

УДК 532.66:532.528

# РЕЗОНАНСНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ЛОКАЛЬНОЇ НЕОДНОРІДНОСТІ ПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПРИ ПОВЗДОВЖНІХ ТА ЗГИННИХ КОЛИВАННЯХ СТЕРЖНЯ

М. Є. ЮРЧЕНКО

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Одержано 3.10.2002

Досліджено неоднорідність пружних властивостей стержня у випадку повздовжніх і згинних коливань при заданих граничних умовах (пряма й обернена задачі). Вважається, що густина матеріалу стала по всьому об'єму стержня, його розміри задані, а неоднорідність пружних властивостей, яку необхідно визначити, локалізована в околі деякого поперечного перерізу стержня. При розв'язку обмеженої оберненої крайової задачі вважаються відомими значення  $10 \div 20$  власних частот повздовжніх чи згинних коливань стержня з неоднорідністю. Для побудови розв'язку обернених задач використовується метод наближення функції неоднорідності скінченною сумою членів ряду Фур'є (метод низькочастотної томографії). Знайдені чисельні значення спектрів власних частот повздовжніх і згинних коливань стержня з неоднорідністю. Шляхом співставлення частотних спектрів коливань однорідного стержня й частот власних коливань для стержня з заданим дефектом отримано систему алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів ряду Фур'є.

Исследована неоднородность упругих свойств стержня при заданных граничных условиях в случае продольных и изгибных колебаний (прямая и обратная задачи). Предполагается, что плотность материала постоянна во всем объеме стержня, его размеры заданы, а неоднородность упругих свойств, которую необходимо определить, локализована в окрестности некоторого поперечного сечения стержня. При решении ограниченной обратной краевой задачи считаются известными значения  $10 \div 20$  собственных частот продольных или изгибных колебаний стержня с неоднородностью. Для построения решения обратных задач используется метод приближения функции неоднородности конечной суммой членов ряда Фурье (метод низкочастотной томографии). Найдены численные значения спектров собственных частот продольных и изгибных колебаний стержня с неоднородностью. Путем сопоставления частотных спектров колебаний однородного стержня и данных для частот собственных колебаний для стержня с заданным дефектом получена система алгебраических уравнений для определения коэффициентов ряда Фурье.

Inhomogeneity of elastic properties of a bar under given boundary conditions is studied in case of longitudinal and bending vibrations (direct and inverse problems). It is supposed that the material's density is a constant in the whole domain of the bar, having the given dimensions, and the inhomogeneity of elastic properties to be determined is located in the vicinity of some cross-section of the bar. When solving the inverse problem we assume values of  $10 \div 20$  eigenfrequencies of longitudinal or bending vibrations to be known. To derive the solution of the inverse problems a method of approximation of the inhomogeneity function by the finite sum of terms of the Fourier series (method of the low-frequency tomography) is used. Numerical values of eigen spectra for longitudinal and bending vibration of the bar with the inhomogeneity are found. The system of algebraic equations for determination of the coefficients of the Fourier series is obtained by comparison of the frequency spectra of vibrations for a homogeneous bar and the data on eigenfrequencies of the bar having the the given defect.

## ВСТУП

Відомо, що власні (резонансні) частоти коливань пружних тіл повністю визначаються їхньою геометричною формою й механічними властивостями. Теоретично, за умови, що наявні експериментальні засоби для визначення нескінченної множини власних частот і відповідних їм нормальних мод коливань ідеально пружного тіла, з'являється можливість побудови розв'язків обернених крайових задач теорії коливань, тобто задач по визначенню геометрії тіла з відомою густиною й пружними властивостями за умови відомих (теоретично чи експериментально визначених) власних частот і форм коливань. Окрім того, спектральні методи дозволяють визначати фізичні властивості тіл заданої геометрії.

Слід відзначити, що обернені задачі теорії коливань пружних тіл не достатньо повно висвітлені у літературі. Дослідження обернених задач для поперечних коливань струни детально проводились відомими математиками: М. Г. Крейном, В. О. Марченком, І. М. Гельфандом, Б. М. Левітаном [1–4] та ін. У роботах зазначених авторів математично строго розв'язано задачу про визначення густини неоднорідної струни, якщо відомий її повний спектр частот коливань. На жаль, згадані методи не розповсюджувались на обернені задачі коливань пружних тіл, тобто на системи рівнянь в частинних похідних.

В роботі [5] розглянуто задачу про визначення жорсткості балки за відомими частотами власних коливань, а в [6] – задачу про визначення малих змін геометричних параметрів пружних тіл за да-

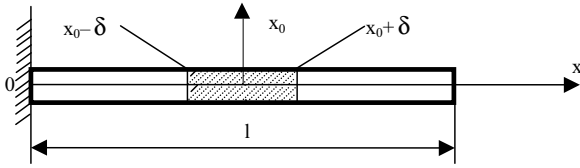


Рис. 1. Схема стержня довжиною  $l$  з неоднорідністю модуля пружності в локальній області  $2\delta$ .  
Випадок повздовжніх коливань

ними змінами спектра частот власних коливань. Методом малого параметра останню задачу зведено до розв'язання проблеми моментів.

Оскільки для більшості реальних пружних тіл резонансні коливання збуджуються лише на декількох найнижчих частотах власного спектру, і лише для високочастотних матеріалів типу кварцу можна спостерігати резонансні стани на декількох сотнях власних частот коливань, то фізично коректною слід вважати обмежену постановку обернених задач [7–11]. Для побудови розв'язку обмежених обернених задач необхідно мати додаткову інформацію про об'єкт дослідження, а саме, про розташування дефекта і його розміри. Задачі такого типу досліджувались в роботах [12, 13] методом низькочастотної томографії. Аналогічний підхід (наближення функцій скінченною кількістю членів ряду Фур'є) для визначення неоднорідності пружних властивостей стержня використовується і в даній статті. Слід, однак, зауважити, що, на відміну від [12], початкові коефіцієнти ряду Фур'є як з парними, так і з непарними номерами визначаються шляхом іншого вибору власних функцій для розкладу неоднорідності.

Як приклад обмеженої оберненої крайової задачі теорії коливань буде наведено розв'язок задачі про визначення неоднорідності пружних властивостей стержня. Вважається, що густина матеріалу стала по всьому об'єму стержня, його геометричні розміри задані, а неоднорідність пружних властивостей, яку необхідно визначити, локалізована в околі деякого поперечного перерізу стержня. Необхідно визначити місце розташування та розміри зони неоднорідності. Щодо вхідних даних, то відомими будемо вважати значення  $10 \div 20$  власних частот повздовжніх чи згинних коливань стержня з неоднорідністю.

## 1. ПОВЗДОВЖНІ КОЛИВАННЯ СТЕРЖНЯ З ЗАДАНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ. ПРЯМА ЗАДАЧА

### 1.1. Повздовжні коливання стержня з неоднорідністю. Точний розв'язок

Нехай в пружному стержні довжиною  $l$ , який має сталий поперечний переріз, на відстані  $x_0$  від жорстко закріпленого кінця  $x=0$  існує локалізована область довжиною  $2\delta$ , модуль пружності в якій відрізняється на певну сталу величину від модуля пружності  $E_0$  за її межами (рис. 1). У цьому випадку пружні властивості стержня описуються кусково-неперервною функцією осової координати  $x$ :

$$\frac{E(x)}{E_0} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < x_0 - \delta, \\ 1 + \varepsilon, & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \\ 1, & x_0 + \delta < x \leq l, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\varepsilon > 0$ . Густина матеріалу стержня вважається сталою по всьому об'єму:  $\rho = \text{const}$ .

Задача про власні коливання стержня з неоднорідністю зводиться до інтегрування узагальненого рівняння відносно функції зміщення точок стержня  $u(x, t)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

при нульових граничних умовах

$$u \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (3)$$

На власних модах коливань переміщення й напруження будуть гармонічними функціями часу. Тому переміщення точок стержня представимо у вигляді

$$u(x, t) = \widehat{u}(x) e^{i\omega t}. \quad (4)$$

Після підстановки співвідношення (4) в рівняння (2) з урахуванням залежності (1) одержимо

$$\frac{d}{dx} \left[ \begin{pmatrix} 1, & 0 \leq x < x_0 - \delta \\ 1 + \varepsilon, & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \\ 1, & x_0 + \delta < x \leq x_0 + \delta \end{pmatrix} \frac{d\widehat{u}}{dx} \right] + \quad (5)$$

$$+ \lambda^2 \widehat{u} = 0,$$

$$\text{де } \lambda = \frac{\omega}{c}; \quad c = \sqrt{\frac{E_0}{\rho}}. \quad (6)$$

Для амплітудної функції  $\widehat{u}$  маємо граничні умови типу (3):

$$\widehat{u} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (7)$$

З форми запису рівняння (5) випливає очевидний висновок, що поза локальною областю неоднорідності ( $0 \leq x < x_0 - \delta$ ;  $x_0 + \delta < x \leq l$ ) амплітудні функції (відповідно  $\widehat{u}^{(1)}$  і  $\widehat{u}^{(3)}$ ) визначаються з розв'язку рівняння

$$\frac{d^2 \widehat{u}^{(i)}}{dx^2} + \lambda^2 \widehat{u}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 3, \quad (8)$$

а в області неоднорідності – з рівняння

$$\frac{d^2 \widehat{u}^{(2)}}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{1 + \varepsilon} \widehat{u}^{(2)} = 0. \quad (9)$$

Для визначення функцій  $\widehat{u}^{(k)}$ ,  $k=1, 2, 3$ , окрім граничних умов (7), необхідно використати наведені нижче умови спряження розв'язків:

$$\begin{aligned} \widehat{u}^{(1)} \Big|_{x=x_0-\delta} &= \widehat{u}^{(2)} \Big|_{x=x_0-\delta}, \\ \widehat{u}^{(2)} \Big|_{x=x_0+\delta} &= \widehat{u}^{(3)} \Big|_{x=x_0+\delta}, \\ \frac{d\widehat{u}^{(1)}}{dx} \Big|_{x=x_0-\delta} &= (1 + \varepsilon) \frac{d\widehat{u}^{(2)}}{dx} \Big|_{x=x_0-\delta}, \\ (1 + \varepsilon) \frac{d\widehat{u}^{(2)}}{dx} \Big|_{x=x_0+\delta} &= \frac{d\widehat{u}^{(3)}}{dx} \Big|_{x=x_0+\delta}. \end{aligned} \quad (10)$$

Розв'язки рівнянь (8) і (9) подаються через тригонометричні функції аргументів  $\lambda x$  і  $\lambda x / \sqrt{1 + \varepsilon}$ . До цих розв'язків входять шість довільних сталых. Негривіальний розв'язок системи шести алгебраїчних рівнянь, які отримуються при виконанні граничних умов (7) та умов спряження (10), знаходиться з умови рівності нулю детермінанту цієї алгебраїчної системи. Прирівнюючи до нуля її детермінант, знаходимо власні частоти коливань неоднорідного стержня:

$$\begin{aligned} &\sin \left( \frac{2z\bar{\delta}}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \right) \left\{ \sin[z(1 - 2\delta)] + \right. \\ &+ \varepsilon \sin[z(\bar{x}_0 - \bar{\delta})] \cos[z(1 - \bar{x}_0 - \bar{\delta})] \left. \right\} - \\ &- \sqrt{1 + \varepsilon} \cos[z(1 - 2\bar{\delta})] \cos \left( \frac{2z\bar{\delta}}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

Табл. 1. Власні частоти повздовжніх коливань неоднорідного стержня (точний розв'язок) і частоти коливань однорідного стержня

m	$z_m^{(o)}$	Значення $z_m$		
		$\bar{x}_0=1/3$	$\bar{x}_0=1/2$	$\bar{x}_0=2/3$
0	1.571	1.5781	1.5761	1.5741
1	4.712	4.7254	4.7213	4.7173
2	7.854	7.871	7.867	7.863
3	10.996	11.014	11.010	11.006
4	14.137	14.158	14.153	14.147
5	17.279	17.304	17.299	17.291
6	20.420	20.451	20.443	20.434
7	23.562	23.601	23.588	23.579
8	26.704	26.752	26.742	26.726
9	29.845	29.913	29.899	29.872
10	32.986	33.061	33.047	33.023
11	36.128	36.215	36.204	36.172
12	39.269	39.372	39.357	39.322
13	42.412	42.531	42.521	42.478
14	45.553	45.685	45.679	45.633
15	48.695	48.852	48.833	48.786
16	51.836	52.028	52.013	51.951
17	54.977	55.230	55.192	55.126
18	58.119	58.427	58.372	58.291
19	61.261	61.639	61.588	61.451
20	64.402	64.861	64.774	64.606

де  $\lambda l = z$ ;  $x_0/l = \bar{x}_0$ ;  $\delta/l = \bar{\delta}$ . Для однорідного стержня ( $\varepsilon = 0$ ) амплітудна функція  $\widehat{u}(x)$  визначається з рівняння

$$\frac{d^2 \widehat{u}}{dx^2} + \lambda^2 \widehat{u} = 0. \quad (12)$$

Як відомо, розв'язок рівняння (12) з урахуванням граничних умов (7) може бути представлений у вигляді

$$\widehat{u}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{l}. \quad (13)$$

Частоти власних повздовжніх коливань однорідного стержня знаходяться як розв'язки рівняння

$$\cos z = 0 \quad (14)$$

і визначаються елементарною формулою

$$z_m^{(o)} = (m + 1/2)\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Корені рівняння (11) були знайдені чисельним методом (табл. 1). Параметри задачі приймали такі значення:  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\bar{\delta} = 0.05$ . При цьому розглядалися три положення неоднорідності:  $\bar{x}_0 = 1/3$ ,  $1/2$  і  $2/3$ .

Табл. 2. Коефіцієнти ряду Фур'є. Пряма задача

Значення $a_n$			Значення $a_n$			Значення $a_n$					
$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$	$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$	$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$
0	0.1730	0.0998	0.1412	7	0.0000	-0.1568	0.1109	14	-0.0578	0.0333	-0.0472
1	0.0000	-0.1981	-0.1401	8	-0.1261	0.0728	0.1029	15	-0.0462	0.0266	0.0377
2	-0.1687	0.0974	-0.1378	9	-0.1157	0.0668	-0.0944	16	0.0000	-0.0403	0.0285
3	-0.1646	0.0950	0.1344	10	0.0000	-0.1208	-0.0854	17	0.0241	0.0139	-0.0197
4	0.0000	-0.1837	0.1299	11	0.0932	0.0538	0.0761	18	0.0139	0.0080	-0.0114
5	0.1524	0.0880	-0.1244	12	0.0814	0.0471	0.0665	19	0.0000	-0.0051	0.0036
6	0.1446	0.0835	-0.1181	13	0.0000	-0.0804	-0.0568	20	0.0042	-0.0024	-0.0034

**1.2. Повздовжні коливання стержня з неоднорідністю. Наближений розв'язок**

Для однорідного стержня з жорстко закріпленим лівим і вільним правим торцем (див. рис. 1) нормальні моди коливань

$$\varphi_n(x) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

утворюють повну ортогональну систему функцій на проміжку  $0 \leq x \leq l$ . Повною на цьому проміжку є також система функцій

$$\psi_n(x) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Згідно з методом низькочастотної томографії шукана неоднорідність наближено представляється відрізком ряду Фур'є, але не за власними формами коливань вихідної задачі, а за власними формами повздовжніх коливань стержня з вільним лівим краєм ( $x=0$ ) і жорстко закріпленим правим краєм ( $x=l$ ):

$$\frac{E(x)}{E_0} = 1 + \varepsilon \sum_{n=0}^N a_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}, \quad (18)$$

де  $N=20$ ;

$$a_n = \frac{4}{\pi(n + 1/2)} \sin[(n + 1/2)\pi\bar{\delta}] \times \quad (19)$$

$$\times \cos[(n + 1/2)\pi\bar{x}_0], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Значення  $a_n$ , обраховані за формулою (19), наведені в табл. 2.

Виходячи зі співвідношень (2) і (4), для амплітудних функцій у випадку неоднорідного стержня одержуємо

$$E(x) \frac{d^2 \hat{u}(x)}{dx^2} + \frac{dE(x)}{dx} \frac{d\hat{u}(x)}{dx} + \rho \omega^2 \hat{u}(x) = 0. \quad (20)$$

Як і для однорідного стержня, розв'язок рівняння (20) будемо у вигляді ряду Фур'є:

$$\hat{u}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin \alpha_k x, \quad \alpha_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l}. \quad (21)$$

З урахуванням рівностей (18), (21) і умов ортогональності функцій (16), (17) після очевидних перетворень одержуємо нескінченну систему однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \left[ \left(\frac{\lambda l}{\pi}\right)^2 - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \right] \times \\ & \times \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{n=0}^N (-1)^n \alpha_{mn} a_n \right) A_m - \\ & - \varepsilon \frac{(-1)^m}{2\pi} \left(m + \frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \times \\ & \times \left[ \left(k + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^N (-1)^n \gamma_{mn}^{(k)} a_n \right] A_k = 0, \quad (22) \\ & m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ & k = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda l = z, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} &= \frac{2}{n + 1/2} - \frac{1}{n + 2m + 3/2} - \\ & - \frac{1}{n - 2m - 1/2}; \\ \gamma_{mn}^{(k)} &= \frac{1}{n - m + k + 1/2} + \frac{1}{n + m - k + 1/2} - \\ & - \frac{1}{n + m + k + 3/2} - \frac{1}{n - m - k - 1/2}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\gamma_{mn}^{(k)} = \alpha_{mn} \quad \text{при} \quad k = m;$$

штрих означає, що в сумі пропущено член з номером  $k=m$ . Корені детермінанта системи (22) визначають власні частоти повздовжніх коливань неоднорідного стержня. Підставляючи значення  $a_n$ , знайдені з формули (19), у систему (22) з урахуванням виразів (23) отримуємо чисельні значення спектрів власних частот коливань неоднорідного стержня для  $N=20$ ,  $k=0, 1, \dots, 20$ ,  $m=0, 1, \dots, 20$  (табл. 3).

Якщо не враховувати позадіагональні елементи визначника системи рівнянь (22), корені частотного детермінанта можна обчислити як

$$\left[ \left( \frac{\lambda l}{\pi} \right)_m^2 - \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \times \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{n=0}^N (-1)^n \alpha_{mn} a_n \right) \right] = 0, \quad (24)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Чисельні розв'язки рівнянь (24) для  $m=0, 1, \dots, 20$  наведені в табл. 4.

## 2. ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА. МЕТОД НИЗЬКОЧАСТОТНОЇ ТОМОГРАФІЇ

Задача про повздовжні коливання стержня з неоднорідністю при дослідженні її методом низькочастотної томографії зводиться до знаходження неоднорідності шляхом співставлення частотних спектрів коливань однорідного стержня, знайдених за формулою (15), та частот власних коливань для стержня з заданим дефектом. Останні будемо називати “експериментальними”, оскільки вони відповідають даним, які зазвичай отримують в практичних роботах з неруйнівного контролю об'єктів. Визначимо ці частоти як корені характеристичного рівняння (11). Співставляючи корені рівнянь (11) і (15), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів ряду Фур'є:

$$\left( \frac{\lambda l}{\pi} \right)_m^{2(e)} - \left( \frac{\lambda l}{\pi} \right)_m^{2(o)} - \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \times \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{n=0}^N (-1)^n \alpha_{mn} a_n = 0, \quad (25)$$

$$m=0, 1, \dots, 20, \quad n=0, 1, \dots, 20, \quad N=20.$$

Шукані значення  $a_n$  наведені в табл. 5.

Таким чином, спектри власних частот коливань стержня з неоднорідністю практично співпадають як для точного (див. табл. 1), так і для наближеного розв'язку, в якому неоднорідність апроксимується скінченною кількістю членів ряду Фур'є

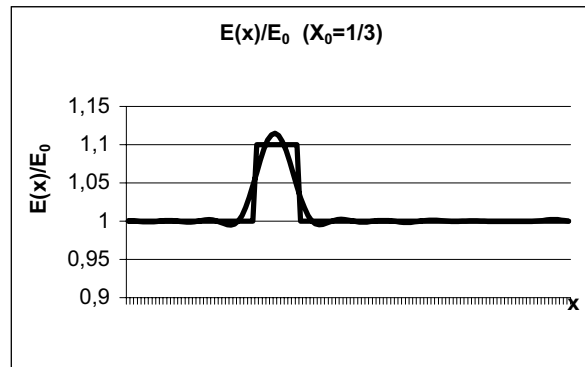


Рис. 2. Томографічне поновлення неоднорідності для  $\bar{x}_0 = 1/3$

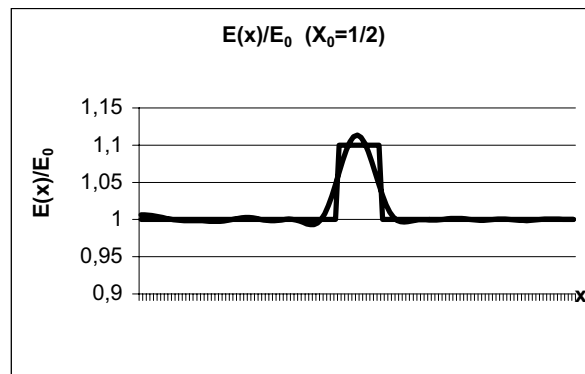


Рис. 3. Томографічне поновлення неоднорідності для  $\bar{x}_0 = 2/3$

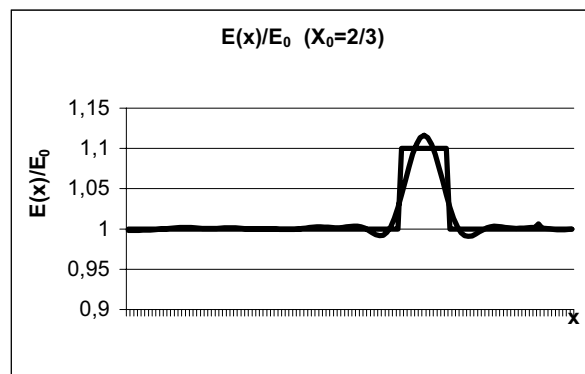


Рис. 4. Томографічне поновлення неоднорідності для  $\bar{x}_0 = 1/2$

Табл. 3. Спектри власних частот повздовжніх коливань стержня з апроксимацією неоднорідності скінченною кількістю членів ряду Фур'є

Значення $z_m$			Значення $z_m$			Значення $z_m$					
$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$	$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$	$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$
0	1.578	1.576	1.574	7	23.593	23.583	23.575	14	45.656	45.652	45.616
1	4.725	4.721	4.717	8	26.745	26.735	26.721	15	48.816	48.800	48.767
2	7.870	7.866	7.862	9	29.903	29.891	29.866	16	51.985	51.975	51.927
3	11.013	11.009	11.005	10	33.049	33.037	33.015	17	55.180	55.146	55.098
4	14.156	14.151	14.146	11	36.200	36.190	36.162	18	58.370	58.320	58.258
5	17.301	17.296	17.289	12	39.354	39.340	39.310	19	61.577	61.527	61.415
6	20.447	20.439	20.431	13	42.508	42.501	42.464	20	64.791	64.708	64.565

Табл. 4. Спектри власних частот повздовжніх коливань стержня з апроксимацією неоднорідності скінченною кількістю членів ряду Фур'є, знайдені із рівнянь діагонального виду

Значення $z_m$			Значення $z_m$			Значення $z_m$					
$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$	$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$	$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$
0	1.578	1.576	1.574	7	23.596	23.586	23.576	14	45.661	45.661	45.619
1	4.7252	4.7212	4.7171	8	26.748	26.739	26.722	15	48.824	48.811	48.768
2	7.870	7.8662	7.8622	9	29.909	29.897	29.869	16	51.991	51.983	51.928
3	11.0131	11.009	11.0055	10	33.053	33.041	33.017	17	55.189	55.152	55.109
4	14.157	14.152	14.1463	11	36.209	36.200	36.163	18	58.379	58.331	58.261
5	17.302	17.297	17.290	12	39.359	39.349	39.311	19	61.601	61.537	61.421
6	20.449	20.442	20.432	13	42.511	42.509	42.467	20	64.801	64.728	64.569

Табл. 5. Початкові коефіцієнти ряду Фур'є у випадку повздовжніх коливань

Значення $a_n$			Значення $a_n$			Значення $a_n$					
$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$	$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$	$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$
0	0.1728	0.0996	0.1411	7	0.0000	-0.1617	0.1018	14	-0.0577	0.0303	-0.0521
1	0.0000	-0.2080	-0.1479	8	-0.1262	0.0707	0.0929	15	-0.0472	0.0216	0.0307
2	-0.1690	0.0966	-0.1397	9	-0.1158	0.0617	-0.1144	16	0.0000	-0.0433	0.0235
3	-0.1648	0.0949	0.1303	10	0.0000	-0.1308	-0.0864	17	0.0231	0.0129	-0.0191
4	0.0000	-0.1936	0.1291	11	0.0929	0.0528	0.0680	18	0.0129	0.0016	-0.0103
5	0.1503	0.0849	-0.1314	12	0.0808	0.0440	0.0585	19	0.0000	-0.0053	0.0029
6	0.1425	0.0784	-0.1220	13	0.0000	-0.0813	-0.0598	20	0.0031	-0.0025	-0.0028

(див. табл. 3). Це дає змогу в подальшому використовувати значення частот, наведених в табл. 3, як експериментальні дані для стержня з неоднорідністю. При цьому формули для знаходження  $a_n$  дозволяють обрахувати коефіцієнти ряду Фур'є, обчисливши різницю між квадратами власних частот коливань стержня з неоднорідністю й однорідного стержня (див. табл. 1). Слід зазначити, що значення коефіцієнтів розкладу  $a_n$  можна знайти не тільки з повної алгебраїчної системи, але й з рівнянь діагонального виду. Наближення для визначення дефекту методом низькочастотної томографії показано на рис. 2–4. На цих графіках зображені ступінчата залежність  $E(x)/E_0$  (істинна, за формулою (1)) й томографічне поновлення неоднорідності з урахуванням  $a_n$ , знайдених з (25). Параметри задачі вибиралися такими ж, як і в попередньому розділі.

### 3. ЗГИННІ КОЛИВАННЯ СТЕРЖНЯ З ЗАДАНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

#### 3.1. Згинні коливання стержня з неоднорідністю. Наближений розв'язок. Пряма задача

При вивченні згинних коливань стержня з неоднорідністю для випадку вільних торців  $x=0$  і  $x=l$  побудова розв'язку повністю аналогічна розглянутому вище випадку повздовжніх коливань.

Перейдемо до розгляду стержня з шарнірно закріпленими кінцями. Якщо в пружному стержні довжиною  $l$  зі сталим поперечним перерізом на деякій відстані від лівого шарнірно опертого торця  $x=0$  існує локалізована область довжиною  $2\delta$ , модуль пружності в якій відрізняється на деяку сталу величину від модуля пружності  $E_0$  за її межами (рис. 5), то згинні коливання описуються таким рівнянням відносно функції прогину  $w(x)$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ D(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (26)$$

При цьому граничні умови мають вигляд

$$\begin{aligned} w|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \\ w|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Згинна жорсткість  $D(x)$  задається співвідношенням

$$D(x) = \frac{E(x)h^3}{12}, \quad (28)$$

де  $E(x)$  є кусково-неперервною функцією осової координати  $x$  (див. формулу (1)).

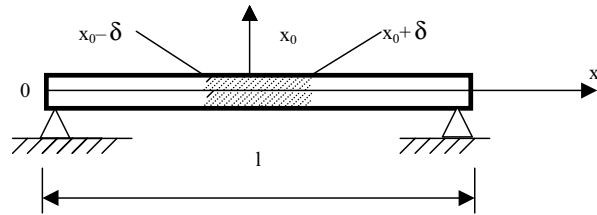


Рис. 5. Стержень довжиною  $l$  з неоднорідністю модуля пружності в локальній області  $2\delta$ . Випадок згинних коливань

Для усталених коливань функція прогину  $w(x, t)$  описується співвідношенням

$$w(x, t) = \widehat{w}(x) e^{i\omega t}. \quad (29)$$

Після підстановки виразу (29) в рівняння (26) з урахуванням співвідношень (1) та (28) маємо

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ \begin{aligned} & \left( 1, \quad 0 \leq x < x_0 - \delta \right) \\ & \left( 1 + \varepsilon, \quad x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \right) \\ & \left( 1, \quad x_0 + \delta < x \leq l \right) \end{aligned} \frac{d^2 \widehat{w}}{dx^2} \right] - \beta^4 \widehat{w} = 0, \quad (30)$$

$$\text{де } \beta^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D_0}; \quad D_0 = \frac{E_0 h^3}{12}.$$

Як відомо, для однорідного стержня амплітудна функція визначається з рівняння

$$\frac{d^4 \widehat{w}}{dx^4} - \beta^4 \widehat{w} = 0. \quad (31)$$

Його розв'язок для граничних умов

$$\begin{aligned} \widehat{w}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \widehat{w}}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \\ \widehat{w}|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial^2 \widehat{w}}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

подається формулою

$$\widehat{w}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (33)$$

а частоти власних коливань знаходяться як розв'язки елементарного рівняння

$$\sin \beta l = 0 \quad (34)$$

і визначаються співвідношеннями

$$(\beta l)_m = z_m^{(0)} = m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

Табл. 6. Частоти власних згинних коливань однорідного стержня

$m$	$z_m^{(o)}$	$m$	$z_m^{(o)}$	$m$	$z_m^{(o)}$
0	0.0000	7	21.9911	14	43.9823
1	3.1415	8	25.1327	15	47.1239
2	6.2831	9	28.2743	16	50.2654
3	9.4247	10	31.4159	17	53.4071
4	12.5664	11	34.5751	18	56.5487
5	15.7079	12	37.6991	19	59.6902
6	18.8496	13	40.8407	20	62.8318

Значення  $z_m^{(o)}$  наведені в табл. 6.

Представляючи неоднорідність модуля пружності у цьому випадку також у вигляді (18), (19) і враховуючи, що для стержня, зображеного на рис. 5, з граничними умовами (32), функції

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \theta_n(x) &= \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (36)$$

утворюють повну ортогональну систему на проміжку  $0 \leq x \leq l$ , запишемо рівняння (30) у вигляді

$$\begin{aligned} D(x) \frac{d^4 \widehat{w}(x)}{dx^4} + 2D'(x) \frac{d^3 \widehat{w}(x)}{dx^3} + \\ + D''(x) \frac{d^2 \widehat{w}(x)}{dx^2} - \rho h \omega \widehat{w}(x) = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Як для однорідного стержня, розв'язок (37) будемо у вигляді ряду Фур'є

$$\widehat{w}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \sin \alpha_k x, \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{l}. \quad (38)$$

З урахуванням розкладу (18), представлення (38) й умов ортогональності функцій (36) одержуємо нескінченну систему однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_{mn} a_n \right) m^4 - \right. \\ \left. - \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)_m^4 \right] w_m + \varepsilon \frac{(-1)^m}{2\pi} m^2 \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ k^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \gamma_{mn}^k a_n \right] w_k = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

$m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$   
 $k = 0, 1, 2, \dots,$

де

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} &= \frac{1}{2m - n - 1/2} + \frac{2}{n + 1/2} - \\ &\quad - \frac{1}{n + 2m + 1/2}; \\ \gamma_{mn}^k &= \frac{1}{k - m + n - 1/2} + \frac{1}{m + n - k + 1/2} - \\ &\quad - \frac{1}{m - n - k - 1/2} - \frac{1}{m + n + k + 1/2}; \\ \gamma_{mn}^{(k)} &= \alpha_{mn} \quad \text{при} \quad k = m. \end{aligned} \quad (40)$$

Як і в системі (22), штрихом позначено суму, в якій пропущено член з номером  $k = m$ .

Корені детермінанта системи (39) визначають власні частоти коливань неоднорідного стержня. Їхні значення наведені в табл. 7.

Якщо не враховувати позадіагональні елементи визначника системи (39), то для знаходження коренів частотного детермінанта одержуємо

$$\begin{aligned} \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_{mn} a_n \right) m^4 - \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)_m^4 \right] = 0, \\ m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (41)$$

Чисельні значення розв'язків для виразів (41) при  $m = 0, 1, \dots, 20$  наведені в табл. 8.

### 3.2. Обернена задача. Метод низькочастотної томографії

Обрахунки неоднорідності для задачі згинних коливань повністю аналогічні алгоритму, застосованому при повздовжніх коливаннях стержня. Експериментальними даними для частот коливань є значення з табл. 7 чи з табл. 8. Спектр коливань однорідного стержня взято з табл. 6. Коефіцієнти ряду Фур'є знаходимо зі спрощеної системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)_m^{4(e)} - \left( \frac{\beta l}{\pi} \right)_m^{4(o)} = \frac{\varepsilon m^4}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_{mn} a_n, \\ m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad N = 20. \end{aligned} \quad (42)$$

Їхні значення наведені в табл. 9.

Зазначимо, що зображення неоднорідності, які одержані методом низькочастотної томографії при згинних коливаннях стержня, практично не відрізняються від зображень, отриманих для випадку повздовжніх коливань (див. рис. 2–4).



Табл. 7. Спектри власних частот згинних коливань стержня з апроксимацією неоднорідності скінченною кількістю членів ряду Фур'є

Значення $z_m$			Значення $z_m$			Значення $z_m$					
$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$	$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$	$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$
0	0.0000	0.0000	0.0000	7	22.0437	22.0374	22.0099	14	44.0891	44.0732	44.0089
1	3.1542	3.1510	3.1500	8	25.1877	25.1816	25.1701	15	47.2427	47.2384	47.2206
2	6.3001	6.2989	6.2840	9	28.3416	28.3173	28.2997	16	50.3841	50.3791	50.2791
3	9.4388	9.4298	9.4259	10	31.4809	31.4705	31.4497	17	53.5148	53.5099	53.4786
4	12.5899	12.5879	12.5701	11	34.6249	34.6239	34.5898	18	56.6524	56.6501	56.5804
5	15.7628	15.7597	15.7301	12	37.803	37.7795	37.7105	19	59.8307	59.8271	59.7008
6	18.8698	18.8675	18.8597	13	40.9104	40.8906	40.8602	20	62.9772	62.9769	62.8513

Табл. 8. Спектри власних частот згинних коливань стержня з апроксимацією неоднорідності скінченною кількістю членів ряду Фур'є, знайдені із рівнянь діагонального виду

Значення $z_m$			Значення $z_m$			Значення $z_m$					
$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$	$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$	$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$
0	0.0000	0.0000	0.0000	7	22.0659	22.0558	22.0461	14	44.0921	44.0917	44.0101
1	3.1546	3.1520	3.1503	8	25.2028	25.1908	25.1779	15	47.2598	47.2412	47.2299
2	6.3009	6.2994	6.2875	9	28.3525	28.3369	28.3004	16	50.3901	50.3809	50.2800
3	9.4399	9.4301	9.4264	10	31.4953	31.4899	31.4506	17	53.5234	53.5111	53.4832
4	12.6094	12.6092	12.5740	11	34.6441	34.6432	34.5927	18	56.6607	56.6601	56.5893
5	15.7718	15.7604	15.7349	12	37.8391	37.7928	37.7176	19	59.8406	59.8302	59.7019
6	18.8729	18.8728	18.8720	13	40.9226	40.9123	40.8633	20	62.9854	62.9807	62.8597

Табл. 9. Початкові коефіцієнти ряду Фур'є у випадку згинних коливань

Значення $a_n$			Значення $a_n$			Значення $a_n$					
$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$	$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$	$m$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}$	$\bar{x}_0 = \frac{1}{2}$	$\bar{x}_0 = \frac{2}{3}$
0	0.1727	0.0997	0.1413	7	0.0000	-0.1608	0.1204	14	-0.0499	0.0351	-0.0389
1	0.0000	-0.1897	-0.1367	8	-0.1199	0.0753	0.1104	15	-0.0458	0.0274	0.0278
2	-0.1689	0.0889	-0.1309	9	-0.1161	0.0708	-0.0872	16	0.0000	-0.0375	0.0311
3	-0.1647	0.0875	0.1409	10	0.0000	-0.1309	-0.0783	17	0.0223	0.0142	-0.0112
4	0.0000	-0.1731	0.1319	11	0.0872	0.0562	0.0687	18	0.0127	0.0089	-0.0102
5	0.1508	0.0771	-0.1187	12	0.0792	0.0468	0.0599	19	0.0000	-0.0047	0.0041
6	0.1429	0.0769	-0.1094	13	0.0000	-0.0820	-0.0476	20	0.0038	-0.0022	-0.0026

## ВИСНОВКИ

1. Як приклад обмеженої оберненої крайової задачі теорії коливань наведено розв'язок задачі про визначення неоднорідності пружних властивостей стержня. Для знаходження неоднорідності пружних властивостей використовується метод низькочастотної томографії (наближення функції скінченними сумами ряду Фур'є).
2. Знайдено спектри частот повздовжніх і згинних коливань неоднорідного стержня (точні й наближені розв'язки). Виявлено, що спектри власних частот коливань стержня з неоднорідністю практично співпадають як для точного розв'язку, так і для розв'язку при наближенні функції неоднорідності скінченною кількістю членів ряду Фур'є.
3. Показано, що елементарна задача про коливання стержня з неоднорідністю при дослідженні методом низькочастотної томографії зводиться до поновлення неоднорідності через співставлення частотних спектрів коливань однорідного стержня і експериментальних даних для частот власних коливань, які вимірюються на стержні з заданим дефектом.
4. Отримано систему алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів ряду Фур'є як з парними, так і з непарними номерами.
5. На підставі проведеного дослідження можна зробити висновок, що метод низькочастотної томографії дозволяє ефективно виявляти локалізовані дефекти неоднорідності пружних властивостей в тонкостінних елементах конструкцій.
1. Крейн М. Г. Решение обратной задачи Штурма – Лиувилля // Докл. АН СССР.– 1951.– N 1.– С. 21–24.
2. Крейн М. Г. О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции // Докл. АН СССР.– 1953.– N 4.– С. 617–620.
3. Крейн М. Г. Об обратных задачах для неоднородной струны // Докл. АН СССР.– 1952.– N 5.– С. 364–369.
4. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. матем.– 1951.– 15, N 4.– С. 345–354.
5. Niordson F. J. A method for solving inverse eigenvalue problems. Recent Progress in Applied Mechanics // The Folk Odquist Volume.– Stockholm, 1967.– P. 373–382.
6. Ниордсен Ф. Относительно обращения проблемы собственных чисел для задачи о колебаниях пластин // Проблемы механики твердого деформированного тела.– Л.: Судостроение, 1970.– С. 287–294.
7. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач.– М.: Изд-во МГУ, 1994.– 207 с.
8. Потетюнко Э. Н., Черкесов Л. В., Шубин Д. С., Щербак Е. Н. Свободные колебания и обратные спектральные задачи.– М.: Вузов. книга, 2001.– 288 с.
9. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.– М.: Наука, 1986.– 287 с.
10. Ильинский Н. Б. Обратные краевые задачи и их приложения // Сорос. образоват. ж.– 1997.– N 4.– С. 105–110.
11. Ватульян А. О. Математические модели и обратные задачи // Сорос. образоват. ж.– 1998.– N 11.– С. 143–148.
12. Testardi L. R., Norton S. J. Acoustic dimensional resonance tomography: some examples in one-dimensional system // J. Appl. Phys.– 1986.– 96, N 1.– P. 55–58.
13. Testardi L. R., Norton S. J., Hsich T. Dimensional resonance tomography // J. Appl. Phys.– 1984.– 56, N 2.– P. 68–81.