріна. При цьому симетрію відносно  $z = z_0$  буде втрачено. Слід, однак, зазначити, що побудова точних виразів функцій Гріна для задач такого роду – дуже складна проблема. Більш логічним і реалістичним видається шлях прийняття фізично-допустимих спрощувальних припущень, які б дозволили й надалі застосовувати вирази (11) та (12) для знаходження акустичного поля в окремих регіонах каналу (наприклад, далеко вниз або вгору за течією від локального звуження).

### 2.3. Акустична енергія

Акустична енергія, яка проходить крізь поперечний переріз каналу  $z = \text{const}$  на частоті  $\omega$ , визначається зі співвідношення [5, 11]

$$P(\omega)\delta(\omega - \omega') = \int_0^a \int_0^{2\pi} \langle \tilde{p}_a^*(r, \phi, z, \omega) \tilde{v}_{az}(r, \phi, z, \omega') \rangle r dr d\phi, \quad (13)$$

в якому дужки  $\langle \cdot \rangle$  означають операцію осереднення по множині реалізацій; символ \* вказує на комплексне спряження;  $\tilde{p}_a$  і  $\tilde{v}_{az}$  – образи Фур'є акустичного тиску (3) і осової компоненти акустичної швидкості відповідно:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_a(\vec{r}, \omega) = & -\frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}(r, \phi)}{\|\Psi_{nm}\|^2} \frac{1}{k_{nm}} \times \\ & \times \left[ \iiint_{V_0} \frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}(\vec{r}_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} \Psi_{nm}(r_0, \phi_0) \times \right. \\ & \times e^{ik_{nm}|z-z_0|} dV_0(\vec{r}_0) + \iint_{S_0} \frac{\partial \tilde{F}_i(\vec{r}_{0a}, \omega)}{\partial y_i} \times \\ & \left. \times \Psi_{nm}(a, \phi_0) e^{ik_{nm}|z-z_0|} dS_0(\vec{r}_{0a}) \right]; \\ \tilde{v}_{az} = & \frac{1}{i\rho_0\omega} \frac{\partial \tilde{p}_a}{\partial z}; \end{aligned} \quad (14)$$

$\rho_0$  – густина незбуреної рідини;  $\partial^2 \tilde{T}_{ij} / \partial y_i \partial y_j$  і  $\partial \tilde{F}_i / \partial y_i$  – образи Фур'є квадрупольних і дипольних джерел відповідно.

Підстановка співвідношень (14) у формулу (13) дає загальний вираз для акустичної енергії  $P(\omega)$ , згенерованої обмеженою областю збуреної течії для випадку *нерівномірного* розподілу гідродинамічних джерел в об'ємі  $V_0$  і на поверхні  $S_0$ , що його

оточує:

$$\begin{aligned} P(\omega) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{nm}(\omega) = \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\|\Psi_{nm}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \times \\ & \times \left[ \iiint_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \iiint_{V_0} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}'_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k \partial y'_l} \times \right. \\ & \times \Psi_{nm}(r_0, \phi_0) \Psi_{nm}(r'_0, \phi'_0) \times \\ & \times e^{-\text{sign}(z-z_0)ik_{nm}(z'_0-z_0)} dV_0(\vec{r}'_0) + \\ & + \iint_{S_0} dS_0(\vec{r}_{0a}) \iint_{S_0} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\vec{r}_{0a}, \vec{r}'_{0a}, \omega)}{\partial y_i \partial y'_k} \times \\ & \times \Psi_{nm}(a, \phi_0) \Psi_{nm}(a, \phi'_0) \times \\ & \times e^{-\text{sign}(z-z_0)ik_{nm}(z'_0-z_0)} dS_0(\vec{r}'_{0a}) + \\ & \left. + 2\text{Re} \left( \iint_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \iint_{S_0} \frac{\partial^3 S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}'_{0a}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k} \times \right. \right. \\ & \times \Psi_{nm}(r_0, \phi_0) \Psi_{nm}(a, \phi'_0) \times \\ & \left. \left. \times e^{-\text{sign}(z-z_0)ik_{nm}(z'_0-z_0)} dS_0(\vec{r}'_{0a}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Тут функція знаку  $\text{sign}(z-z_0)$  приймає позитивні значення, якщо оцінки енергії проводяться вниз за течією від розташованих у поперечному перерізі каналу  $z = z_0$  джерел, і негативні, якщо вгору за течією від них. Крім цього, у формулі (15) через  $S_{ijkl}^T$  і  $S_{ik}^F$  позначені взаємні спектри образів Фур'є напружень Лайтхіла  $T_{ij}$  і компонент прикладених до стінки каналу сил на одиницю площі  $F_k$  відповідно:

$$S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}'_0, \omega) \delta(\omega - \omega') = \langle \tilde{T}_{ij}^*(\vec{r}_0, \omega) \tilde{T}_{kl}(\vec{r}'_0, \omega') \rangle,$$

$$S_{ik}^F(\vec{r}_{0a}, \vec{r}'_{0a}, \omega) \delta(\omega - \omega') = \langle \tilde{F}_i^*(\vec{r}_{0a}, \omega) \tilde{F}_k(\vec{r}'_{0a}, \omega') \rangle;$$

$S_{ijk}^{TF}$  – взаємний спектр образів Фур'є напружень Лайтхіла  $T_{ij}$  і сил  $F_k$ :

$$S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}'_{0a}, \omega) \delta(\omega - \omega') = \langle \tilde{T}_{ij}^*(\vec{r}_0, \omega) \tilde{F}_k(\vec{r}'_{0a}, \omega') \rangle;$$

$\text{Re}(\cdot)$  означає дійсну частину вказаної в дужках комплексної величини.

Якщо гідродинамічні джерела звуку розподілені *рівномірно* у відповідних областях, формула (15) спрощується за рахунок спрощення виразів для

спектрів  $S_{ijkl}^T$ ,  $S_{ik}^F$  і  $S_{ijk}^{TF}$ , які стають функціями лише відстані між джерелами і частоти [11]:

$$S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}'_0, \omega) = S_{ijkl}^T(\vec{\xi}, \omega),$$

$$S_{ik}^F(\vec{r}'_{0a}, \vec{r}'_{0a}, \omega) = S_{ik}^F(\vec{\xi}_{aa}, \omega),$$

$$S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}'_{0a}, \omega) = S_{ijk}^{TF}(\vec{\xi}_a, \omega).$$

Тут  $\vec{\xi} = \vec{r}'_0 - \vec{r}_0$ ;  $\vec{\xi}_{aa} = \vec{r}'_{0a} - \vec{r}_{0a}$ ;  $\vec{\xi}_a = \vec{r}'_{0a} - \vec{r}_0$ .

Аналіз співвідношення (15) показує, що акустична енергія  $P$  не залежить від осової координати  $z$ , а отже, не спадає зі збільшенням відстані від джерел. Це природно для жорсткостінного каналу, де немає втрат енергії. Окрім того,  $P$  дорівнює сумі енергій  $P_{nm}$  акустичних мод каналу  $\Psi_{nm}$ . При цьому енергія окремої моди  $P_{nm}$  складається з трьох доданків:

- 1) звукової енергії, згенерованої об'ємними квадрупольями  $\partial^2 T_{ij} / \partial y_i \partial y_j$ ;
- 2) енергії, випроміненої поверхневими дипольями  $\partial F_i / \partial y_i$ ;
- 3) енергії, зумовленої взаємним внеском в акустичне поле квадрупольів і диполів (тобто їхньою взаємодією).

Подальший аналіз формули (15) показує, що для різних діапазонів числа Маха  $M$  доля цих доданків у загальній енергії акустичного поля є різною. Справді, інтенсивність акустичного випромінювання квадрупольів пропорційна п'ятому степеневі числа Маха ( $\sim M^5 U^3$ ), а диполів – його кубу ( $\sim M^3 U^3$ ) [6, 11]. Тому енергія окремої моди каналу  $P_{nm}$  підпорядковується закономірності

$$P_{nm} \sim M^5 U^3 + M^3 U^3 + M^4 U^3.$$

Якщо число Маха попадає в діапазон, де домінують поверхневі диполі ( $M^3 \gg M^4 \gg M^5$ ), то порядок величини  $P_{nm}$  визначається як

$$P_{nm} \sim M^3 U^3$$

і вираз (15) значно спрощується:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{nm}(\omega) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4 \|\Psi_{nm}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \iint_{S_0} dS_0(\vec{r}_{0a}) \times \\ &\times \iint_{S_0} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\vec{r}'_{0a}, \vec{r}'_{0a}, \omega)}{\partial y_i \partial y'_k} \Psi_{nm}(a, \phi_0) \times \\ &\times \Psi_{nm}(a, \phi'_0) e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} (z'_0 - z_0)} dS_0(\vec{r}'_{0a}). \end{aligned} \quad (16)$$

Коли число Маха таке, що у повному звуковому полі домінують об'ємні квадруполі ( $M^5 \gg M^4 \gg M^3$ ), енергію окремої акустичної моди каналу  $P_{nm}$  можна представити як

$$P_{nm} \sim M^5 U^3.$$

У цьому випадку замість співвідношення (16) маємо

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{nm}(\omega) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4 \|\Psi_{nm}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \iiint_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \times \\ &\times \iint_{V_0} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}'_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k \partial y'_l} \Psi_{nm}(r_0, \phi_0) \times \\ &\times \Psi_{nm}(r'_0, \phi'_0) e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} (z'_0 - z_0)} dV_0(\vec{r}'_0). \end{aligned} \quad (17)$$

Якщо ж внески диполів і квадрупольів мають один порядок, згенерована ними акустична енергія на частоті  $\omega$  визначається формулою (15).

## ВИСНОВКИ

Розроблено загальну теорію генерації звуку обмеженою областю збуреної течії в нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. В ній збурена течія моделюється розподіленими квадрупольними й дипольними гідродинамічними джерелами, характеристики яких вважаються відомими. Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити такі висновки.

1. Для розглянутого каналу методом нормальних мод побудовано функції Гріна рівняння Гельмгольца (формула (11)) і хвильового рівняння (формула (12)).
2. За допомогою метода функцій Гріна отримано загальний розв'язок задачі (формули (3), (9) і (15)), який встановлює кількісний зв'язок між характеристиками звукового поля (акустичними тиском, густиною і енергією) та параметрами каналу і джерел звуку при їхньому рівномірному або нерівномірному розподілі.
3. Встановлено, що енергія згенерованого акустичного поля не спадає зі збільшенням відстані від джерел.
4. Показано, що звукова енергія дорівнює сумі енергій акустичних мод каналу (формула (15)). При цьому енергія окремої моди

складається з трьох доданків. Перший з них являє собою енергію, згенеровану об'ємними квадруполями, другий – енергію, випромінену поверхневими диполями, а третій зумовлений взаємодією квадруполів і диполів.

5. Для різних значень числа Маха проведено аналіз порядку згаданих доданків і отримано відповідні спрощені вирази для акустичної енергії (формули (16) і (17)).

1. Lees R. S., Dewey C. F., Jr. Phonoangiography: a new noninvasive diagnostic method for studying arterial disease // Proc. Nat. Acad. Sci.– 1970.– **67**.– P. 935–942.
2. Young D. F. Fluid mechanics of arterial stenosis // J. Biomech. Engng.– 1979.– **101**.– P. 157–175.
3. Миролубов С. Г. Гидродинамика стеноза // Современ. пробл. биомех.– 1983.– **1**.– С. 73–136.
4. Berger S. A., Jou L.-D. Flows in stenotic vessels // Ann. Rev. Fluid Mech.– 2000.– **32**.– P. 347–382.
5. Borisyuk A. O. Noise field in the human chest due to turbulent flow in a larger blood vessel // Flow, Turbul. & Combust.– 1999.– **61**.– P. 269–284.
6. Borisyuk A. O. Experimental study of noise produced by steady flow through a simulated vascular stenosis // J. Sound Vib.– 2002.– **256**.– P. 475–498.
7. Clark C. The fluid mechanics of aortic stenosis. 1. Theory and steady flow experiments // J. Biomech.– 1976.– **9**.– P. 521–528.
8. Abdallah S. A., Hwang N. H. C. Arterial stenosis murmurs: an analysis of flow and pressure fields // J. Acoust. Soc. Amer.– 1988.– **83**, N 1.– P. 318–334.
9. Борисюк А. О. Експериментальне дослідження пристінного тиску в трубі за стенозом // Акуст. вісн.– 2002.– **5**, N 1.– С. 13–20.
10. Борисюк А. О. Експериментальне дослідження пристінного тиску в трубі за стенозом із ексцентриситетом // Акуст. вісн.– 2002.– **5**, N 2.– С. 3–12.
11. Blake W. K. (ed.) Mechanics of flow-induced sound and vibration (in 2 vols).– New York: Academic Press, 1986.– 974 p.
12. Davies H. G., Ffowcs Williams J. E. Aerodynamic sound generation in a pipe // J. Fluid Mech.– 1968.– **32**.– P. 765–778.
13. Hardin J. C., Pope D. S. Sound generation by a stenosis in a pipe // AIAA Journal.– 1992.– **30**.– P. 312–317.
14. Голдстейн М. Е. Аэроакустика.– М.: Машиностроение, 1981.– 294 с.
15. Morse P. M., Feshbach H. Methods of theoretical physics: vol. 1.– New York: McGraw-Hill, 1953.– 997 p.

16. Ffowcs Williams J. E., Hall L. H. Aerodynamic sound generation by turbulent flow in the vicinity of a scattering half plane // J. Fluid Mech.– 1970.– **40**.– P. 657–670.

#### ДОДАТОК. УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$a$  – радіус поперечного перерізу каналу;  
 $U$  – осереднена осьова швидкість течії в каналі;  
 $c_0$  – швидкість звуку в незбуреній рідині;  
 $M$  – число Маха;  
 $\rho$  – густина рідини;  
 $\nu$  – кінематична в'язкість рідини;  
 $\mu$  – динамічна в'язкість рідини;  
 $p$  – тиск у рідині;  
 $T_{ij}$  – напруження Лайтхіла;  
 $F_i$  –  $i$ -та компонента прикладених до стінки каналу сил на одиницю площі;  
 $\tau_{ij}$  – дотичні напруження;  
 $\epsilon_{ij}$  – тензор швидкостей деформації;  
 $n_j$  –  $j$ -та компонента зовнішньої нормалі до стінки каналу;  
 $u_i$  –  $i$ -та компонента швидкості рідини;  
 $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  
 $\partial^2 T_{ij} / \partial y_i \partial y_j$  – об'ємні квадруполі;  
 $\partial F_i / \partial y_i$  – поверхневі диполі;  
 $V_0$  – об'єм збуреної течії;  
 $S_0$  – поверхня, що його оточує;  
 $(\vec{r}, t) = (r, \phi, z, t)$  – просторово-часова точка поля;  
 $(\vec{r}_0, t_0) = (r_0, \phi_0, z_0, t_0)$  – просторово-часова точка джерела;  
 $\delta(\cdot)$  – дельта-функція Дірака;  
 $\rho_a$  – акустичні флуктуації густини;  
 $p_a$  – акустичні флуктуації тиску;  
 $v_{az}$  – осьова компонента акустичної швидкості;  
 $P(\omega)$  – акустична енергія;  
 $\omega$  – кругова частота;  
 $G$  – функція Гріна;  
 $\Psi_{nm}$  – акустичні моди каналу;  
 $\alpha_{nm}$  – радіальні хвильові числа;  
 $k_{nm}$  – осьові хвильові числа;  
 $k_0$  – акустичне хвильове число;  
 $\omega_{nm}$  – критичні частоти каналу;  
 $S_{ijkl}^T$  – взаємні спектри образів Фур'є напружень Лайтхіла;  
 $S_{ik}^F$  – взаємні спектри образів Фур'є сил  $F_k$ ;  
 $S_{ijk}^{TF}$  – взаємний спектр образів Фур'є напружень Лайтхіла  $T_{ij}$  і сил  $F_k$ .