

УДК 534.231

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕРОВНОСТЕЙ ДОННЫХ СЛОЕВ В ГИДРОАКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ НА ОСНОВЕ МЕТОДА НОРМАЛЬНЫХ МОД

С. О. ПАПКОВ, Ю. И. ПАПКОВА, А. А. ЯРОШЕНКО

*Севастопольский национальный технический университет**Получено 4.06.2002*

Представлен аналитико-численный алгоритм расчета гидроакустического волновода с параметрами, существенно меняющимися по трассе. При построении решения предполагалась возможность декомпозиции области волновода на элементарные подобласти, в которых потенциал скорости строится в виде суммы нормальных мод с неопределенными коэффициентами. Относительно последних получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений. Приведены примеры численных расчетов. Показано удовлетворительное согласование результатов с экспериментальными данными.

Наведено аналітико-чисельний алгоритм розрахунку гідроакустичного хвилеводу з параметрами, які істотно змінюються по трасі. При побудові розв'язку передбачалась можливість декомпозиції області хвилеводу на елементарні підобласті, в яких потенціал швидкості будується у вигляді суми нормальних мод з невизначеними коефіцієнтами. Відносно останніх отримано нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Наведені приклади чисельних розрахунків. Показане задовільне узгодження результатів з експериментальними даними.

An analytical-numerical algorithm of calculation of hydroacoustic waveguide with essentially varying parameters is offered. When developing the solution we accounted for the possibility to decompose the waveguide's domain into elementary subdomains, where the velocity potential is written as a sum of normal waves with undetermined coefficients. The infinite system of linear algebraic equations was obtained to find these coefficients. The examples of numerical calculations are presented. Satisfactory compliance of the results with experimental data is shown.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ звуковых полей, создаваемых подводными источниками, широко используется как при исследованиях океана, так и при решении многих прикладных задач акустики. Специфика задач, связанных с исследованием звуковых полей в океане, заключается в необходимости комплексного учета многих факторов, влияющих на процесс распространения звуковых волн, таких как форма профиля скорости звука, геоакустические свойства дна и его неровности, поверхностные волны, гидродинамические процессы, внутренние локальные неоднородности среды. Наиболее существенными из этих факторов являются скорость звука в океане, геологические и геометрические свойства дна [1]. Общая модель скорости звука может быть представлена в следующем виде:

$$c(x, z, t) = c_0(z) + c_1(x) + c_2(x, t),$$

где x, z – пространственные координаты; $c_0(x)$ – рефракционный член; $c_1(x)$ – поправка к скорости звука, вызванная особенностями среды (обычно она имеет порядок $c_0 \cdot 10^{-2}$); $c_2(x, t)$ – случайная компонента (порядка $c_0 \cdot 10^{-4}$). Как правило, теоретические исследования звуковых полей в океане заключаются в построении математических

приближений к реальной среде. При этом сложность полученных моделей волноводов определяется не только степенью влияния вышеперечисленных факторов на распространение звука, но и возможностями вычислительной реализации. На сегодняшний день предложено уже достаточно большое количество моделей волноводов различной степени сложности (их обзор см. в работах [1–7]).

При теоретических исследованиях звуковых полей в океане плодотворным оказалось использование плоскостойких моделей волноводов, учитывающих геоакустические свойства дна. В рамках таких моделей волновод рассматривается как детерминированная среда, в которой основные параметры (скорость звука и плотность) зависят только от глубины. Впервые модель двухслойного волновода, состоящего из слоя воды с постоянным профилем скорости звука, лежащего на жидком однородном полупространстве, использовали Пекерис и Л. М. Бреховских. В дальнейшем эта модель была обобщена на случай дискретно-слоистого волновода И. Толстым [6].

В настоящее время не существует единой модели волновода, которая, наряду с детерминированной зависимостью параметров акустической среды от пространственных координат, позволяла

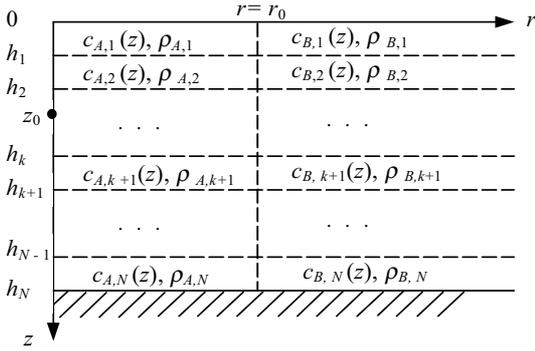


Рис. 1. Слоисто-неоднородная акустическая структура на жестком основании, позволяющая моделировать неровности дна (выступ или впадину)

бы учесть влияние рельефа дна и его геологических свойств. При малых изменениях характеристик волновода широкое распространение получили параболические приближения волнового уравнения, предложенные Л. М. Бреховских, Де Санто и Бэрм [2]. Пападакис и Вуд [5] при вычислении звуковых полей в случае горизонтально-неоднородной модели волновода использовали метод параболической декомпозиции. При этом звуковое поле представлялось в виде интеграла решений двух параболических уравнений. Преимущество параболических приближений заключается в том, что численное решение параболических уравнений требует гораздо меньшего объема вычислений, по сравнению с решением уравнений гиперболического типа, так как в данном случае расчет ведется при последовательном продвижении по расстоянию. В частности, Р. Н. Hardin и Е. D. Tappert при решении параболического уравнения предложили алгоритм расщепленных шагов (split step algorithm).

А. D. Pierce, D. M. Milder, Л. М. Бреховских и др. для расчета горизонтально-неоднородных волноводов переменной глубины с параметрами, мало меняющимися на цикле луча, применили метод поперечных сечений. При этом использовались адиабатическое приближение и лучевой инвариант. При численной реализации собственные числа волновода сравнения рассчитывались методом сеток. В. С. Булдырев и В. С. Буслаев [7] для горизонтально-неоднородных волноводов со скоростью звука, медленно изменяющейся по пространственной координате, обобщили метод нормальных мод. При этом были использованы адиабатические приближения, что позволило получить асимптотическое решение задачи расчета звуково-

го поля.

Для указанных подходов в большинстве случаев не существует аналитических представлений звукового поля, что затрудняет возможность качественного анализа акустических характеристик исследуемых волноводов. Поэтому, наряду с построением численных решений, в настоящее время активно развиваются и численно-аналитические методы расчета звуковых полей, позволяющие получить решение многих практических задач гидроакустики в первом приближении. В первую очередь, к таким методам следует отнести обобщенный метод частичных областей, разработанный в монографии В. Т. Гринченко и И. В. Вовка [9].

В смежных с гидроакустикой областях знаний, таких как электродинамика и механика твердого деформированного тела, изучение свойств волноводов также вызывает живой интерес. Качественный и количественный анализ распространения упругих волн в полупространстве, бесконечном цилиндре, полубесконечном цилиндре и некоторых упругих телах конечных размеров дан в монографии В. Т. Гринченко и В. В. Мелешко [8]. В работах В. П. Шестопалова, В. В. Щербака предложен алгоритм расчета радиально-симметричных волнопроводящих структур с неоднородностями на основе использования аппарата бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, что позволяет решить исходную задачу дифракции электромагнитных волн [10].

Проведенный анализ публикаций свидетельствует о повышенном интересе к изучению волновых полей в акустических средах, неоднородных по глубине и вдоль трассы (в том числе, при учете влияния рельефа границ). В настоящее время широкое распространение получили приближенные методы расчета звуковых полей в неоднородных гидроакустических волноводах с параметрами, являющимися гладкими функциями глубины и мало изменяющимися на расстояниях порядка длины волны (например, горизонтально-неоднородный волновод со слабо зависящими от расстояния параметрами или волновод переменной глубины с малым наклоном дна). Для расчета волноводов с резким изменением рельефа дна и существенно меняющейся на расстоянии порядка длины волны горизонтальной составляющей скорости звука, как правило, используются численные методы. Поэтому построение аналитических решений для таких систем представляет интерес как с точки зрения анализа их звуковых полей, так и с точки зрения тестирования численных алгоритмов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Накопленные к настоящему времени экспериментальные данные о рельефе дна океана (степени его изрезанности, вертикальном расчленении, углах наклона) свидетельствуют о том, что для структуры донных слоев, в большинстве случаев, не характерна горизонтальная слоистость [11]. Это позволяет моделировать (в нулевом приближении) поверхностный донный слой как некоторую акустическую среду с постоянными плотностью и скоростью распространения звука. Ниже предлагается математическая постановка задачи для гидроакустического волновода, имеющего слоистую структуру, которая позволяет смоделировать радиально-симметричный выступ (впадину) дна путем варьирования параметров слоев (рис. 1).

Расположим начало цилиндрической системы координат на поверхности волновода над источником звука: ось Oz направлена ко дну и совпадает с осевой линией цилиндрического выступа (впадины). Точечный источник звука с координатами $(0, z_0)$ находится над выступом (впадиной). Радиально-симметричный волновод ограничен свободной поверхностью и “жидким” дном на абсолютно жестком основании.

Звуковое поле в данном волноводе определяется решением неоднородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta \Phi + \frac{\omega^2}{c^2} \Phi = -\frac{S(\omega)\delta(z - z_0)\delta(r)}{2\pi r} \quad (1)$$

со следующими граничными условиями:

$$\Phi|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=h_N} = 0, \quad (2)$$

где Φ – амплитуда потенциала скорости; ω и $S(\omega)$ – частота и интенсивность источника; Δ – оператор Лапласа в цилиндрической системе координат:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}.$$

Условия непрерывности звукового поля на границе слоев $z = h_k$ имеют вид

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow h_k^-} \rho_k \Phi &= \lim_{z \rightarrow h_k^+} \rho_{k+1} \Phi, \\ \lim_{z \rightarrow h_k^-} \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \lim_{z \rightarrow h_k^+} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$k = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Область волновода разобьем на две цилиндрические области: (A) – при $r < r_0$ и (B) – при $r > r_0$.

Пусть в каждой из областей амплитуда потенциала скорости принимает значения Φ_A и Φ_B соответственно. Из условий непрерывности для $\Phi(r, z)$ и $\partial \Phi(r, z)/\partial r$ на границе раздела областей $r = r_0$ следуют соотношения

$$\begin{aligned} \rho_A \Phi_A|_{r=r_0} &= \rho_B \Phi_B|_{r=r_0}, \\ \frac{\partial \Phi_A}{\partial r} \Big|_{r=r_0} &= \frac{\partial \Phi_B}{\partial r} \Big|_{r=r_0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Общее решение $\Phi_A(r, z)$ краевой задачи (1) – (3) для области (A) , удовлетворяющее как граничным условиям, так и условию излучения, находится методом разделения переменных и является линейной комбинацией стоячих и бегущих мод. Для области (B) общее решение $\Phi_B(r, z)$ описывает уходящую от излучателя волну:

$$\begin{aligned} \Phi_A &= \frac{i\rho_A(z_0)S(\omega)}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{A,n}(z_0)\varphi_{A,n}(z)}{h_N} \times \\ &\quad \int_0^{h_N} \rho_A(s)\varphi_{A,n}^2(s) ds \times \\ &\quad \times H_0^{(1)}(\xi_{A,n}r) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_{A,n}(z) J_0(\xi_{A,n}r), \\ \Phi_B &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \varphi_{B,n}(z) H_0^{(1)}(\xi_{B,n}r), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\xi_{A,n}$, $\varphi_{A,n}$, $\xi_{B,n}$, $\varphi_{B,n}$ – собственные числа и функции следующих краевых задач:

$$\begin{aligned} \varphi_A'' + \left(\frac{\omega^2}{c_A^2(z)} - \xi_A^2 \right) \varphi_A &= 0, \\ \varphi_A(0) &= 0, \quad \lim_{z \rightarrow h_k^-} \rho_{A,k} \varphi_A(z) = \lim_{z \rightarrow h_k^+} \rho_{A,k+1} \varphi_A(z), \\ \lim_{z \rightarrow h_k^-} \varphi_A'(z) &= \lim_{z \rightarrow h_k^+} \varphi_A'(z), \quad \varphi_A'(h_N) = 0; \\ \varphi_B'' + \left(\frac{\omega^2}{c_B^2(z)} - \xi_B^2 \right) \varphi_B &= 0, \\ \varphi_B(0) &= 0, \quad \lim_{z \rightarrow h_k^-} \rho_{B,k} \varphi_B(z) = \lim_{z \rightarrow h_k^+} \rho_{B,k+1} \varphi_B(z), \\ \lim_{z \rightarrow h_k^-} \varphi_B'(z) &= \lim_{z \rightarrow h_k^+} \varphi_B'(z), \quad \varphi_B'(h_N) = 0, \\ k &= 1, 2, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Краевые задачи (6), (7) не являются задачами типа Штурма – Лиувилля. В то же время, они имеют дискретный спектр, состоящий из конечного числа вещественных и бесконечного числа чисто мнимых собственных чисел. Собственные функции $\varphi_{\sigma,n}(z)$ ($\sigma \in \{A, B\}$) краевых задач (6), (7)

ортогональны с весом $\rho_\sigma(z)$, где $\rho_\sigma(z) = \rho_{\sigma,k}$ при $z \in [h_{k-1}; h_k]$ ($k=1, 2, \dots, N$), в функциональном пространстве $L_2[0; h_N]$. Данный результат является прямым обобщением подобного факта для идеальных волноводов, для которых краевая задача (6), (7) вырождается в задачу Штурма – Луивилля.

Пусть $\lambda_n = \xi_{A,n}^2$ – квадрат собственного числа краевой задачи (6), которому соответствует собственная функция $\varphi_n(z)$ ($\bar{\varphi}_n(z)$ – комплексно-сопряженная функция). Тогда

$$\varphi_n(z)\bar{\varphi}_n(z) = |\varphi_n(z)|^2 \quad \varphi'_n(z)\bar{\varphi}'_n(z) = |\varphi'_n(z)|^2.$$

Собственная функция $\varphi_n(z)$ при $z \in [h_{k-1}; h_k]$ удовлетворяет краевым условиям и условиям непрерывности (3). Отметим, что этим же условиям удовлетворяет и комплексно-сопряженная функция $\bar{\varphi}_n(z)$. В частности, для функции $\bar{\varphi}_n(z)$ справедливо соотношение

$$\lim_{z \rightarrow h_{k-}} \rho_k \bar{\varphi}_{k,n}(z) = \lim_{z \rightarrow h_{k+}} \rho_{k+1} \bar{\varphi}_{k+1,n}(z).$$

Домножим дифференциальное уравнение (6) на $\rho_A(z)\bar{\varphi}_n(z)$ ($\rho_A(z) = \rho_{A,k}$ при $z \in [h_{k-1}; h_k]$) и проинтегрируем его от 0 до h_N :

$$\sum_{k=1}^N \rho_{A,k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\varphi''_{k,n}(z) + \frac{\omega^2}{c_{A,k}^2(z)} \varphi_{k,n}(z) \right] \times \bar{\varphi}_{k,n}(z) dz = \lambda_n \sum_{k=1}^N \rho_{A,k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \varphi_{k,n}(z) \bar{\varphi}_{k,n}(z) dz. \tag{8}$$

Преобразуем первый интеграл в соотношении (8), выполнив интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \rho_{A,k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \varphi''_{k,n}(z) \bar{\varphi}_{k,n}(z) dz = \\ & = \sum_{k=1}^N \rho_{A,k} [\varphi'_{k,n}(h_k) \bar{\varphi}_{k,n}(h_k) - \varphi'_{k,n}(h_{k-1}) \bar{\varphi}_{k,n}(h_{k-1})] - \\ & - \sum_{k=1}^N \rho_{A,k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \varphi'_{k,n}(z) \bar{\varphi}'_{k,n}(z) dz = \\ & = - \sum_{k=1}^N \rho_{A,k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} |\varphi'_{k,n}(z)|^2 dz. \end{aligned} \tag{9}$$

При получении выражения (9) было использовано следующее тождество, полученное с

учетом условий непрерывности (3). При группировке слагаемых была выполнена замена $\varphi'_{k+1,n}(h_k) = \varphi'_{k,n}(h_k)$, $k=1, 2, \dots, N-1$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \rho_{A,k} [\varphi'_{k,n}(h_k) \bar{\varphi}_{k,n}(h_k) - \varphi'_{k,n}(h_{k-1}) \bar{\varphi}_{k,n}(h_{k-1})] = \\ & = \rho_{A,1} \varphi'_{1,n}(h_1) \bar{\varphi}_{1,n}(h_1) - \rho_{A,1} \varphi'_{1,n}(0) \bar{\varphi}_{1,n}(0) + \\ & + \rho_{A,2} \varphi'_{2,n}(h_2) \bar{\varphi}_{2,n}(h_2) - \rho_{A,2} \varphi'_{2,n}(h_1) \bar{\varphi}_{2,n}(h_1) + \dots + \\ & + \rho_{A,N} \varphi'_{N,n}(h_N) \bar{\varphi}_{N,n}(h_N) - \rho_{A,N} \varphi'_{N,n}(h_{N-1}) \bar{\varphi}_{N,n}(h_{N-1}) = \\ & = [\rho_{A,1} \bar{\varphi}_{1,n}(h_1) - \rho_{A,2} \bar{\varphi}_{2,n}(h_1)] \varphi'_{1,n}(h_1) + \dots + \\ & + [\rho_{A,N-1} \bar{\varphi}_{N-1,n}(h_{N-1}) - \rho_{A,N} \bar{\varphi}_{N,n}(h_{N-1})] \varphi'_{N-1,n}(h_{N-1}) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Из равенства (8) выразим величину λ_n :

$$\lambda_n = \frac{\sum_{k=1}^N \rho_{A,k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\frac{\omega^2}{c_{A,k}^2(z)} |\varphi_{k,n}(z)|^2 - |\varphi'_{k,n}(z)|^2 \right] dz}{\sum_{k=1}^N \rho_{A,k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} |\varphi_{k,n}(z)|^2 dz}.$$

Из полученного соотношения следует, что величины λ_n принимают действительные значения, поскольку функции, стоящие под знаком интеграла, являются вещественными.

Используя выражение (9), получим верхнюю оценку для λ_n :

$$\begin{aligned} \lambda_n & = \frac{\sum_{k=1}^N \rho_{A,k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\frac{\omega^2}{c_{A,k}^2(z)} |\varphi_{k,n}(z)|^2 - |\varphi'_{k,n}(z)|^2 \right] dz}{\sum_{k=1}^N \rho_{A,k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} |\varphi_{k,n}(z)|^2 dz} \leq \\ & \leq \frac{\sum_{k=1}^N \rho_{A,k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\frac{\omega^2}{c_{A,k}^2(z)} |\varphi_{k,n}(z)|^2 \right] dz}{\sum_{k=1}^N \rho_{A,k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} |\varphi_{k,n}(z)|^2 dz} \leq \max_{z \in [0; h_N]} \frac{\omega^2}{c_A^2(z)}. \end{aligned}$$

Последнее соотношение показывает, что спектр краевой задачи (6) содержит конечное количество вещественных собственных чисел ξ_n , соответствующих незатухающим модам, и бесконечное число чисто мнимых чисел, соответствующих модам, экспоненциально затухающим с ростом расстояния r .

Из тождества (10) следует свойство ортогональности с весом $\rho_A(z)$ для собственных функций краевой задачи (6), интегрируемых с квадратом в пространстве $L_2[0; h_N]$:

$$\int_0^{h_N} \rho_A(z) \varphi_n(z) \varphi_m(z) dz = \delta_{n,m} \int_0^{h_N} \rho_A(z) \varphi_n^2(z) dz. \quad (11)$$

Здесь $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера. Отметим, что именно свойство ортогональности позволяет построить в области (A) общее решение, удовлетворяющее неоднородному уравнению Гельмгольца (1).

2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \varphi_k'' + \left(\frac{\omega^2}{c_k^2(z)} - \xi_k^2 \right) \varphi_k &= 0, \\ k &= 1, 2, \dots, N, \\ \varphi_1(0) = 0, \quad \varphi'_N(h_N) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\lim_{z \rightarrow h_k^-} \rho_k \varphi_k(z) = \lim_{z \rightarrow h_{k+1}^+} \rho_{k+1} \varphi_{k+1}(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow h_k^-} \varphi'_k(z) = \lim_{z \rightarrow h_{k+1}^+} \varphi'_{k+1}(z),$$

$$k = 1, 2, \dots, N - 1,$$

где $\varphi_k(z) \equiv \varphi_{k,n}(z)$ при $z \in [h_{k-1}; h_k]$.

Пусть профиль скорости звука $c(z)$ определен системой опорных точек $c(z_i) = c_i$ (в частности, рассчитанных из экспериментальных данных). Тогда отрезок $z \in [0; h]$ разбивается на N частей системой точек $\{h_k\}_{k=0}^N$, $h_0 = 0$, в каждой из которых профиль скорости звука аппроксимируется соотношением $c(z) = c_k(z)$, $z \in [h_{k-1}; h_k]$. Такое представление обеспечивает существование аналитических решений дифференциального уравнения.

Линейно-независимые решения уравнения (12) для аппроксимации вида

$$\left(\frac{\omega}{c_k(z)} \right)^2 = a_k + b_k z \quad (13)$$

при $b_k \neq 0$ выражаются через функции Эйри:

$$\begin{aligned} \varphi_1^k(z, \xi) &= \text{Ai} \left(\frac{\xi^2 - a_k}{\sqrt[3]{b_k^2}} - \sqrt[3]{b_k} z \right), \\ \varphi_2^k(z, \xi) &= \text{Bi} \left(\frac{\xi^2 - a_k}{\sqrt[3]{b_k^2}} - \sqrt[3]{b_k} z \right), \end{aligned} \quad (14)$$

а при $b_k = 0$ – через показательную и тригонометрические функции:

$$\begin{aligned} \varphi_1^k(z, \xi) &= \begin{cases} \cos(\sqrt{a_k - \xi^2} z), & a_k - \xi^2 \geq 0, \\ \exp(\sqrt{\xi^2 - a_k} z), & a_k - \xi^2 < 0, \end{cases} \\ \varphi_2^k(z, \xi) &= \begin{cases} \sin(\sqrt{a_k - \xi^2} z), & a_k - \xi^2 \geq 0, \\ \exp(-\sqrt{\xi^2 - a_k} z), & a_k - \xi^2 < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

В выражениях (13) – (15) принято

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\omega^2}{h_{k+1} - h_k} \left(\frac{h_{k+1}}{c_k^2} - \frac{h_k}{c_{k+1}^2} \right), \\ b_k &= \frac{\omega^2}{h_{k+1} - h_k} \left(\frac{1}{c_{k+1}^2} - \frac{1}{c_k^2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, на отрезке аппроксимации профиля скорости звука $z \in [h_k; h_{k+1}]$ общее решение дифференциального уравнения (12) имеет вид

$$\varphi_k = C_{1,k} \varphi_{1,k}(z) + C_{2,k} \varphi_{2,k}(z), \quad (16)$$

где $\varphi_{1,k}(z)$, $\varphi_{2,k}(z)$ – линейно-независимые решения уравнения (12); $C_{1,k}$ и $C_{2,k}$ – неопределенные коэффициенты. Используя представление (16), получаем из условий (12) следующую однородную систему линейных алгебраических урав-

нений относительно $C_{1,k}$ и $C_{2,k}$, $k=1, 2, \dots, N$:

$$\left\{ \begin{aligned} &\varphi_{1,1}(0)C_{1,1} + \varphi_{2,1}(0)C_{2,1} = 0, \\ &\rho_1\varphi_{1,1}(h_1)C_{1,1} + \rho_1\varphi_{2,1}(h_1)C_{2,1} - \\ &\quad - \rho_2\varphi_{1,2}(h_1)C_{1,2} - \rho_2\varphi_{2,2}(h_1)C_{2,2} = 0, \\ &\varphi'_{1,1}(h_1)C_{1,1} + \varphi'_{2,1}(h_1)C_{2,1} - \\ &\quad - \varphi'_{1,2}(h_1)C_{1,2} - \varphi'_{2,2}(h_1)C_{2,2} = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ &\rho_k\varphi_{1,k}(h_k)C_{1,k} + \rho_k\varphi_{2,k}(h_k)C_{2,k} - \\ &\quad - \rho_{k+1}\varphi_{1,k+1}(h_k)C_{1,k+1} - \\ &\quad - \rho_{k+1}\varphi_{2,k+1}(h_k)C_{2,k+1} = 0, \\ &\varphi'_{1,k}(h_k)C_{1,k} + \varphi'_{2,k}(h_k)C_{2,k} - \\ &\quad - \varphi'_{1,k+1}(h_k)C_{1,k+1} - \\ &\quad - \varphi'_{2,k+1}(h_k)C_{2,k+1} = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ &\varphi'_{1,N}(h_N)C_{1,N} + \varphi'_{2,N}(h_N)C_{2,N} = 0. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

скорости (5):

$$\left\{ \begin{aligned} x_m &= \frac{1}{\gamma_m^A} \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,m} y_n - \frac{iS(\omega)}{4\gamma_m^A} \rho_A(z_0) \times \\ &\quad \times \varphi_{A,m}(z_0) H_0^{(1)}(\xi_{A,m} r_0), \\ y_m &= \frac{1}{\gamma_m^B \xi_{B,m}} \frac{H_0^{(1)}(\xi_{B,m} r_0)}{H_1^{(1)}(\xi_{B,m} r_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_1(\xi_{A,n} r_0)}{J_0(\xi_{A,n} r_0)} \times \\ &\quad \times \xi_{A,n} I_{m,n} x_n + \frac{i\rho_A(z_0) S(\omega)}{4\gamma_m^B \xi_{B,m}} \frac{H_0^{(1)}(\xi_{B,m} r_0)}{H_1^{(1)}(\xi_{B,m} r_0)} \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi_{A,n}}{\gamma_n^A} \varphi_{A,n}(z_0) H_1^{(1)}(\xi_{A,n} r_0) I_{m,n}, \\ &\quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right. \quad (19)$$

В соотношениях (19)

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_0^{h_N} \rho_B(z) \varphi_{A,n}(z) \varphi_{B,m}(z) dz; \\ \gamma_m^\sigma &= \int_0^{h_N} \rho_\sigma(z) \varphi_{\sigma,m}^2(z) dz, \quad \sigma \in \{A, B\}; \\ x_m &= X_m J_0(\xi_{A,m} r_0); \quad y_m = Y_m H_0^{(1)}(\xi_{B,m} r_0). \end{aligned}$$

Приравняв к нулю определитель однородной системы (17), получим дисперсионное уравнение для определения собственных чисел $\{\xi_n\}$:

$$\Delta(\xi) = 0. \quad (18)$$

Элементы определителя (18) выражаются через степенные, тригонометрические, показательные функции и функции Эйри и Бесселя (см. формулы (14), (15)). Следовательно, в комплексной ξ -плоскости существует счетное множество нулей уравнения (18), и краевая задача (12) имеет дискретный спектр $\lambda_n \equiv \xi_n^2$.

После определения собственных чисел из однородной системы (17) находим соответствующие им ненулевые решения $\{C_{1,k}(\xi_n), C_{2,k}(\xi_n)\}$, позволяющие построить общее решение задачи (16).

3. СВЕДЕНИЕ К БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Воспользовавшись условиями непрерывности (4) и свойством ортогональности вертикальных собственных функций, получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов, входящих в выражение для потенциала

При вычислении коэффициентов бесконечной системы (19) основная трудность состоит в вычислении интегралов $I_{m,n}$. В общем случае, их значения могут быть найдены с помощью численных или аналитических процедур. Например, $I_{m,n}$ допускают представление в квадратурах при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c_B^2(z)} - \frac{\omega^2}{c_A^2(z)} &= \mathcal{K} \quad \text{при } z \in [h_{k_1}; h_{k_2}], \\ c_A(z) &= c_B(z) \quad \text{в остальной части волновода.} \end{aligned}$$

(здесь \mathcal{K} – некоторая константа). Кроме того, указанные интегралы вычисляются точно, если скорость звука в морской среде на уровне выступа (или внутри впадины) является постоянной вели-

чиной. Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$I_{m,n} = \frac{1}{\xi_{B,m}^2 - \xi_{A,n}^2} \times \left\{ \sum_{j=1}^N \rho_{B,j} \left[(\varphi_{B,m}^{(j)}(z))' \varphi_{A,n}^{(j)}(z) - \varphi_{B,m}^{(j)}(z) (\varphi_{A,n}^{(j)}(z))' \right] \right\}_{h_{j-1}}^{h_j} + \frac{\mathcal{K}}{(\xi_{B,m}^2 - \xi_{A,n}^2)(\xi_{B,m}^2 - \xi_{A,n}^2 - \mathcal{K})} \times \sum_{j=k_1}^{k_2} \rho_{B,j} \left[(\varphi_{B,m}^{(j)}(z))' \varphi_{A,n}^{(j)}(z) - \varphi_{B,m}^{(j)}(z) (\varphi_{A,n}^{(j)}(z))' \right] \Big|_{h_{j-1}}^{h_j},$$

где $\varphi_{\sigma,n}^{(j)} = \varphi_{\sigma,n}$ при $z \in [h_{j-1}; h_j]$.

Для численного решения бесконечной системы (19) применялся метод редукции: все неизвестные в бесконечной системе, начиная с номера N_r , полагались равными нулю, а уравнения при $m \geq N_r$ отбрасывались. Полученная конечная система линейных алгебраических уравнений решалась относительно неизвестных $x_n, y_n, n=0, 1, \dots, N_r-1$. Особенности применения указанной вычислительной методики в задачах излучения и рассеяния звука подробно изложены в работе [9].

Сходимость метода редукции при решении бесконечных систем (19) для волновода, в котором верхний слой дна, включая выступ, состоит из осадков, иллюстрируется табл. 1, в которой даны значения неизвестных $h_1 x_m$ при различных значениях порядка редукции N_r . Вычисления проводились при следующих параметрах:

- верхний слой дна – $\rho_0 = 1.8 \text{ г/см}^3, c_0 = 1600 \text{ м/с}$;
- морская вода – $\rho_B = 1.0 \text{ г/см}^3, c_B = 1450 \text{ м/с}$.

Из таблицы видно, что наибольшую погрешность несут в себе последние компоненты приближенного решения. При этом неизвестные величины достаточно быстро убывают по мере роста их порядкового номера.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве численного примера приведем расчет поля модуля потенциала скорости $|\Phi|$ для гидроакустического волновода, имеющего глубину

$h_1 = 100 \text{ м}$, с цилиндрическим выступом высотой $0.5h_1$ и радиусом $2h_1$ (рис. 2). Волновод расположен на слое осадков глубиной $h_2 = 2h_1$.

Расчеты выполнялись при единичной интенсивности источника $S(\omega)$ для четырех случаев:

- а) дно и выступ абсолютно жесткие (идеальные граничные условия), что приближенно соответствует модели каменистого грунта;
- б) верхний слой дна, включая выступ, состоит из осадков с параметрами $\rho_0 = 2.0 \text{ г/см}^3, c_0 = 1800 \text{ м/с}$;
- в) выступ, состоящий из осадков с параметрами $\rho_1 = 1.8 \text{ г/см}^3, c_1 = 1600 \text{ м/с}$, расположен на слое с параметрами $\rho_0 = 2.0 \text{ г/см}^3, c_0 = 1800 \text{ м/с}$;
- г) верхний слой дна, включая выступ, состоит из осадков с параметрами $\rho_0 = 1.8 \text{ г/см}^3, c_0 = 1600 \text{ м/с}$.

Параметры морской среды полагались равными $\rho_B = 1.0 \text{ г/см}^3, c_B = 1450 \text{ м/с}$.

Из рис. 2 следует, что во всех исследованных случаях картины изолиний имеют одинаковый качественный характер. Вариации параметров “жидкого” дна приводят лишь к небольшим изменениям потенциала скорости. В основном, различия наблюдаются под выступом около дна, где находится зона повышенных значений амплитуды потенциала скорости, а следовательно, и звукового давления. Такая особенность в распределении звукового давления, наблюдающаяся на низких частотах при различных физических параметрах слоистого дна, является характерной для рассматриваемого типа его геометрии (ступенчатая неровность).

5. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Физическая модель, описанная в предыдущих разделах, обладает значительной степенью идеализации. Исходя из этого, для верификации предложенного подхода к расчету звукового поля было проведено сравнение вычислений с экспериментальными данными, полученными при измерениях в бухте Казачья (г. Севастополь).

Эксперимент проводился при ясной погоде, морское дно – ровное, глубина – 5 м. В качестве источника гармонического сигнала использовался пьезокерамический цилиндр, а в качестве приемника – гидрофон. Все измерительные устройства были откалиброваны в должном порядке.

Табл. 1. Сходимость метода редукции

	$N_r = 10$		$N_r = 25$	
h_1x_0	-0.00039601	+0.00482324i	-0.00040289	+0.00476042i
h_1x_1	0.00015038	+0.00068632i	0.00014437	+0.00068047i
h_1x_2	-0.00027878	-0.00290392i	-0.00029506	-0.00290644i
h_1x_4	-0.00011688	-0.00362165i	-0.00011521	-0.00363183i
h_1x_9	-0.00042777	-0.00010467i	-0.00039300	-0.00013770i
h_1x_{24}	—	—	-0.00000167	+0.00001069i
h_1x_{49}	—	—	—	—
	$N_r = 50$		$N_r = 100$	
h_1x_0	-0.00040399	+0.00475345i	-0.00040441	+0.00475150i
h_1x_1	0.00014343	+0.00067997i	0.00014318	+0.00067984i
h_1x_2	-0.00029728	-0.00290814i	-0.00029789	-0.00290841i
h_1x_4	-0.00011517	-0.00363291i	-0.00011522	-0.00363330i
h_1x_9	-0.00039142	-0.00013848i	-0.00039101	-0.00013867i
h_1x_{24}	0.00000164	+0.00000699i	0.00000138	+0.00000659i
h_1x_{49}	0.00001676	-0.00000256i	-0.00001448	-0.00000373i

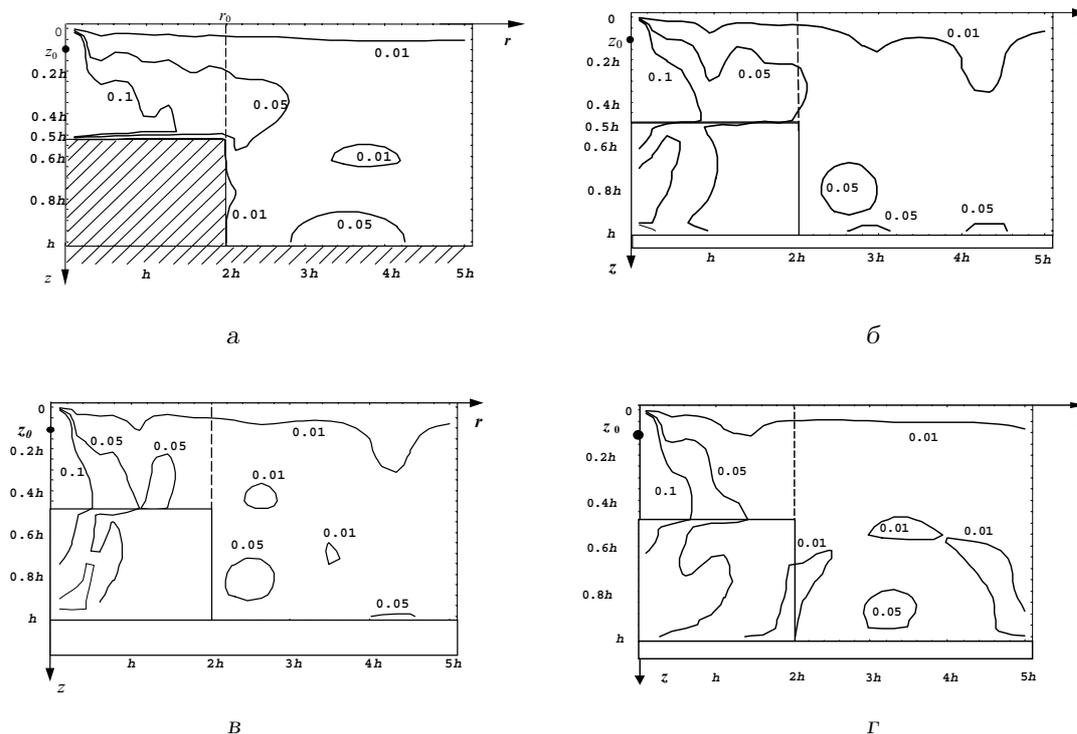


Рис. 2. Изолинии модуля потенциала скорости для источника, расположенного в точке $(0.1h, 0)$, на частоте 100 Гц

Уровень фонового шума по гидрофону в конце измерений составлял 20 мВ. Водный слой имел небольшие вариации температуры: $\Delta t^\circ = 2^\circ\text{C}$ (среднее значение температуры принималось равным $t_{\text{ср}}^\circ = 25^\circ\text{C}$). Средняя скорость звука вычислялась в соответствии с [11]: $c_{\text{ср}} = 1494$ м/с, $\Delta c = 2$ м/с. Над источником звука располагался буй из пенопласта. Замеры амплитуды звукового давления проводились при разных глубинах погружения приемника на расстоянии 5 м от источника.

На рис. 3 показана структура гидроакустического волновода, использованная при построении теоретического решения. Главное отличие этой постановки задачи от постановки, рассмотренной ранее (см. рис. 1), заключается в том, что теперь источник звука полагается линейным, расположенным на отрезке $[z_{01}; z_{02}]$ ($z_{01} = 2$ м, $z_{02} = 3$ м).

Имеющиеся геологические данные свидетельствуют о том, что на месте проведения эксперимента дно состоит из слоя песка, расположенного на каменистом основании. На рис. 3 каменистое дно аппроксимируется абсолютно жестким основанием, а слой песка – “жидким” слоем высотой ($h_3 = 5$ м), характеризующимся плотностью $\rho_0 = 2.0$ г/см³ и скоростью звука $c_0 = 1800$ м/с (данные значения характерны для крупного песка). Физические параметры буя полагались равными $\rho_6 = 0.2$ г/см³; $c_6 = 500$ м/с [12] при размерах $r_0 = 0.5$ м, $h_1 = 0.2$ м.

Потенциал скорости вычисляется для данной модели волновода согласно алгоритму, предложенному в предыдущем разделе. В соответствии с принципом суперпозиции [13], для источника, распределенного вдоль отрезка, с единичной интенсивностью $S(\omega)$ общие решения в областях (A) и (B) (рис. 3) записываются как интегралы от выражений (5) (интегрирование выполняется по области источника – в пределах от z_{02} до z_{01}):

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_A &= \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_{z_{01}}^{z_{02}} \rho_A(z_0) \varphi_{A,n}(z_0) dz_0}{h_N \int_0^{h_N} \rho_A(s) \varphi_{A,n}^2(s) ds} \times \\ &\times \varphi_{A,n}(z) H_0^{(1)}(\xi_{A,n} r) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_{A,n}(z) J_0(\xi_{A,n} r); \\ \tilde{\Phi}_B &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \varphi_{B,n}(z) H_0^{(1)}(\xi_{B,n} r). \end{aligned} \quad (20)$$

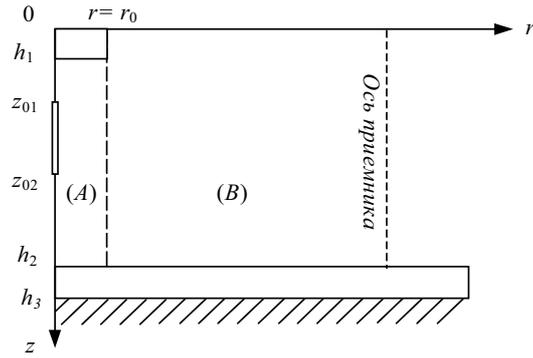


Рис. 3. Модель волновода, используемая для сравнения с экспериментальными данными

Соответствующая бесконечная система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_n, B_n имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} x_m &= \frac{1}{\gamma_m^A} \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,m} y_n - \\ &- \frac{i H_0^{(1)}(\xi_{A,m} r_0)}{4 \gamma_m^A} \int_{z_{01}}^{z_{02}} \rho_A(z_0) \varphi_{A,m}(z_0) dz_0, \\ y_m &= \frac{1}{\gamma_m^B \xi_{B,m}} \frac{H_0^{(1)}(\xi_{B,m} r_0)}{H_1^{(1)}(\xi_{B,m} r_0)} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_1(\xi_{A,n} r_0)}{J_0(\xi_{A,n} r_0)} \xi_{A,n} I_{m,n} x_n + \\ &+ \frac{i}{4 \gamma_m^B \xi_{B,m}} \frac{H_0^{(1)}(\xi_{B,m} r_0)}{H_1^{(1)}(\xi_{B,m} r_0)} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi_{A,n}}{\gamma_n^A} H_1^{(1)}(\xi_{A,n} r_0) I_{m,n} \times \\ &\times \int_{z_{01}}^{z_{02}} \rho_A(z_0) \varphi_{A,m}(z_0) dz_0, \\ & \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \right. \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_0^{h_N} \rho_B(z) \varphi_{A,n}(z) \varphi_{B,m}(z) dz; \\ \gamma_m^\sigma &= \int_0^{h_N} \rho_\sigma(z) \varphi_{\sigma,m}^2(z) dz, \quad \sigma \in \{A, B\}; \\ x_m &= X_m J_0(\xi_{A,m} r_0); \quad y_m = Y_m H_0^{(1)}(\xi_{B,m} r_0). \end{aligned}$$

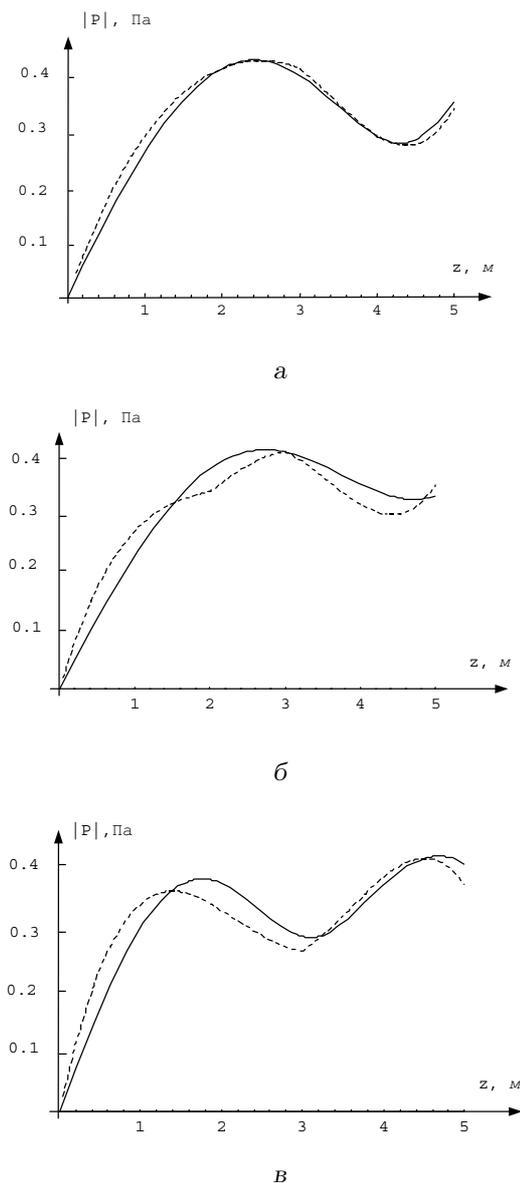


Рис. 4. Модуль амплитуды звукового давления, вычисленный на расстоянии $r = 5$ м от источника:

сплошная – теоретические значения,
штриховая – экспериментальные значения;
а – $\omega = 1000$ Гц, б – $\omega = 1100$ Гц, в – $\omega = 1200$ Гц

Табл. 2. Относительная погрешность совпадения расчетных данных с экспериментальными

Частота, Гц	1000	1100	1200
δ , %	6.8	10.9	11.6

Система (21), как и система (19), решалась методом редукции, что позволило восстановить искомый потенциал скорости. Полученное решение (20) должно совпадать с искомым звуковым давлением с точностью до константы, зависящей от частоты, плотности среды и интенсивности источника. Параметр h_3 , определяющий высоту слоя осадков на абсолютно жестком основании, подбирался с шагом 0.1 м таким образом, чтобы невязка полученного теоретического решения с экспериментальными данными была наименьшей. Его оптимальное значение оказалось равным $h_3 = 7.8$ м, что согласуется с данными о строении морского дна.

На рис. 4 приведены значения нормированного модуля амплитуды звукового давления, рассчитанные из выражения (20) и полученные экспериментально, для различных частот излучения. Значения, полученные в эксперименте, на рисунках аппроксимированы сплайнами. Относительная погрешность совпадения расчетов с экспериментом приведена в табл. 2, из которой следует, что с ростом частоты возрастает и погрешность расчетов. При частотах $\omega \geq 1300$ Гц относительная погрешность превосходит 60 %. По-видимому, это связано со значительной степенью идеализации, характерной для используемой модели (неучет затухания волн при распространении в толще морской воды и при отражении от дна, упрощенная физическая структура и геометрия дна и т. д.). В то же время, удовлетворительным оказалось совпадение с экспериментом на частотах, соответствующих небольшому количеству незатухающих мод в системе (в случае, соответствующем рис. 4, оно составляло 2 ÷ 3). Таким образом, можно сделать вывод о применимости данного подхода в указанном частотном диапазоне.

Для изучения влияния буя на звуковое поле был рассчитан модуль звукового давления в случае, когда буй отсутствует. В отсутствие буя расчетная формула для потенциала скорости имеет более простой вид:

$$\tilde{\Phi} = \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_{z_{01}}^{z_{02}} \rho(z_0) \varphi_n(z_0) dz_0}{\int_0^{h_N} \rho(s) \varphi_n^2(s) ds} \varphi_n(z) H_0^{(1)}(\xi_n r). \quad (22)$$

На рис. 5 приведены значения модулей звукового давления для частоты 1000 Гц, рассчитанные из соотношения (22) и полученные экспериментально (при наличии буя). Наибольшая относительная по-

грешность расчетов составила 7.2 %. Следовательно, влиянием буя в рамках предложенной модели можно пренебречь.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования позволили сделать следующие выводы.

1. Расчет звуковых полей для слоистого волновода на твердом основании, имеющего под источником звука радиально симметричный выступ, показал, что вариация параметров “жидкого” дна приводит к небольшим изменениям потенциала скорости (в основном, под выступом около дна, где находится зона повышенных значений звукового давления). Такая особенность в распределении звукового давления наблюдается при различных физических параметрах слоистого дна и является характерной для рассматриваемого типа его неровностей.
2. Для слоистого волновода на абсолютно жестком основании при наличии буя на поверхности совпадение расчетных значений звукового давления с экспериментальными данными оказалось удовлетворительным для частот, соответствующих относительно небольшому количеству незатухающих мод. Таким образом, предложенный численно-аналитический метод следует применять для частот, на которых в системе существуют две–три распространяющиеся моды.
3. Анализ влияния буя на звуковое поле в плоскостроеном волноводе с абсолютно жестким основанием показал, что присутствие буя не вносит существенных изменений в волновую картину, по сравнению со случаем свободной поверхности волновода.

1. *Акустика океана* / Под ред. Дж. Де Санто.– М.: Мир, 1982.– 318 с.
2. *Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П.* Теоретические основы акустики океана.– Л.: Гидрометеоздат, 1982.– 264 с.

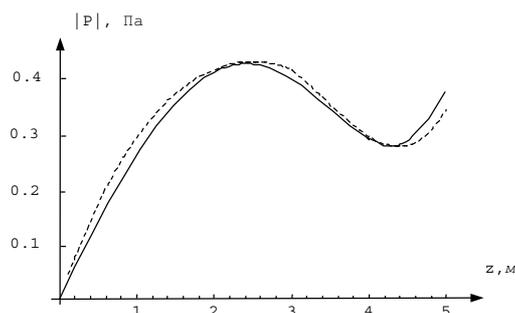


Рис. 5. Модуль амплитуды звукового давления, вычисленный на расстоянии $r=5$ м от источника: сплошная – теоретические значения для модели без буя, штриховая – экспериментальные значения

3. *Бреховских Л. М., Годин О. А.* Акустика слоистых сред.– М.: Наука, 1989.– 416 с.
4. *Акустика океана: 80-ая школа-семинар акад. Л. М. Бреховских / РАН. Ин-т океанологии. Акуст. ин-т. РАО.– М.: Геос, 2000.– 211 с.*
5. *Распространение волн и подводная акустика* / Под ред. Дж. Б. Келлера и Дж. Пападакиса.– М.: Мир, 1980.– 229 с.
6. *Толстой И., Клей К. С.* Акустика океана. Теория и эксперимент в подводной акустике.– М.: Мир, 1969.– 301 с.
7. *Булдырев В. С., Буслаев В. С.* Применение аналитических и численных методов в задачах распространения звука в океане // *Акустические волны в океане*.– М.: Наука, 1987.– С. 24–34.
8. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
9. *Гринченко В. Т., Вовк И. В.* Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках.– К.: Наук. думка, 1986.– 240 с.
10. *Щербак В. В.* Многократные реализации в задачах дифракции // *Доповіді НАН України. Сер. А.*– 1997.– N 4.– С. 103–108.
11. *Егоров Н. И.* Физическая океанография.– Л.: Гидрометеоздат, 1974.– 455 с.
12. *Таблицы физических величин* / Под ред. И. К. Кикоина.– М.: Атомиздат, 1976.– 1006 с.
13. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики.– Л.: Судостроение, 1972.– 352 с.