

УДК 622.235.525.2

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА В ЖИДКОСТИ ПРИ ВВОДЕ ЭНЕРГИИ В СФЕРИЧЕСКИЙ КАНАЛ В ВИДЕ ПОВТОРЯЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

А. И. ВОВЧЕНКО*, В. Г. КОВАЛЕВ**, В. А. ПОЗДЕЕВ**

*Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, Николаев

**Европейский университет финансов, информационных систем, менеджмента и бизнеса,
Николаевское обособленное подразделение

Получено 30.08.2001 ◊ 29.05.2003

Рассмотрена внешняя гидродинамическая задача электроразряда в воде при вводе энергии в сферический канал в виде ряда последовательных импульсов. Выполнена математическая постановка соответствующей начально-краевой задачи с подвижной границей для волнового уравнения. Аналитическое решение задачи получено методом нелинейного преобразования времени. Показано влияние наложенных малых пульсаций на линейный закон роста радиуса канала. Выявлены особенности гидродинамических характеристик течения жидкости, обусловленного электроразрядом.

Розглянуто зовнішню гідродинамічну задачу електричного розряду у воді при введенні енергії у сферичний канал у вигляді послідовності імпульсів. Виконано математичну постановку відповідної початково-граничної задачі з рухомою границею для хвильового рівняння. Аналітичний розв'язок задачі отримано методом нелінійного перетворення часу. Показаний вплив накладених малих пульсацій на лінійний закон зростання радіуса каналу. З'ясовані особливості гідродинамічних характеристик течії рідини, зумовленої електричним розрядом.

An external hydrodynamic problem of an underwater electric discharge at the energy input in a spherical channel in the pulse repetition mode is considered. A mathematical approach for the corresponding initial-boundary problem with moving boundary for the wave equation is developed. The analytical solution for the problem is obtained by the method of non-linear time transform. The influence of superimposed small pulsations on the linear function of the channel's radius growth is shown. Peculiarities of the electric discharge characteristic are revealed.

ВВЕДЕНИЕ

Электрический разряд в жидкости имеет ряд практических приложений. Он применяется при получении и исследовании плотной низкотемпературной плазмы, в гидроакустических системах, технологических установках по импульсной обработке материалов и т.п. Получение желаемых энергетических и гидродинамических характеристик течения жидкости, обусловленного разрядом, достигается, в частности, за счет управления законом ввода энергии в канал. Обычно используется одиночный импульсный разряд. При этом изменение радиуса канала во времени описывается плавно растущей функцией, а волна давления имеет вид одиночного импульса. Теория формирования таких полей давления исследована достаточно полно в [1–3].

Для получения функции давления в виде последовательности импульсов электрическую энергию в канал следует вводить также в виде ряда последовательных импульсов. Так, в работах [4–6] теоретически показано, что путем изменения параметров разрядной цепи можно получить закон ввода энергии достаточно сложного вида (в том чис-

ле и в виде последовательности импульсов). В [7] описано экспериментальное подтверждение этого факта. При этом временная зависимость радиуса паро-газовой полости близка к линейной, но может иметь изломы. С математической точки зрения, решение внешней гидродинамической задачи разряда сводится к решению линейного волнового уравнения с соответствующими начальными условиями и условием на подвижной границе.

Гидродинамические характеристики течения, вызванного электровзрывом в жидкости при вводе энергии в цилиндрический канал в виде последовательности двух импульсов, были получены в [8–11] при решении внешней гидродинамической задачи аналитическими методами. В данной работе будет рассмотрена волновая задача для сферического канала.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ВНЕШНЕЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Задача о высоковольтном электрическом разряде в жидкости включает в себя как внутреннюю задачу формирования плазменной полости в ка-

нале, так и внешнюю гидродинамическую задачу формирования поля давления, обусловленного расширением канала [1]. Система уравнений для описания внутренней задачи сводится к соотношению вида

$$F_1(R(t), V_R(t), P_R(t), N(t)) = 0, \quad (1)$$

где t – время; $R(t)$ – закон изменения радиуса канала (полости) во времени; $V_R(t)$ – скорость расширения полости, которая для непроницаемой границы равна производной от функции радиуса; $N(t)$ – закон ввода мощности в канал разряда; $P_R(t)$ – функция давления в канале.

Решение внешней гидродинамической задачи о волновом движении жидкости, вызванном расширением канала разряда, описывается соотношением

$$F_2(R(t), V_R(t), P_R(t)) = 0. \quad (2)$$

Совместное решение уравнений (1) и (2) дает возможность определить кинематические и динамические характеристики разряда в жидкости, а затем найти (в некотором приближении) вызванное волновое поле давления в жидкости.

Отметим, что введение ряда допущений на этапе математической постановки внутренней задачи (в частности, при выводе уравнения баланса энергии) приводит при интегрировании системы (1), (2) к сглаживанию искомых функций $R(t)$ и $P_R(t)$. Это является несущественным для инженерных расчетов. В то же время, некоторые особенности кинематических характеристик канала можно учесть при аналитическом решении внешней гидродинамической задачи. Так, в [7] экспериментально получено, что функция $R(t)$ может иметь излом, и, следовательно, функция $V_R(t)$ – конечный разрыв. С точки зрения математической физики представляется важным определить влияние особенностей функций, описывающих поведение подвижной границы сферического канала, на функцию давления.

Кроме того, решение внешней гидродинамической задачи имеет самостоятельное методологическое значение при диагностике плазмы канала по измеренным его кинематическим характеристикам.

Приведенные рассуждения позволяют свести исходную постановку к рассмотрению только внешней гидродинамической задачи определения волнового поля давления, вызванного расширением канала по известному (заданному) закону. В данном исследовании жидкость считаем идеальной сжимаемой, а ее движение – потенциальным с потенциалом скоростей Φ . Ограничиваясь рас-

смотрением разряда малой мощности, будем полагать, что скорость расширения канала мала, по сравнению со скоростью звука в жидкости c_0 . Принятые допущения позволяют для описания движения жидкости, вызванного расширением сферического канала, воспользоваться линейным волновым уравнением с заданным кинематическим условием на подвижной границе контакта канал – жидкость. Корректность математической постановки данной задачи рассмотрена в [12–14].

Таким образом, внешняя гидродинамическая задача сводится к следующей начально-краевой задаче математической физики с подвижными границами:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \\ V = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{при } R_0 \leq r \leq r_0 + c_0 t,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = V_R(t) = \frac{\partial R}{\partial t} \quad \text{при } r = R(t), \quad (4)$$

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad r = R_0 \quad (5)$$

$$\text{в момент времени } t = 0.$$

Поле давлений $P(r, t)$ определим по известному потенциалу скоростей $\Phi(r, t)$ в соответствии с [2, 3]:

$$P(r, t) = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{при } r \gg R_0, \quad (6)$$

$$P(r, t) = -\rho_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2c_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right) \quad (7)$$

$$\text{при } r = R(t),$$

где ρ_0 – невозмущенная плотность жидкости.

Отметим, что в задаче о расширении цилиндрической полости с нулевым начальным радиусом и малой скоростью расширения [14] показано, что потенциал скоростей $\Phi(r, t)$ может быть найден из линейного волнового уравнения (3), а давление в ближней к полости зоне – с учетом квадратичной составляющей из интеграла Коши – Лагранжа:

$$P(r, t) = -\rho_0 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

В работе [12] интеграл вида (8) было предложено использовать для любой геометрии волнового

движения жидкости. Вместе с тем, в [14] отмечалось, что в случае плоской волны сжимаемостью в интеграле Коши – Лагранжа пренебрегать нельзя и применение соотношения (8) некорректно. Эффекты сжимаемости могут быть учтены при записи поля в виде (6), (7).

Обоснуем правильность использования соотношения (8) в нашем случае. Так, в дальней зоне $r \gg R_0$ и при $t \sim 0$, где $R(t) \sim R_0$, течение является квазиплоским. Волновые процессы описываются соотношением:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

и, следовательно, получаем уравнение (6). При нулевом начальном радиусе полости $R(0) = R_0 = 0$ вторая квадратичная составляющая в формуле (7) мала по сравнению с первой и, по сути, уравнение (7) переходит в равенство (8). Таким образом, начально-краевая задача с подвижной границей контакта полость – жидкость (3) – (8) является корректной математической моделью внешней гидродинамической задачи электрического разряда в жидкости, где функция $R(t)$ полагается известной из эксперимента или заданной аналитически [15].

2. ОБЩИЙ ВИД РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для решения начально-краевой задачи (3) – (7) получим решение волнового уравнения (3), удовлетворяющее условию на подвижной границе (4). После нахождения потенциала скоростей найдем поле давления в соответствии с интегралами (6), (7). Его удобно представить в безразмерном виде:

$$\bar{P}(r, t) = \begin{cases} \bar{P}_1(r, t) & \text{при } r \gg R_0, \\ \bar{P}_1 + \bar{P}_{21} + \bar{P}_{22} & \text{при } r \sim R(t), \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{где } \bar{P} = \frac{P}{\rho_0 c_0^2}; \quad \bar{P}_1 = -\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t};$$

$$\bar{P}_{21} = -\frac{\bar{V}^2}{2}; \quad \bar{V} = \frac{V}{c_0}; \quad \bar{P}_{22} = \frac{\bar{P}_1^2}{2}.$$

Заметим, что для плоских волн

$$\bar{P}_1 = \bar{V}, \quad \bar{P}_{21} + \bar{P}_{22} = 0, \quad \bar{P} = \bar{P}_1. \quad (10)$$

В (9) \bar{P}_1 – главная часть давления, квадратичные добавки могут быть найдены при необходимости уточнить решение.

Решение уравнения (3) в области $R(t) \leq r \leq c_0 t$ с учетом нулевых начальных условий и условия излучения на бесконечности имеет вид [16]

$$\Phi(r, t) = \frac{f(t_0)}{r}, \quad (11)$$

где

$$t_0 = t - \frac{r - R_0}{c_0}.$$

Используя представление для потенциала скоростей (11), с помощью метода нелинейного преобразования времени [17, 18] получим выражение для функции давления на стенке канала [17]:

$$\begin{aligned} \bar{P}_R(t) = & \bar{V}_R(t) - \\ & - \frac{c_0}{R(t)} \exp\left(-c_0 \int_0^t \frac{d\tau}{R(\tau)}\right) \times \\ & \times \int_0^t \bar{V}_r(\tau) \left(1 - \frac{1}{c_0} \frac{dR(\tau)}{d\tau}\right) \times \\ & \times \exp\left(c_0 \int_0^\tau \frac{d\tau}{R(\tau)}\right) d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Нетрудно показать, что связь между функцией давления на стенке канала $P_R(t)$ и функцией давления в фиксированной точке волнового поля P_r в общем случае имеет вид [17, 19]:

$$P_R(t) = \frac{r}{R(t)} P_r\left(t - \frac{R(t) - R_0}{c_0}\right). \quad (13)$$

3. ЛИНЕЙНЫЙ РОСТ РАДИУСА ПОЛОСТИ С НАЛОЖЕНИЕМ ПУЛЬСАЦИЙ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ

Отметим, что в выражения (2), (3) входит только главная часть давления. Анализ экспериментально полученных кривых $R(t)$ в [7] дает возможность достаточно точно аппроксимировать их представлением [11]:

$$\begin{aligned} R(t) &= R_0 + V_0 t + R_1 |\sin \omega_0 t|, \\ V_R(t) &= V_0 + V_1 \cos \omega_0 (t - t_m), \end{aligned} \quad (14)$$

$$t_m = mT_1, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где R_0 – радиус канала при $t=0$; V_0 – скорость линейного роста радиуса; R_1 – амплитуда пульсаций; ω_0 – круговая частота, связанная с периодом пульсаций T_1 соотношением $\omega_0 = 2\pi/T_1$. Так как амплитуда пульсаций мала, ($|R_1/R(t)| \ll 1$), то

условие на подвижной границе (4) с учетом выражения (14) принимает вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = V_0 + V_1 \cos \omega_0(t - t_m) \quad (15)$$

при $r = R(t) = R_0 + V_0 t$.

Давление на стенке полости (12) с учетом последнего соотношения представим в виде

$$\bar{P}_R(t) = \bar{P}_{R1} + \bar{P}_{R2}(t), \quad (16)$$

$$\bar{P}_{R1}(t) = \frac{2M_0^2}{1 + M_0} \times \left[1 + \frac{1 - M_0}{M_0} (1 + \bar{t})^{-1} (1 + 1/M_0) \right], \quad (17)$$

$$\bar{P}_{R2}(t) = M_1 \left[\cos \bar{\omega}_0 (\bar{t} - \bar{t}_m) - \frac{1 - M_0}{M_0} (1 + \bar{t})^{-1} (1 + 1/M_0) I(t) \right], \quad (18)$$

где

$$I(t) = \int_0^{\bar{t}} \cos \bar{\omega}_0 (\bar{t} - \bar{t}_m) (1 + \bar{t})^{1/M_0} dt;$$

$$M_0 = \frac{V_0}{c_0}; \quad M_1 = \frac{V_1}{c_0};$$

$$\bar{t} = \frac{V_0 t}{R_0}; \quad \bar{\omega}_0 = \frac{\omega_0 R_0}{V_0}.$$

Как следует из системы (16)–(18), первая составляющая давления \bar{P}_{R1} совпадает с выражением для давления при постоянной скорости расширения полости [17], а вторая составляющая \bar{P}_{R2} отражает влияние пульсаций малой амплитуды. Заметим, что принцип суперпозиции в данном случае не выполняется.

Обозначим через A_{11}, A_{12} амплитуды импульсов давления на стенке канала, а через A_{21}, A_{22} – амплитуды соответствующих импульсов в точке волновой зоны. На основании выражений (16)–(18) получим

$$A_{11} = \bar{P}_R(0) = \bar{P}_{R1}(0) + \bar{P}_{R2}(0) = M_0 + M_1, \\ A_{12} = \bar{P}_R(T_1 + 0) - \bar{P}_R(T_1 - 0) = \bar{P}_{R1}(T_1) + \bar{P}_{R2}(T_1), \quad (19)$$

где

$$\bar{P}_{R2}(T_1) = \bar{P}_{R2}(T_1 + 0) - \bar{P}_{R2}(T_1 - 0).$$

Так как в нашем случае $\bar{T}_1 \gg 1$, то

$$\bar{P}_{R1}(T_1) \approx 2M_0^2/(1 + M_0), \quad \bar{P}_{R2}(T_1) \approx 2M_1.$$

Таким образом, окончательно

$$A_{12} \approx 2M_1. \quad (20)$$

Обозначая отношение амплитуд на стенке полости через $K_1 = A_{11}/A_{12}$, а в волновой зоне – через $K_2 = A_{21}/A_{22}$, из соотношения (13) получаем:

$$K_2 \approx K_1 (1 + \bar{T}_1)^{-1}, \quad (21)$$

где

$$\bar{T}_1 = \frac{T_1 V_0}{R_0}; \quad K_1 \approx \frac{M_0 + M_1}{2M_1}.$$

Как следует из выражения (21) отношение амплитуд импульсов давления в точке волновой зоны всегда меньше, чем отношение соответствующих амплитуд импульсов на стенке канала. Если $K_1 > 1$, но $(1 + \bar{T}_1) > K_1$, то $K_2 < 1$. Это совпадает с результатами, приведенными в литературе [10, 11].

Полученное выражение для функций давления (13) позволяет сделать еще одно интересное заключение: с учетом уравнения (15) из него следует

$$P_R(t) = \frac{r}{R(0)} \frac{P_r(t(1 - M_0))}{(1 + \bar{t})^{1/2}}.$$

Полагая в этом равенстве $t = T_1$, приходим к соотношению, связывающему периоды пульсаций в волновой зоне поля T_2 и на стенке канала T_1 :

$$\bar{T}_2 \approx \bar{T}_1 (1 - M_0). \quad (22)$$

Данная зависимость означает, что период следования импульсов давления в волновой зоне уменьшается, и, следовательно, частота пульсаций давления увеличивается, по сравнению с соответствующими величинами на стенке канала. Результат (22) является следствием эффекта Доплера.

На рисунке приведена графическая иллюстрация решения задачи (13)–(22) при следующих значениях входных параметров:

$$M_0 = 3M_1 = 0.1, \quad \bar{T}_1 = 5.0.$$

Величины, характеризующие поле в волновой зоне, имеют значения

$$K_1 = 2, \quad K_2 = 1/3, \quad \bar{T}_2 = 0.9\bar{T}_1 = 4.5.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко сформулируем основные результаты и выводы по работе.

1. Выполнена постановка начально-краевой задачи, моделирующей электрический разряд в жидкости при вводе энергии в канал в виде последовательности импульсов. На подвижной границе, движущейся с постоянной скоростью, задается кинематическое условие в виде разрывной функции скорости расширения канала.
2. В рамках приближенного описания сферических волн с помощью метода нелинейного преобразования времени получено аналитическое решение поставленной задачи. В явном виде выведены соотношения между кинематическими характеристиками канала и давлением на его стенке и в волновой зоне. Это позволило провести качественный анализ гидродинамических процессов без использования численных методов.
3. Показано, что период следования импульсов давления в фиксированной точке волновой зоны уменьшается, по сравнению с периодом следования импульсов на границе канала. Это является следствием эффекта Доплера. Данный результат служит подтверждением корректности используемой модели.
4. Функции давления на стенке канала и в волновой зоне получены в виде последовательности импульсов. Найдены условия, при которых убывание амплитуд импульсов на контактной границе приводит к росту амплитуд в волновой зоне.
5. Приведенные результаты открывают новые возможности для управления гидродинамическими характеристиками течения в сферическом канале, обусловленного электрическим разрядом в жидкости.

1. Наугольных К. А. Электрические разряды в воде.– М.: Наука, 1971.– 155 с.
2. Поздеев В. А. Прикладная гидродинамика электрического разряда в жидкости.– К.: Наук. думка, 1980.– 192 с.
3. Бескаравайный Н. М., Дыхта В. В., Ковалев В. Г., Тульский В. В. Прикладная гидродинамика электровзрыва.– К.: Наук. думка, 1992.– 200 с.

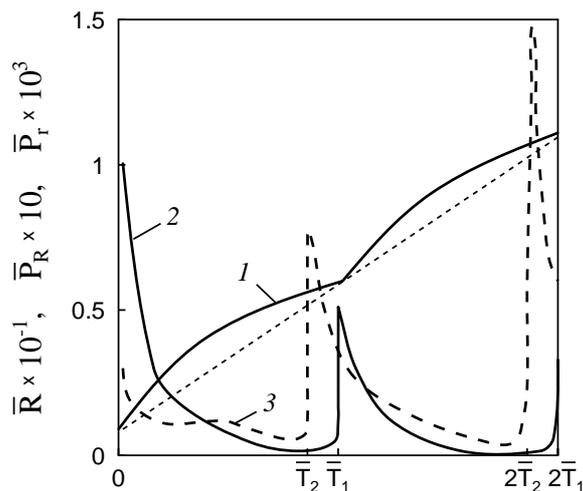


Рисунок. Кинематические и динамические характеристики сферического канала разряда:

- 1 – закон изменения радиуса канала,
- 2 – пульсации давления на стенке канала,
- 3 – пульсации давления в точке поля

4. Иванов А. В., Вовченко А. И., Богаченко С. А. О возможности управления электрическими и гидродинамическими процессами подводных искровых разрядов // Техн. электродинам.– 1983.– N 6.– С. 15–20.
5. Вовченко А. И. Исследование характеристик подводного искрового разряда при параметрическом изменении электрических характеристик разрядной цепи // Техн. электродинам.– 1983.– N 1.– С. 13–16.
6. Вовченко А. И. и др. Взрывные процессы превращения электрической и химической энергий.– К.: Наук. думка, 1987.– 128 с.
7. Вовченко А. И., Поздеев В. А., Штемпель И. А. Параметры подводного электрического разряда в условиях сложного энерговода // Техн. электродинам.– 1985.– N 3.– С. 16–19.
8. Крутиков В. С., Лопатнев А. Г. Особенности гидродинамических характеристик импульсных процессов в сжимаемой среде при многократном (пульсирующем) законе ввода энергии // Письма в ЖТФ.– 1999.– 25, N 14.– С. 34–41.
9. Vovchenko A. I., Kovalev V. G., Pozdeev V. A. Behavioural peculiarities of complex input // Final Prog. and Abstr. 11-th IEEE Int. Pulsed Power Conf.– Baltimore, Maryland, USA, June 29–July 2, 1997.– P. 429.
10. Вовченко А. К., Ковалев В. Г., Поздеев В. А. Особенности гидродинамических характеристик высоковольтного электрического разряда в жидкости при двухимпульсном законе ввода мощности // Письма в ЖТФ.– 1997.– 23, N 9.– С. 58–61.
11. Вовченко А. И., Ковалев В. Г., Поздеев В. А. Гидродинамические характеристики электрического разряда в жидкости при вводе энергии в канал в виде повторяющихся импульсов // Прикл. гидромех.– 2001.– 75, N 3.– С. 19–25.

12. Крутиков В. С. О границах применимости решений волнового уравнения в областях с подвижными проницаемыми границами в задачах импульсной гидродинамики и акустики // Акуст. ж.– 1996.– **42**, N 4.– С. 534–540.
13. Поздеев В. А. Влияние подвижности возмущающей границы и нелинейности среды на волновое поле, вызванное нестационарным движением плоского поршня // Акуст. ж.– 1995.– **41**, N 1.– С. 162–165.
14. Слепян Л. И. Об уравнениях динамики осесимметричной полости в идеальной сжимаемой жидкости // Докл. АН СССР.– 1985.– **282**, N 4.– С. 809–813.
15. Ковалев В. Г., Поздеев В. А. Об определении профиля волны, генерируемой расширяющейся полостью в жидкости // Акуст. вісн.– 2000.– **3**, N 3.– С. 56–61.
16. Тюлин В. Н. Введение в теорию излучения и рассеяния звука.– М.: Наука, 1976.– 256 с.
17. Поздеев В. А. Нестационарные волновые поля в областях с подвижными границами.– К.: Наук. думка, 1992.– 244 с.
18. Поздеев В. А. Метод нелинейного преобразования времени в краевых задачах теории потенциала с подвижными границами для линейного волнового уравнения // ПММ.– 1991.– N 6.– С. 1055–1058.
19. Крутиков В. С. Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами.– К.: Наук. думка, 1985.– 128 с.