

УДК 534.23

АКУСТИЧЕСКИЙ ХАОС, ПОРОЖДЕННЫЙ ЭФФЕКТОМ ЗОММЕРФЕЛЬДА – КОНОНЕНКО

Т. С. КРАСНОПОЛЬСКАЯ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 19.08.2002

Рассмотрены колебания бесконечной пластины, контактирующей с акустической средой, которые возбуждаются двигателем ограниченной мощности, расположенном на упругом фундаменте. Изучаемая система разделена на две подсистемы: “двигатель – фундамент” и “фундамент – пластина – среда”. В подсистеме “двигатель – фундамент” обнаружены три класса установившихся режимов: стационарный, периодический и хаотический. Для первого класса режимов колебания пластины и давление в акустической среде описываются периодическими функциями времени, а для второго – модулированными периодическими функциями (в общем случае, содержащими счетное количество гармоник, частоты которых расположены с постоянным интервалом). Колебания и волны, соответствующие третьему классу, описываются хаотическими функциями, имеющими непрерывные частотные спектры. Для системы, в которой двигатель расположен непосредственно на бесконечной пластине (без фундамента), показано, что хаос может возникнуть из-за обратного влияния волн в бесконечной гидроупругой подсистеме на режимы вращения двигателя. В этом случае процесс вращения вала двигателя описывается решением нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка. Здесь возможны три класса установившихся режимов, аналогичные режимам, которые характерны для системы с упругим фундаментом. Показано, что двигатель может генерировать в среде три типа волн: периодические, модулируемые волны с бесконечным числом гармоник или хаотические.

Розглянуті коливання нескінченної пластини, що контактує з акустичним середовищем, збуджувані двигуном обмеженої потужності, розташованим на пружному фундаменті. Досліджувана система розділена на дві підсистеми: “двигун – фундамент” і “фундамент – пластина – середовище”. У підсистемі “двигун – фундамент” виявлені три класи сталих режимів: стаціонарний, періодичний і хаотичний. Для першого класу режимів коливання пластини і тиск в акустичному середовищі описуються періодичними функціями часу, а для другого – модульованими періодичними функціями (в загальному випадку такими, що містять зліченну кількість гармонік, частоти яких розташовані зі сталим інтервалом). Коливання й хвилі, які відповідають третьому класу, описуються хаотичними функціями з неперервними частотними спектрами. Для системи, в якій двигун розташовано безпосередньо на нескінченній пластині (без фундамента), показано, що хаос може виникнути через зворотній вплив хвиль у нескінченній гідроупругій підсистемі на режими обертання двигуна. В цьому випадку процес обертання вала двигуна описується розв’язком нелінійного диференційного рівняння четвертого порядку. Тут можливі три класи сталих режимів, аналогічні режимам, які характерні для системи з пружним фундаментом. Показано, що двигун може генерувати в середовищі три типи хвиль: періодичні, модульовані хвилі з нескінченним числом гармонік або хаотичні.

Vibration of an infinite plate contacting to an acoustic medium, where the plate is subjected to excitation by a motor of limited capacity, is considered. Considered system is divided into two subsystems: “motor – foundation” and “foundation – plate – medium”. In the subsystem “motor – foundation” three classes of steady-state regimes are determined: the stationary, the periodical and the chaotic ones. For the first class of regimes the vibrations of the plate and the pressure in an acoustic fluid are periodic functions of time, and for the second they are modulated periodic functions (in general case, containing the countable set of harmonics having the frequencies at constant interval). The vibration and the waves corresponding to the third class are described by the chaotic functions having the continuous frequency spectra. For the system where the motor stands directly on an infinite plate (without foundation) it is shown that the chaos might occur in the system due to the feedback influence of waves, arising in the infinite hydro-elastic subsystem, onto the regimes of motor shaft rotation. In this case the process of rotation can be described as the solution of the fourth-order nonlinear differential equation. Here exists the same three classes, as for the model with elastic foundation. It is shown that the motor can generate three types of waves in the medium: periodic waves, modulated waves with an infinite number of harmonics, and the chaotic ones.

ВВЕДЕНИЕ

Под эффектом Зоммерфельда – Кононенко [1–3] понимают совокупность специфических явлений, обусловленных взаимодействием механизмов возбуждения (источников энергии) и колебательной нагрузки. Являясь проявлением закона сохранения энергии, этот эффект в той или иной мере присутствует всегда, но особенно существенна его роль в случаях, когда мощность механизма сопоставима с мощностью, потребляемой нагрузкой на внутреннем демпфировании. Это – случай так называемой “ограниченной” мощности механи-

зма или неидеального источника энергии, когда нагрузка находится под “ограниченным” (неидеальным) возбуждением. Довольно полное изучение проявлений указанного эффекта для различных вибрационных нагрузок дано в работах Кононенко [1] и его учеников [4–6]. В них, в частности, показано, что для двигателя с вращающимся валом нагрузка “создает” дополнительный момент, пропорциональный коэффициенту демпфирования, тем самым уменьшая скорость вращения вала.

Отметим, что все машины излучают акустическую энергию, т. е. являются источниками шума.

Как правило, на практике этот фактор рассматривается как нежелательный и вредный. Более того, в некоторых случаях потеря энергии на излучение звуковых и упругих волн в окружающих объектах может оказываться существенной для динамики самих машин и механизмов. Характерные особенности ограниченного возбуждения гидроупругих систем, где существенная доля использованной энергии транспортируется волнами, были изучены в работах [7, 8]. В них рассматривались колебания бесконечной пластины в контакте с акустической средой при возбуждении пластины в некоторой точке или вдоль прямой.

Введение условия ограниченности мощности механизма приводит к тому, что его динамика начинает зависеть от поведения нагрузки, а с математической точки зрения описывается неполной системой уравнений. Замыкание указанной системы осуществляется добавлением уравнения, представляющего поведение нагрузки. Вследствие этого размерность математической модели увеличивается. Известно, что увеличение порядка совокупной математической модели может быть решающим фактором, делающим возможным появление хаотических режимов. В общем случае, хаос может появляться в решениях гладких (дифференцируемых) систем нелинейных уравнений третьего или более высоких порядков [9, 10].

В этом случае механизм не просто количественно “чувствует” эффект нагрузки, но его функционирование может происходить согласно качественно иным законам. До обнаружения хаоса в детерминированных системах при построениях математических моделей различных физических процессов обычно использовался принцип редукции, т. е. деления всего процесса на части и анализа каждой подсистемы в отдельности. Существование хаотических режимов привело к пониманию того, что полная, сложная система может иметь сложный режим поведения именно вследствие взаимодействия между несколькими компонентами. Например, хаос возможен для модели, описывающей двухмодовое приближение в гидроупругой системе “труба – жидкость” [11]. В работах [12 – 17] рассматривались условия возникновения хаоса при взаимодействии между механизмом и вибрационными системами.

Что же такое хаос и как мы понимаем его появление в решениях системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющих теореме Коши о единственности решения? Известно, что решения детерминированной динамической системы не могут быть случайными, так как по теореме Коши однозначно определяются начальными условиями.

Хаотическое поведение отличается от случайного тем, что оно соответствует совокупности решений детерминированной динамической системы. Тенденции решений детерминированной системы к порядку и хаосу в асимптотическом смысле обусловлены локальной устойчивостью и неустойчивостью. Локально устойчивое ограниченное движение – это либо состояние равновесия, либо периодическое (квазипериодическое) движение. Локально же неустойчивое установившееся ограниченное решение определяется как хаотическое. Кроме локальной неустойчивости, важным условием возникновения хаотических движений является отсутствие глобального расширения (ограниченность), т. е. устойчивость по Пуассону. Таким образом, “хаотические движения” определяются как непериодические (апериодические) установившиеся движения, устойчивые по Пуассону, но локально неустойчивые.

Заметим, что когда речь идет о практическом решении нелинейных дифференциальных уравнений, в большинстве случаев они не интегрируются в квадратурах и исследуются обычными численными методами. Каждое численное решение (реализация) однозначно определяется начальными данными. В хаотическом случае все реализации ограничены по величине для любого момента времени (устойчивы по Пуассону), каждая из них однозначно определяется своими начальными условиями (точность задания которых ограничена либо точностью физических измерений, либо точностью задания чисел в современных вычислительных машинах) и две близкие в начальный момент траектории (реализации) экспоненциально удаляются друг от друга со временем. В силу принципиальной невозможности задать начальные условия с абсолютной точностью, два близких в начальный момент решения через конечный (иногда довольно большой) интервал времени могут оказаться на значительном расстоянии друг от друга. На неустойчивость как причину непредсказуемости указывал А. Пуанкаре [18]. Аналогичная аргументация имеется и у Н. С. Крылова [19]. Она сводится к тому, что события, возникающие в результате неустойчивых движений, непредсказуемы, так как сколь бы точно ни были заданы начальные условия (а их точность практически всегда ограничена), спустя достаточно большое время малейшее отклонение в их значениях приводит к ощутимым различиям.

Подчеркнем, что хаотические решения можно охарактеризовать только как совокупность численных реализаций, так как каждое решение в от-

дельности не представляет достаточной информации о поведении системы: нет однозначного соответствия между параметрами решения и моментами времени в силу невозможности точно задать начальные условия. При этом состояние физической системы описывается как имеющее параметры решения в некотором диапазоне значений, (“блуждающие” параметры).

В данной работе изучаются возможности появления хаотических и регулярных режимов взаимодействия между двигателем ограниченной мощности, имеющим некоторый эксцентриситет, и упругой бесконечной пластиной, контактирующей с акустической средой. Впервые на возможность акустического хаоса в подобной системе было указано в работе [17]. Ниже будут рассмотрены две различные математические модели исследуемой физической системы. В первой пластина подвергается возбуждению двигателем через упругий фундамент, а во второй – находится под непосредственным воздействием двигателя.

1. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В реальных условиях машины устанавливаются на фундаментах, обладающих некоторой упругостью, а в процессе работы генерируют шум, излучаемый в окружающее пространство. Таким образом происходит взаимодействие машины, выступающей в качестве механизма возбуждения, с подсистемами, имеющими различную физическую природу. В качестве примера рассмотрим двигатель ограниченной мощности с эксцентриком [1], установленный на фундаменте. Фундамент моделируем одноступенной упругой системой – нелинейной пружиной (рис. 1). Будем считать, что последняя соединена с бесконечной упругой пластиной, контактирующей с акустическим полупространством. Пусть упругая пластина имеет толщину h и плотность ρ_0 , ее срединная поверхность совпадает с плоскостью $x=0$, а полупространство $x<0$ заполнено жидкостью с плотностью ρ и скоростью звука c . Будем также полагать, что пружина имеет жесткость $c_0 - \gamma u^2$ (где u – деформация пружины) и помещена в точку O , являющуюся началом цилиндрической системы координаты r, φ, x . Полагаем, что двигатель со статической массой M имеет дисбаланс – неуравновешенную массу m – на расстоянии a от оси вращения вала. При вращении вала вертикальная составляющая силы инерции, возникающей вследствие дисбаланса, составляет $-ma d^2(\cos \Theta)/dt^2$, где Θ – угол поворота вала, отсчитываемый от верхнего положения верти-

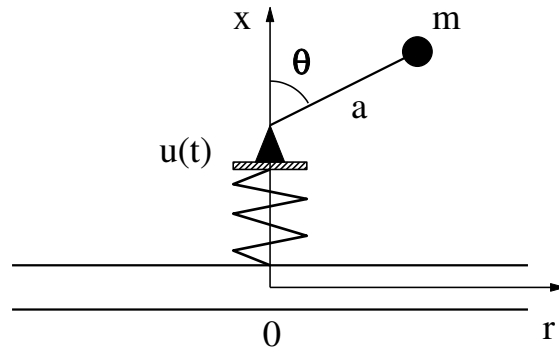


Рис. 1. Схема рассматриваемой системы

кальной оси. При возбуждении системы двигателем с ограниченной мощностью угловая скорость вала $\dot{\Theta} = d\Theta/dt$ не является заданной величиной, а представляет собой дополнительную неизвестную функцию. Причиной этого является то, что вращение вала находится под влиянием обратного воздействия колебаний пружины и пластины, а также волн в гидроупругой системе.

Уравнения, описывающие упругие вибрации фундамента $u(t)$ и изгибные колебания пластины $w(r, t)$, запишем в виде [1, 6–8]

$$M \left[\ddot{u} + \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial t^2} \right] + \kappa_0 \dot{u} + c_0 u - \gamma u^3 = ma \frac{d^2(\cos \Theta)}{dt^2}, \tag{1}$$

$$D \Delta^2 w(r, t) + \rho_0 h \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial t^2} = (c_0 u - \gamma u^3) \frac{\delta(r)}{2\pi r} + p(r, 0, t),$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r};$$

κ_0 – коэффициент демпфирования; D – изгибная жесткость пластины; $\delta(r)$ – функция Дирака; $p(r, x, t)$ – акустическое давление в жидкости (при $x < 0$), удовлетворяющее волновому уравнению

$$\Delta p(r, x, t) + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{c^2 \partial t^2}. \tag{2}$$

В уравнении (1) и везде ниже точкой над переменной обозначаем полную производную по времени d/dt (чтобы отличить ее от $\partial/\partial t$ для величин, зависящих также от пространственных координат).

Если бы мы исследовали колебания фундамента и пластины при действии двигателя бесконеч-

но большой мощности, то величину силы инерции $-ma d^2(\cos \Theta)/dt^2$ можно было бы считать заданной и система уравнений (1), (2) была бы замкнутой. Однако для рассматриваемого случая в математической модели колебаний фундамента и пластины с “ограниченным” возбуждением необходимо учесть дополнительное уравнение вращения вала (с учетом эффекта Зоммерфельда – Кононенко). Это уравнение имеет вид

$$I\ddot{\Theta} = L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) + ma \sin \Theta \left[g + \ddot{u} + \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial t^2} \right]. \quad (3)$$

Здесь I – момент инерции вала ротора; $L(\dot{\Theta})$ – движущий момент; $H(\dot{\Theta})$ – момент сил сопротивления двигателя [1, 2]; g – ускорение свободного падения.

Система нелинейных уравнений (1)–(3) описывает сложный процесс перераспределения энергии двигателя в акустическое поле и колебания фундамента с пластиной. Особо подчеркнем, что, как следует из геометрических соображений, взаимодействие между вибрациями $u(t)$ и вращением вала, описываемым углом $\Theta(t)$, в принципе, всегда нелинейно. Чтобы упростить решение нелинейной системы дифференциальных уравнений, рассмотрим случай резонансных колебаний фундамента и предположим, что $u(t) > w(r, t)$. Тогда исследуемую систему уравнений (1)–(3) можно разделить на две подсистемы. Первая из них описывает процесс резонансных колебаний фундамента, возбуждаемых двигателем ограниченной мощности:

$$M\ddot{u} + \kappa_0 \dot{u} + c_0 u - \gamma u^3 = ma \frac{d^2(\cos \Theta)}{dt^2}, \quad (4)$$

$$I\ddot{\Theta} = L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) + ma \sin \Theta [g + \ddot{u}].$$

Вторая, связанная с первой, описывает динамику бесконечной гидроупругой системы:

$$D\Delta^2 w + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (c_0 u - \gamma u^3) \frac{\delta(r)}{2\pi r} + p(r, 0, t), \quad (5)$$

$$\Delta p + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{c^2 \partial t^2}.$$

Ограничимся рассмотрением установившихся режимов взаимодействия подсистем (4) и (5). Для этого введем малый положительный параметр

$$\epsilon = \frac{m}{M}. \quad (6)$$

Вращательную скорость вала $\dot{\Theta}$ считаем близкой к собственной частоте фундамента $\omega_0 = (c_0/M)^{1/2}$.

Математически это резонансное условие можно записать как

$$\dot{\Theta} = \omega_0 + \frac{1}{2} \epsilon^{2/3} \omega_0 \nu(\tau), \quad (7)$$

где $\tau = \epsilon^{2/3} \Theta(t)/2$ – введенное “медленное” время (по определению [20] медленной переменной называется такая переменная $y(t)$, для которой $\dot{y}(t) = O(\epsilon)$). Резонансное решение для u ищем в форме

$$u(t) = \epsilon^{1/3} a [\alpha(\tau) \cos \Theta + \beta(\tau) \sin \Theta]. \quad (8)$$

Тогда для новых безразмерных переменных $\alpha(\tau)$ и $\beta(\tau)$ после усреднения по “быстрому” времени $\Theta(t)$ получаем систему уравнений

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = -\eta\alpha - \nu\beta - \gamma_1(\alpha^2\beta + \beta^3), \quad (9)$$

$$\frac{d\beta}{d\tau} = -\eta\beta + \nu\alpha + \gamma_1(\alpha^3 + \alpha\beta^2) + 1,$$

где

$$\eta = \frac{\kappa_0}{M\epsilon^{2/3}\omega_0}; \quad \gamma_1 = \frac{3\gamma}{4M\omega_0^2}.$$

Напомним, что, согласно [20], быстрая переменная $y_1(t)$ характеризуется масштабом изменения во времени $\dot{y}(t) = O(1)$.

Поскольку мы исследуем установившиеся режимы взаимодействия, то в качестве движущего момента в двигателе $L(\dot{\Theta})$ будем использовать его статическую характеристику [1]:

$$(L - H)I^{-1} = 2\epsilon^{2/3}\omega_0^{-1}M_1(\dot{\Theta}).$$

Введя замену переменных

$$\dot{\Theta} = \Omega(\tau) \quad (10)$$

и используя процедуру усреднения по быстрому времени Θ , запишем уравнение для Ω в виде

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = M_1(\Omega) - \mu\beta. \quad (11)$$

Здесь $\mu = m^{1/3}M^{2/3}a^2\omega_0 I^{-1}$. Аппроксимируем статическую характеристику двигателя линейной функцией:

$$M_1(\Omega) = N_0 - N_1\Omega, \quad (12)$$

где N_0, N_1 – постоянные. Тогда справедливо следующее уравнение для переменной расстройки частоты ν :

$$\frac{d\nu}{d\tau} = N_2 - N_1\nu - \mu_1\beta. \quad (13)$$

Здесь $N_2 = 2M^{2/3}m^{-2/3}(N_0\omega_0^{-1} - N_1)$; $\mu_1 = 2M^{4/3}m^{-1/3}a^2I^{-1}$. Таким образом, сложное

резонансное взаимодействие между колебаниями фундамента и вращением вала приводит к рассмотрению двух нелинейных связанных уравнений (9) и линейного уравнения (13).

Заметим, что даже если фундамент аппроксимируется линейной характеристикой ($\gamma_1=0$), процесс взаимодействия остается нелинейным, как и система уравнений (9), (13). Следует подчеркнуть, что при идеальном (неограниченном) возбуждении колебаний “линейного” фундамента система усредненных уравнений (9) будет двухпараметрической (с двумя постоянными параметрами η и ν), т. е. без хаотических режимов. В то же время, при рассмотрении ограниченного возбуждения ν становится дополнительной переменной, что, в принципе, может приводить к хаотизации в системе уравнений (9), (13), так как ее размерность равна трем, а уравнения (9) содержат нелинейные члены $\nu\alpha$ и $\nu\beta$.

2. УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Установившиеся режимы, реализующиеся в системе уравнений (9), (13), соответствуют асимптотическим траекториям в трехмерном фазовом пространстве (α, β, ν) . Возможны следующие типы асимптотических траекторий: некоторая фиксированная точка (размерность ноль), замкнутая кривая (размерность единица), тор (размерность два), странный аттрактор (фрактальная размерность). Все они, кроме последнего, являются регулярными. Фиксированные точки (точки равновесия) соответствуют стационарным решениям системы, когда

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{d\beta}{d\tau} = \frac{d\nu}{d\tau} = 0. \quad (14)$$

Замкнутые кривые в фазовом пространстве и кривые на торе описывают соответственно периодически и квазипериодически изменяющиеся $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ и $\nu(\tau)$. Странному аттрактору, когда $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ и $\nu(\tau)$ изменяются непредсказуемо, соответствует хаотический установившийся режим в регулярной системе уравнений (9), (13).

В результате численных экспериментов в рассматриваемой системе обнаружены все возможные типы траекторий, как регулярные, так и хаотические. Заметим, что при этом использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка.

Система уравнений (9), (13) содержит пять параметров $(\eta, \gamma_1, N_2, N_1, \mu_1)$, которые, в совокупности с начальными условиями, определяют ее поведение в установившихся режимах. При расчетах

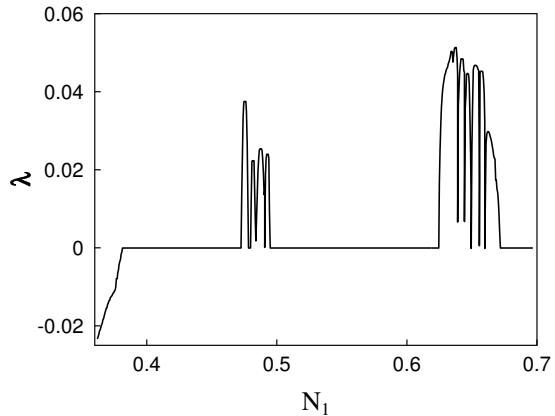


Рис. 2. Зависимость максимального показателя Ляпунова λ_0 от значений параметра N_1

принималось, что

$$\eta=0.1, \quad \gamma_1=0.125, \quad N_2=0.04, \quad \mu_1=0.5. \quad (15)$$

Параметр N_1 рассматривался как бифуркационный и варьировался с целью определения всех возможных классов асимптотических траекторий. За исключением специально оговоренных случаев, начальные условия полагались нулевыми:

$$\alpha(0) = \beta(0) = \nu(0) = 0.$$

Как отмечено выше, хаотические решения обладают свойством локальной неустойчивости. Математически это выражается в том, что для них положителен хотя бы один (максимальный) показатель Ляпунова λ_0 . Поэтому существование при определенной комбинации параметров $\lambda_0 > 0$ является одним из критериев установления в системе хаотических режимов. На рис. 2 показана зависимость максимального показателя Ляпунова для системы (9), (13) от параметра N_1 . Для определения этого показателя использован алгоритм Бенеттина [21]. Из рисунка видно, что в системе имеются две области хаотических режимов: $0.489 \leq N_1 \leq 0.506$ и $0.631 \leq N_1 \leq 0.671$.

При $0 < N_1 < 0.382$ в системе существует положение устойчивого равновесия, соответствующее первому классу установившихся режимов – стационарному. Периодические же решения системы реализуются при значениях параметра N_1 , лежащих в интервалах $0.382 \leq N_1 < 0.489$, $0.506 < N_1 < 0.631$ и $0.671 < N_1 < 3.0$.

При $N_1=0.70$ искомые переменные являются периодическими функциями, а в фазовом пространстве им соответствует двухоборотный предельный цикл (рис. 3, а). На рис. 3, б показаны гра-

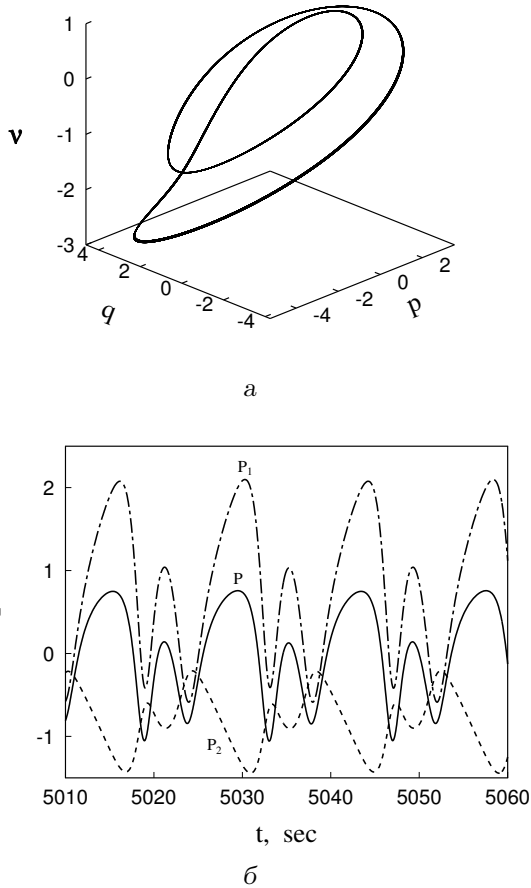


Рис. 3. Периодический режим для $N_1=0.70$:
 а – траектория в фазовом пространстве,
 б – мощности P_1 , P_2 и P

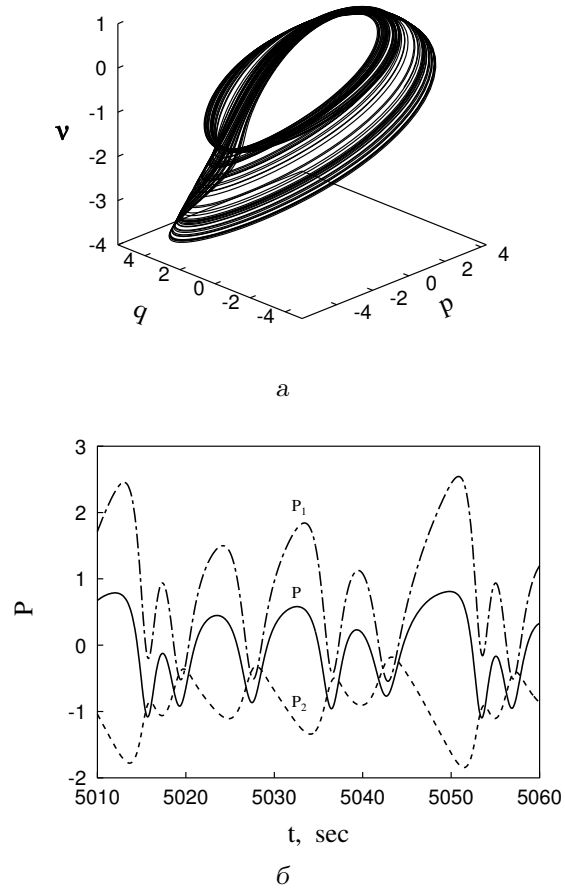


Рис. 4. Хаотический режим для $N_1=0.64$:
 а – траектория в фазовом пространстве,
 б – мощности P_1 , P_2 и P

фики безразмерных мощностей: мощности двигателя $P_1 = N_2 - N_1 \nu$, мощности, потребляемой при колебаниях фундамента, $P_2 = -\eta \mu_1 (\alpha^2 + \beta^2)$ и совокупной мощности $P = P_1 + P_2$.

Периодический характер изменения мощностей четко прослеживается на рис. 3, б, причем период их изменения $T \approx 14$ с. Естественно, мощность P_2 , потребляемая фундаментом, в течение этого времени остается отрицательной. Мощность двигателя P_1 на отдельных временных отрезках также может становиться отрицательной, но ее среднее значение за период положительно и равно 0.9. Средняя же за период величина P_2 равна -0.9 . Как и следовало ожидать, для установившихся режимов совокупная мощность колеблется в течение периода T вокруг нулевого значения.

Хаотическая траектория (хаотический аттрактор), реализуемая в системе при $N_1 = 0.64$, показана на рис. 4, а. Временные зависимости мощностей для этого случая приведены на рис. 4, б. Ви-

дно, что здесь, также как и в периодических режимах, совокупная мощность $P = P_1 + P_2$ колеблется вокруг нуля, однако не существует постоянного периода (в медленном времени), в течение которого усредненная величина этой мощности равнялась бы нулю.

Таким образом, в системе “двигатель – фундамент” обнаружены три класса установившихся режимов:

- 1) стационарные режимы (колебания фундамента происходят с постоянной амплитудой и частотой, а вал двигателя вращается с постоянной скоростью);
- 2) режимы с периодически изменяющимися амплитудой и частотой колебаний фундамента, скорость вала периодически изменяется во времени;
- 3) хаотические режимы (амплитуда и частота

колебаний, а также скорость вращения двигателя изменяются во времени хаотично).

Последний режим устанавливается в системе асимптотически и она не может выйти из него без дополнительного внешнего воздействия.

3. РЕГУЛЯРНЫЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В БЕСКОНЕЧНОЙ ГИДРОУПРУГОЙ СИСТЕМЕ

Решения системы (5) будем искать с учетом естественного граничного условия непрерывности нормальной компоненты скорости при переходе от пластины к жидкости:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = v_x, \quad x = 0.$$

Воспользовавшись связью между акустическим давлением и колебательной скоростью в среде

$$\frac{\partial p(r, x, t)}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v_x}{\partial t},$$

преобразуем граничное условие в равенство

$$-\rho \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial p(r, x, t)}{\partial x}, \quad x = 0. \quad (16)$$

Применим метод интегральных преобразований Лапласа по времени и Ханкеля по радиальной координате. Общие выражения для прогиба пластины и давления в жидкости представим в виде [22–24]

$$\begin{aligned} w(r, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_0^\infty \zeta_1(\lambda, s) J_0(\lambda r) \lambda e^{st} d\lambda ds, \\ p(r, x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_0^\infty \zeta_2(\lambda, s) J_0(\lambda r) \times \\ &\times e^{x\sqrt{\lambda^2+s^2/c^2}} \lambda e^{st} d\lambda ds. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $J_0(\lambda r)$ – функция Бесселя нулевого порядка. Знак у квадратного корня в экспоненте (17) всегда выбирается положительным, чтобы выполнялось условие $\sqrt{\lambda^2+s^2/c^2} > 0$ и давление при $x \rightarrow -\infty$ не возрастало.

Удовлетворение граничного условия (16) приводит к следующей связи изображений искомых функций $\zeta_1(\lambda, s)$ и $\zeta_2(\lambda, s)$:

$$\zeta_2(\lambda, s) = -\frac{\rho s^2}{\sqrt{\lambda^2 + s^2/c^2}} \zeta_1(\lambda, s). \quad (18)$$

Преобразовав по Лапласу функцию $c_0 u - \gamma u^3$, введем в рассмотрение функцию-изображение:

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \int_0^\infty [c_0 u(t) - \gamma u^3(t)] e^{-st} dt = \\ &= \int_0^\infty [\epsilon^{1/3} a c_0 (\alpha \cos \Theta + \beta \sin \Theta) - \\ &- \epsilon a^3 \gamma (\alpha \cos \Theta + \beta \sin \Theta)^3] e^{-st} dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда искомое решение запишется как

$$\begin{aligned} w(r, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_0^\infty \frac{\Phi(s)}{\xi(\lambda, s)} J_0(\lambda r) \lambda e^{st} d\lambda ds, \\ p(r, x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_0^\infty \frac{\rho s^2 \Phi(s)}{\xi(\lambda, s)} J_0(\lambda r) \lambda \times \\ &\times e^{st} \frac{e^{x\sqrt{\lambda^2+s^2/c^2}}}{\sqrt{\lambda^2 + s^2/c^2}} d\lambda ds. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь

$$\xi(\lambda, s) = D\lambda^4 + \rho_0 h s^2 + \frac{\rho s^2}{\sqrt{\lambda^2 + s^2/c^2}}. \quad (21)$$

Таким образом, по изображению функции силового воздействия и соотношениям (20) можно определить конкретный вид решения для изгибных колебаний пластины $w(r, t)$ и акустического давления $p(r, x, t)$.

Для первого класса установившихся режимов колебаний фундамента, когда $u(t)$ является периодической функцией времени с постоянными амплитудами α_0, β_0 и частотой Ω_0 , колебания пластины $w(r, t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} w(r, t) &= \frac{c_1 \alpha_0 - 3\gamma_2 \alpha_0^3/4}{2\pi} \mathbf{Re} \left[e^{-i\Omega_0 t} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r) \lambda}{\xi(\lambda, i\Omega_0)} d\lambda \right] + \\ &+ \frac{c_1 \beta_0 - 3\gamma_2 \beta_0^3/4}{2\pi} \mathbf{Im} \left[e^{-i\Omega_0 t} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r) \lambda}{\xi(\lambda, i\Omega_0)} d\lambda \right] - \\ &- \frac{\gamma_2 \alpha_0^3}{8\pi} \mathbf{Re} \left[e^{-3i\Omega_0 t} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r) \lambda}{\xi(\lambda, 3i\Omega_0)} d\lambda \right] + \\ &+ \frac{\gamma_2 \beta_0^3}{8\pi} \mathbf{Im} \left[e^{-3i\Omega_0 t} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r) \lambda}{\xi(\lambda, 3i\Omega_0)} d\lambda \right], \end{aligned}$$

где $c_1 = \epsilon^{1/3} a c_0$; $\gamma_2 = \epsilon a^3 \gamma$; \mathbf{Re} и \mathbf{Im} обозначают действительную и мнимую части функции.

Для второго класса установившихся режимов колебаний фундамента $u(t)$ представляет собой модулированную периодическую функцию (амплитуда и частота которой также являются периодическими функциями времени). В этом случае колебания пластины и давление в жидкости описываются сложными, но регулярными функциями времени, содержащими бесконечное число гармоник ряда Фурье. Рассмотрим этот режим подробнее. Пусть решение системы уравнений (9), (13) – периодическое, в наиболее простом случае описывающееся функциями

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 \cos \omega \tau = \alpha_1 \cos(\epsilon^{2/3} \omega_0 \omega t / 2), \\ \beta &= \beta_1 \sin \omega \tau = \beta_1 \sin(\epsilon^{2/3} \omega_0 \omega t / 2), \\ \nu &= \nu_1 \cos \omega \tau = \nu_1 \cos(\epsilon^{2/3} \omega_0 \omega t / 2),\end{aligned}\quad (22)$$

где α_1, β_1, ν_1 – постоянные величины; ω – безразмерная круговая частота цикла. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{u(t)}{a} &= \epsilon^{1/3} \alpha_1 \cos(\epsilon^{2/3} \omega_0 \omega t / 2) \times \\ &\times \cos\left(\omega_0 t + \frac{\nu_1}{\omega} \sin(\epsilon^{2/3} \omega_0 \omega t / 2) - \frac{\nu_1}{\omega}\right) + \\ &+ \epsilon^{1/3} \beta_1 \sin(\epsilon^{2/3} \omega_0 \omega t / 2) \times \\ &\times \sin\left(\omega_0 t + \frac{\nu_1}{\omega} \sin(\epsilon^{2/3} \omega_0 \omega t / 2) - \frac{\nu_1}{\omega}\right) = \\ &= F_1(t) \cos\left(\frac{\nu_1}{\omega} \sin(\epsilon^{2/3} \omega_0 \omega t / 2)\right) + \\ &+ F_2(t) \sin\left(\frac{\nu_1}{\omega} \sin(\epsilon^{2/3} \omega_0 \omega t / 2)\right) = \\ &= F_1(t) \left[J_0\left(\frac{\nu_1}{\omega}\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}\left(\frac{\nu_1}{\omega}\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos(k \epsilon^{2/3} \omega_0 \omega t) \right] + \\ &+ 2 F_2(t) \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}\left(\frac{\nu_1}{\omega}\right) \times \\ &\quad \times \sin((k-1/2) \epsilon^{2/3} \omega_0 \omega t),\end{aligned}\quad (23)$$

где F_1 и F_2 – периодические функции с частотой Ω_1 , причем

$$\begin{aligned}\Omega_k &= \omega_0 \pm \frac{k}{2} \epsilon^{2/3} \omega_0 \omega, \\ k &= 1, 2, \dots, \infty.\end{aligned}\quad (24)$$

Пример спектральной плотности и временной зависимости функции $u(t)/a$, характерных для модулированного периодического режима, приведен на рис. 5. Расчет проводился при $\epsilon=0.1$, $f_0=\omega_0/(2\pi)\approx 1.44$ Гц и $N_1=0.70$.

Как видно из графика, главный пик частотного спектра соответствует $f_0(1-3\epsilon^{2/3}/2)$, а остальные расположены регулярно с интервалом $f_d=\epsilon^{2/3}\omega f_0/2$. В этом случае, вследствие линейности задачи, выражения (20) для w и p будут представлять собой бесконечные суммы слагаемых вида

$$\begin{aligned}p &\ni -e^{i\Omega_k t} \int_0^{\infty} \frac{J_0(\lambda r) \lambda \rho \Omega_k^2}{\xi(\lambda, i\Omega_k) \sqrt{\lambda^2 - \frac{\Omega_k^2}{c^2}}} \times \\ &\quad \times e^{x \sqrt{\lambda^2 - \frac{\Omega_k^2}{c^2}}} d\lambda, \\ w &\ni e^{i\Omega_k t} \int_0^{\infty} \frac{J_0(\lambda r) \lambda}{\xi(\lambda, i\Omega_k)} d\lambda, \\ k &= 1, 2, \dots, \infty.\end{aligned}\quad (25)$$

Для каждой частоты Ω_k в отдельности необходимо рассматривать задачу о волнах, возбуждаемых в гидроупругом полупространстве. Для этого следует выполнить обратное преобразование Ханкеля с учетом особенностей подынтегрального выражения. Заметим, что на рис. 5 видны девять пиков с уровнями, превышающими -20 дБ относительно максимума. Из этого следует, что основная энергия системы сосредоточена между 0.6 и 1.4 Гц. Таким образом, w и p можно с достаточной точностью аппроксимировать суммой девяти решений для указанных Ω_k .

Наконец, для третьего класса установившихся режимов колебаний фундамента, когда $u(t)$ является хаотической функцией с хаотически изменяющейся частотой, функция $u(t)$ имеет непрерывный спектр. Спектральная плотность и временная реализация $u(t)/a$ для хаотического режима представлены на рис. 6 и 7. Заметим, что диапазоны основного сосредоточения энергии здесь практически те же, что и для регулярного режима. Поэтому, в отличие от рис. 5, эти спектры приведены для частот $0.6 \div 1.4$ Гц. Расчет проводился при $\epsilon=0.1$, $f_0 \approx 1.44$ Гц и $N_1=0.64$ (рис. 6 соответствует нулевым начальным условиям, а рис. 7 – условиям, в которых от нуля отлична только одна из амплитуд: $\alpha(0)=0.01$). Все решения анализировались по истечении интервала времени, достаточного для завершения переходных процессов

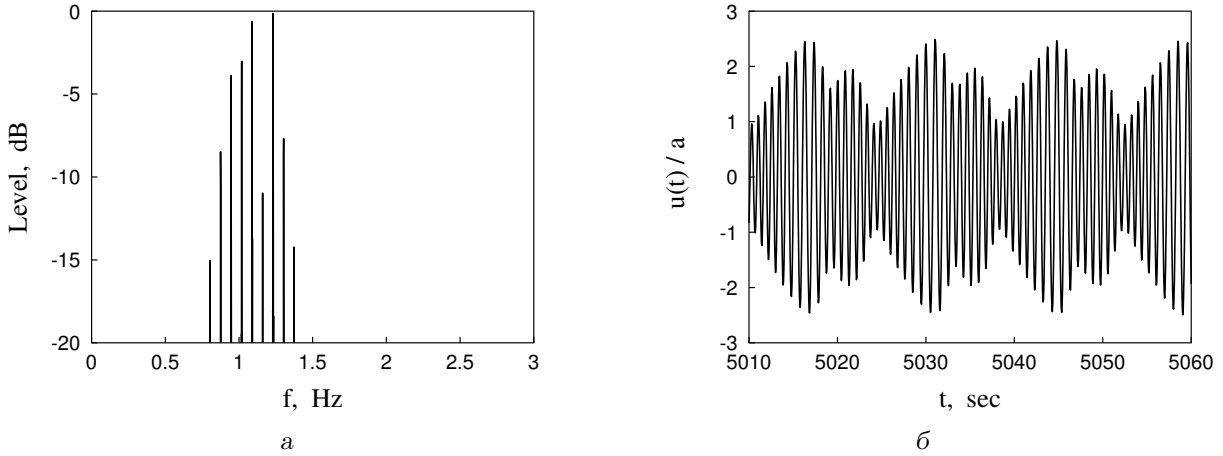


Рис. 5. Периодический режим для $N_1=0.70$:
 а – спектральная плотность, б – временная зависимость u/a

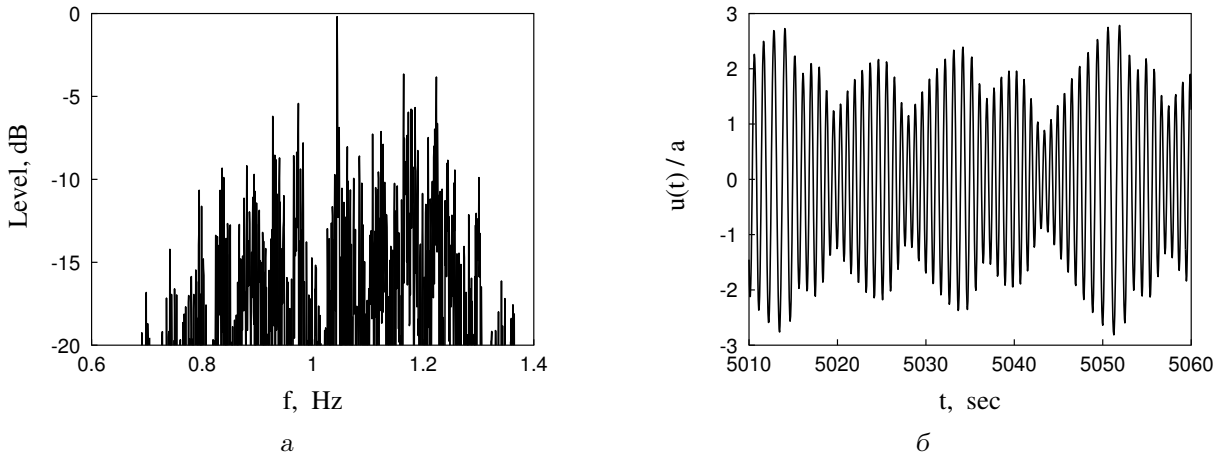


Рис. 6. Хаотический режим для $N_1=0.64$ и нулевых начальных условий:
 а – спектральная плотность, б – временная зависимость u/a

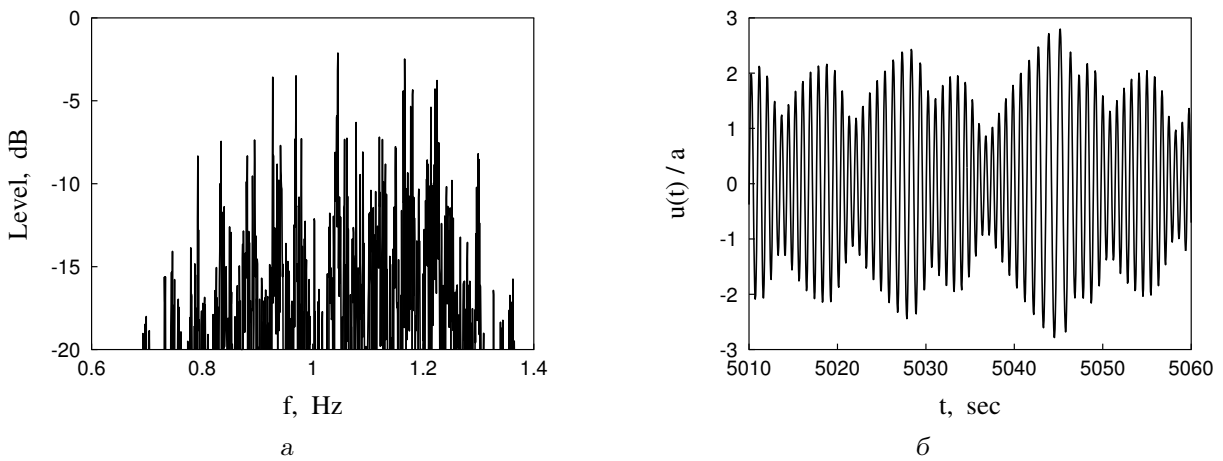


Рис. 7. Хаотический режим для $N_1=0.64$ и $\alpha(0)=0.01$:
 а – спектральная плотность, б – временная зависимость u/a

($t > 5 \cdot 10^4$ с).

Различия в частотных спектрах и временных реализациях для рассматриваемых режимов свидетельствуют о том, что малое (порядка ϵ^2) различие в начальных условиях приводит к существенным изменениям траекторий и спектральных плотностей вследствие хаотического поведения расстройки частот ν . Следовательно, спектральные плотности колебаний пластины w и давления $p(r, x, t)$ в жидкости, реализуемые при хаотических режимах колебаний фундамента, также будут непрерывны.

4. О ВОЗМОЖНОСТИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ХАОСА В СИСТЕМЕ “ДВИГАТЕЛЬ – ПОЛУБЕСКОНЕЧНАЯ ГИДРОУПРУГАЯ ПОДСИСТЕМА”

Рассмотрим возможность появления хаотических волн в системе “двигатель – полубесконечная гидроупругая подсистема”. В этом случае мы предполагаем, что двигатель стоит непосредственно на упругой бесконечной пластине без фундамента. Согласно [7], уравнения, описывающие процесс взаимодействия, представим в виде

$$\begin{aligned}
 I\ddot{\Theta} &= L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) + \\
 &+ ma \sin \Theta \left[g + \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial t^2} \right], \\
 D\Delta^2 w(r, t) + \rho_0 h \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial t^2} &= \\
 &= (\dot{\Theta}^2 \cos \Theta + \ddot{\Theta} \sin \Theta) \frac{\delta(r)}{2\pi r} + p(r, 0, t).
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Изгибные перемещения и изменение давления в этом случае могут быть записаны в форме, аналогичной выражению (20), но при

$$\Phi(s) = \frac{ma}{2\pi} \int_0^\infty [\dot{\Theta}^2 \cos \Theta + \ddot{\Theta} \sin \Theta] e^{-st} dt. \tag{27}$$

Вращение вала двигателя ограниченной мощности описывается уравнением, учитывающим обратное влияние колебаний пластины:

$$\begin{aligned}
 I\ddot{\Theta} &= L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) + ma \sin \Theta \times \\
 &\times \left[g + \frac{ma}{(2\pi)^2 i} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_0^\infty \frac{\lambda e^{st}}{\xi(\lambda, s)} \times \right. \\
 &\times \left. \left(\int_0^\infty (\dot{\Theta}^2 \cos \Theta + \ddot{\Theta} \sin \Theta) e^{-st} dt \right) d\lambda ds \right].
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Ясно, что соотношение (28) – нелинейное интегродифференциальное уравнение относительно переменной Θ . Воспользовавшись приближенным представлением обратного преобразования Ханкеля в точке $r=0$, из него получаем нелинейное уравнение четвертого порядка относительно времени. Это означает, что в рассматриваемой системе, в принципе, возможны установившиеся хаотические режимы. Кроме того, здесь существуют два класса установившихся регулярных решений: стационарных и периодических (или квазипериодических). Как и в модели, рассмотренной выше, в установившихся режимах вращения вала двигатель воздействует на бесконечную упругую пластину моногармонически, по модулированному периодическому закону с бесконечным (счетным) количеством гармоник, или хаотически. Как видно из уравнений (20) – (25), каждое из указанных воздействий может приводить к возбуждению соответствующего класса волновых движений в полубесконечной гидроупругой системе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проанализированы установившиеся режимы взаимодействия между полубесконечной гидроупругой системой и двигателем ограниченной мощности в двух моделях: двигатель, установленный на фундаменте, и двигатель, непосредственно воздействующий на гидроупругую систему. Продемонстрирована возможность возбуждения акустических хаотических волн в первой из рассматриваемых моделей. Эти волны являются результатом установившихся режимов нелинейного взаимодействия в подсистеме “двигатель – фундамент”. В случае, когда двигатель непосредственно установлен на бесконечной пластине, возможны хаотические режимы вращения его вала, вызванные обратным влиянием полубесконечной гидроупругой подсистемы, что, в свою очередь, порождает хаотические волны в последней. Полученные результаты могут быть использованы, в частности, при оценке шумов и волн, генерируемых машинными отделениями судов.

1. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. – М.: Наука, 1964. – 256 с.
2. Sommerfeld A. Beitrage zum dynamischen ausbau der festigkeitslehre // Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure. – 1902. – 46. – S. 391–394.
3. Timoshenko S. Vibration Problems in Engineering. – New York: Van Nostrand Co., 1928. – 480 с.

4. Кононенко В. О., Павловский М. А. О погрешностях амортизированных пространственных гироскопов, вызванных пространственными колебаниями // Изв. АН СССР. МТГ.– 1977.– **23**, N 4.– С. 9–19.
5. Кораблев С. С. О колебательных режимах взаимодействия механических систем с автогенератором // Прикл. мех.– 1974.– **10**, N 6.– P. 3–11.
6. Фролов К. В., Краснополянская Т. С. Вынужденные колебания круглой пластины в жидкости при ограниченном возбуждении // Машиноведение.– 1981.– N 6.– С. 31–38.
7. Краснополянская Т. С. Колебания бесконечной пластины, соприкасающейся с жидкостью, при возбуждении вдоль прямой двигателем ограниченной мощности // Прикл. мех.– 1988.– **24**, N 9.– С. 96–103.
8. Фролов К. В., Краснополянская Т. С. Эффект Зоммерфельда в системах без внутреннего трения // Прикл. мех.– 1987.– **23**, N 12.– P. 19–24.
9. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания.– М.: Наука, 1987.– 424 с.
10. Moon F. S. Chaotic Vibrations.– New York: Wiley, 1987.
11. Païdoussis M. P., Moon F. C. Nonlinear and chaotic fluidelastic vibrations of a flexible pipe conveying fluid // J. Fluids Struct.– 1988.– **2**– P. 567–591.
12. Краснополянская Т. С., Швец А. Ю. Регулярные и хаотические волны в жидкости при ограниченном возбуждении колебаний цилиндрического бака // Прикл. мех.– 1990.– **26**, N 8.– С. 85–94.
13. Краснополянская Т. С., Подчасов Н. П. Резонансы и хаос при неосесимметричных динамических процессах в гидроупругих системах // Прикл. мех.– 1993.– **29**, N 12.– С. 72–77.
14. Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu. Chaos in dynamics of machines with a limited power-supply // 8-th World Congr. on the Theory of Machines and Mechanisms. Eds. M. Okrolnick, L. Pust. Vol. 1.– Prague: Czechoslovak Acad. Sci, 1991.– P. 181–184.
15. Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu. Chaos in vibrating systems with limited power-supply // Chaos.– 1993.– **3**– P. 387–395.
16. Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu. Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations // J. Fluids Struct.– 1994.– **8**– P. 1–18.
17. Krasnopolskaya T. S. Acoustic chaos caused by Sommerfeld effect // J. Fluids Struct.– 1994.– **8**– P. 803–815.
18. Poincare H. Calcul des Probabilites.– Paris: Gauthier–Villars, 1912.– 335 p.
19. Крылов Н. С. Работы по обоснованию статистической физики.– М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950.– 207 с.
20. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.– М.: Физматгиз, 1963.– 410 с.
21. Benettin G., Galgani L., Strelcyn J. M. Kolmogorov entropy and numerical experiments // Phys. Rev. A.– 1976.– **14**– P. 2338–2345.
22. Crighton D. G. The free and forced waves on a fluid-loaded elastic plate // J. Sound Vib.– 1979.– **63**– P. 225–235.
23. Crighton D. G., Innes D. Low frequency acoustic radiation and vibration response of locally excited fluid-loaded structures // J. Sound Vib.– 1983.– **91**– P. 293–314.
24. Crighton D. G., Oswell J. E. Fluid loading with mean flow. I. Response of an elastic plate to localized excitation // Philos. Trans. Roy. Soc. A.– 1991.– **335**, N 1639.– P. 557–592.