

УДК 539.3:534.13

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СОЕДИНЯЮЩЕЙ УПРУГИЕ БАЛКИ

Ю. В. ТРОЦЕНКО

*Межотраслевой научно-исследовательский институт проблем механики “Ритм”
при Национальном техническом университете Украины “КПИ”, Киев*

Получено 15.04.2002 ◊ Пересмотрено 17.07.2002

Рассмотрены собственные поперечные колебания двух балок, соединенных между собой упругой круговой цилиндрической оболочкой. Уравнения колебаний упругой системы и граничные условия получены на основе принципа возможных перемещений. Предложено приближенное решение сформулированной спектральной задачи на основе ее эквивалентной вариационной формулировки. Приведен алгоритм точного решения исходной задачи для случая, когда оболочка заменяется эквивалентным участком балки. Исследовано влияние входных параметров системы на ее частоты и формы колебаний как в строгой, так и в упрощенной постановке задачи.

Розглянуті власні поперечні коливання двох балок, які з'єднані між собою пружною круговою циліндричною оболочкою. Рівняння коливань пружної системи та граничні умови отримані на основі принципу можливих переміщень. Запропоновано наближене розв'язання сформульованої спектральної задачі на основі її еквівалентного варіаційного формулювання. Наведено алгоритм точного розв'язання вихідної задачі для випадку, коли оболочка замінюється еквівалентною ділянкою балки. Досліджено вплив вхідних параметрів системи на її частоти та форми коливань як у строгій, так і в спрощеній постановці задачі.

Eigen cross vibrations of two beams interconnected with elastic circular cylindrical shell are considered. The equations of vibration of the system and the boundary conditions are obtained on the basis of the principle of possible displacements. The approximate solution of the formulated spectral task is offered on the basis of its equivalent variational formulation. The algorithm of exact solution of the initial problem for the case, when the shell is replaced with an equivalent section of the beam, is given. The influence of initial parameters of system on its frequencies and forms of vibration are studied both for exact, and simplified statement of the problem.

ВВЕДЕНИЕ

Составные механические конструкции, представляющие собой разного рода соединения оболочечных элементов и упругих балок, широко используются в авиастроении, машиностроении, судостроении, других отраслях промышленности и строительства. Определение форм и частот собственных колебаний как основных характеристик упругих систем представляет большой практический интерес и является первым этапом динамического расчета.

Исследованию продольных и крутильных колебаний цилиндрической оболочки с сосредоточенными массами на ее торцах посвящены работы [1, 2]. В работах [3, 4] изучено взаимодействие ребристой цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела, связанного с внутренней поверхностью оболочки с помощью жестких невесомых стержней. Расчету свободных колебаний оболочек вращения с локально присоединенными телами посвящены работы [5, 6]. В работах [7, 8] построена математическая модель связанных колебаний цилиндрической оболочки и прикрепленного к одному из ее торцов абсолютно твердого тела, предложен приближенный метод определения частот и форм собственных колебаний рассматриваемой механической системы. Точному решению

задачи о собственных колебаниях цилиндрической оболочки, соединенной с упругими балками, посвящены работы [9, 10].

Данная статья посвящена разработке вариационного метода построения приближенного решения задачи о собственных поперечных колебаниях тонкостенной круговой цилиндрической оболочки, к торцам которой жестко прикреплены две упругие балки. Сформулированы геометрические условия сопряжения, накладываемые на перемещения оболочки и балок в местах их жесткого крепления. На основе принципа возможных перемещений получены уравнения и естественные граничные условия на торцах цилиндрической оболочки. При построении решений рассматриваемой спектральной задачи на основе ее эквивалентной вариационной формулировки используются точные решения для уравнений поперечных колебаний балок. В результате исходная задача сведена к решению однородной алгебраической системы. Для случаев, когда оболочку можно заменить эквивалентным участком балки, приведено точное решение упрощенной задачи, полученное с использованием метода начальных параметров Коши. Исследовано влияние толщины оболочки, ее местоположения и длины на частоты и формы собственных колебаний системы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается механическая система, состоящая из тонкостенной круговой цилиндрической оболочки толщиной h и двух балок, которые жестко прикреплены к ее торцам (рис. 1). Предполагается, что балки имеют две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, линией пересечения которых является ось Oz , совпадающая с продольной осью оболочки. Координатную плоскость Oxz совместим с одной из плоскостей симметрии системы, а начало координат O выберем в плоскости торцевого сечения одной из балок, свободного от оболочки.

Орты введенной системы координат $Oxyz$ обозначим через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Координаты торцевых сечений цилиндрической оболочки радиуса R и длины l в принятой системе координат обозначим через z_1 и z_2 . Считается, что общая длина рассматриваемой системы “балки – оболочка” равна z_3 . Срединную поверхность оболочки отнесем к ортогональной системе криволинейных координат z и φ , где φ – полярный угол, отсчитываемый от оси Ox против хода часовой стрелки, если смотреть в сторону положительного направления оси Oz . С этими координатами свяжем ортогональный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, в котором \vec{e}_1 и \vec{e}_2 – единичные векторы, касательные к линиям главных кривизн срединной поверхности оболочки и направленные в сторону возрастания координат z и φ соответственно, а вектор \vec{e}_3 равен векторному произведению векторов \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . Деформированное состояние оболочки будем характеризовать вектором перемещения точек ее срединной поверхности:

$$\vec{U}(z, \varphi, t) = u(z, \varphi, t)\vec{e}_1 + v(z, \varphi, t)\vec{e}_2 + w(z, \varphi, t)\vec{e}_3. \quad (1)$$

Предположим далее, что при совместных колебаниях рассматриваемая механическая система совершает движение в одной из плоскостей симметрии (будем считать, что она совпадает с плоскостью Oxz). Перемещения точек нейтральной линии упругих балок в направлении оси Ox на участках $[0, z_1]$ и $[z_2, z_3]$ будем обозначать через $\xi_1(z, t)$ и $\xi_2(z, t)$ соответственно.

В случае связанных колебаний системы перемещения оболочки и балок в сечениях $z = z_1$ и $z = z_2$ являются непрерывными функциями. В силу этого имеем

$$\vec{U} = \vec{U}_0 + [\vec{\theta}_0 \times \vec{r}_0]. \quad (2)$$

Здесь компоненты векторов $\vec{U}_0, \vec{\theta}_0$ и \vec{r}_0 в базисе

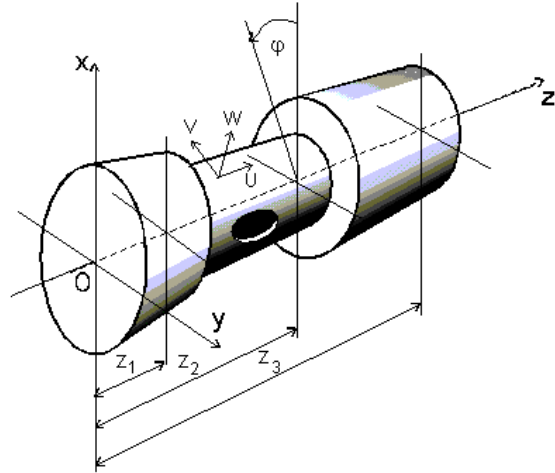


Рис. 1. Общий вид рассматриваемой упругой системы

системы координат $Oxyz$ имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{U}_0 &= \{\xi_k(z_k, t), 0, 0\}, \\ \vec{\theta}_0 &= \left\{0, \frac{d\xi_k(z_k, t)}{dz}, 0\right\}, \\ \vec{r}_0 &= \{R \cos \varphi, -R \sin \varphi, 0\}, \end{aligned}$$

где \vec{U}_0 и $\vec{\theta}_0$ – векторы малых перемещений и поворота балок при $z = z_k, k = 1, 2$; \vec{r}_0 – радиус-вектор точек оболочки в плоскостях ее торцевых сечений.

Выразим правую часть соотношения (2) в виде разложения по ортам трехгранника Дарбу, учитывая при этом их связь с ортами системы координат $Oxyz$:

$$\begin{aligned} \vec{i} &= -\sin \varphi \vec{e}_2 + \cos \varphi \vec{e}_3, \\ \vec{j} &= -\cos \varphi \vec{e}_2 - \sin \varphi \vec{e}_3, \\ \vec{k} &= \vec{e}_1. \end{aligned}$$

Приравнявая компоненты векторов справа и слева в соотношении (2), получаем

$$\begin{aligned} u(z_k, \varphi, t) &= -\frac{\partial \xi_k(z_k, t)}{\partial z} R \cos \varphi, \\ v(z_k, \varphi, t) &= -\xi_k(z_k, t) \sin \varphi, \\ w(z_k, \varphi, t) &= \xi_k(z_k, t) \cos \varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

$$k = 1, 2.$$

Нетрудно показать, что условия равенства углов поворота торцевых сечений балок вокруг направления \vec{e}_2 с соответствующими углами поворота

крайок оболочки дают следующие соотношения между производной от нормального прогиба оболочки и производной от перемещений балок:

$$\frac{\partial w(z_k, \varphi, t)}{\partial z} = \frac{\partial \xi_k(z_k, t)}{\partial z} \cos \varphi, \quad (4)$$

$$k = 1, 2.$$

Формулы (3) и (4) представляют собой геометрические условия сопряжения, накладываемые на перемещения оболочки и балок в местах их жесткого крепления.

Для получения уравнений колебаний и силовых граничных условий в сечениях $z = z_k, k = 1, 2$, воспользуемся вариационным принципом возможных перемещений, согласно которому

$$\delta \Pi = \delta A, \quad (5)$$

где $\delta \Pi$ – вариация потенциальной энергии деформации системы; δA – работа внешних сил на возможных перемещениях. Внешними силами в рассматриваемом случае являются в соответствии с принципом Даламбера силы инерции.

Обозначим через m_k и $E_k I_k, k = 1, 2$, погонные массы балок и их изгибные жесткости в плоскости Oxz соответственно. При $k = 1$ имеем участок $[O, z_1]$, а при $k = 2$ – $[z_2, z_3]$. Будем считать, что жесткостные и массовые характеристики балок постоянны по их длине. Плотность, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки обозначим через ρ, E и ν соответственно.

Потенциальную энергию деформации оболочки выпишем на основе общих соотношений технической теории оболочек [11]. Для балок будем учитывать только потенциальную энергию изгиба в плоскости Oxz . При этом общая потенциальная энергия системы, записанная в перемещениях, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{2\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] d\Sigma + \\ & + \frac{D}{2} \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)^2 + \frac{2\nu}{R^2} \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \varphi} \right)^2 \right] d\Sigma + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{z_1} E_1 I_1 \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z^2} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_{z_2}^{z_3} E_2 I_2 \left(\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial z^2} \right)^2 dz, \end{aligned} \quad (6)$$

где Σ – срединная поверхность оболочки;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Первый интеграл по поверхности Σ представляет собой потенциальную энергию удлинений и сдвигов, а второй – потенциальную энергию изгиба и кручения оболочки.

Вариацию потенциальной энергии упругой деформации системы представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & - \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \times \\ & \times \iint_{\Sigma} \{ [L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w)] \delta u + \\ & + [L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w)] \delta v - \\ & - [L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w)] \delta w \} d\Sigma + \\ & + \int_{\Gamma} \left[T_1 \delta u + S \delta v + Q_1^* \delta w - M_1 \frac{\partial \delta w}{\partial z} \right] \Big|_{z=z_1}^{z=z_2} ds + \\ & + \int_0^{z_1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(E_1 I_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z^2} \right) \delta \xi_1 dz + \\ & + \left(M^{(1)} \frac{\partial \delta \xi_1}{\partial z} - Q^{(1)} \delta \xi_1 \right) \Big|_{z=0}^{z=z_1} + \\ & + \int_{z_2}^{z_3} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(E_2 I_2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial z^2} \right) \delta \xi_2 dz + \\ & + \left(M^{(2)} \frac{\partial \delta \xi_2}{\partial z} - Q^{(2)} \delta \xi_2 \right) \Big|_{z=z_2}^{z=z_3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta &= R^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \\ L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\nu_1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \\ L_{22} &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \nu_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \\ L_{33} &= \frac{1}{R^2} (c^2 \Delta + 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{12} &= L_{21} = \frac{\nu_2}{R} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \varphi}; \\
 L_{13} &= L_{31} = \frac{\nu}{R} \frac{\partial}{\partial z}; \\
 L_{23} &= L_{32} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}; \\
 \nu_1 &= \frac{1-\nu}{2}; \quad \nu_2 = \frac{1+\nu}{2}; \quad c^2 = \frac{h^2}{12R^2}; \\
 S &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right); \\
 T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\nu}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) \right]; \\
 M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right); \\
 Q_1^* &= -c^2 \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial \varphi^2} \right]; \\
 M^{(k)} &= E_k I_k \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial z^2}; \quad Q^{(k)} = \frac{\partial}{\partial z} \left(E_k I_k \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial z^2} \right); \\
 & \quad k = 1, 2,
 \end{aligned}$$

где T_1 и S – соответственно меридиональная и сдвигающая силы, отнесенные к единице длины нормального сечения срединной поверхности оболочки; Q_1^* – обобщенная поперечная сила на контуре оболочки; M_1 – погонный изгибающий момент в меридиональной плоскости оболочки; $M^{(k)}$ и $Q^{(k)}$ – изгибающий момент и перерезывающая сила для балок с переменной по длине изгибной жесткостью. При выводе выражения (7) были использованы формулы интегрирования по частям поверхностных интегралов

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} f \frac{\partial g}{\partial z} d\Sigma &= - \iint_{\Sigma} g \frac{\partial f}{\partial z} d\Sigma + \int_{\Gamma} (fg) \Big|_{z=z_1}^{z=z_2} ds, \\
 \iint_{\Sigma} f \frac{\partial g}{\partial \varphi} d\Sigma &= - \iint_{\Sigma} g \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\Sigma,
 \end{aligned}$$

где функции $f(z, \varphi)$ и $g(z, \varphi)$ – 2π -периодические по второй координате; Γ – окружность радиуса R .

Работа инерционных сил на возможных перемещениях δu , δv , δw и $\delta \xi_k$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 \delta A &= -\rho h \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) d\Sigma - \\
 & \quad - \int_0^{z_1} m_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} \delta \xi_1 dz - \int_{z_2}^{z_3} m_2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} \delta \xi_2 dz. \quad (8)
 \end{aligned}$$

На контуре крепления балок с оболочкой, вариации δu , δv , δw и $\delta \delta w / \partial z$ не являются независимыми, поскольку перемещения оболочки связаны с параметрами движения балок условиями сопряжения (3) и (4).

Подставляя формулы (7) и (8) (с учетом выражений для вариаций перемещений оболочки при $z = z_k$) в уравнение (5) и полагая вариации δu , δv , δw и $\delta \xi_k$ независимыми, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) &= \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
 L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) &= \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
 L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) &= -\frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (9) \\
 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(E_k I_k \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial z^2} \right) + m_k \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t^2} &= 0, \\
 & \quad k = 1, 2
 \end{aligned}$$

и известные граничные условия на свободных от оболочки торцах балок, а также граничные условия на торцах оболочки:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} (S \sin \varphi - Q_1^* \cos \varphi) \Big|_{z=z_k} ds - \\
 - Q^{(k)} \Big|_{z=z_k} &= 0, \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} (T_1 R \cos \varphi + M_1 \cos \varphi) \Big|_{z=z_k} ds + \\
 + M^{(k)} \Big|_{z=z_k} &= 0.
 \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что уравнения (10) выражают собой силовые и моментные условия равновесия узлов стыковки балок и оболочки. При этом первое уравнение является следствием равенства нулю суммы проекций всех усилий на ось Ox , а второе – равенства нулю всех моментов относительно оси Oy , действующих в сечениях системы при $z = z_k$, $k = 1, 2$. Следует также отметить, что условия (10) являются естественными граничными условиями для соответствующего функционала. Таким образом, определение колебаний рассматриваемой механической системы при заданных начальных условиях свелось к совместному интегрированию уравнений цилиндрической оболочки и балок (9) при выполнении геометрических (3), (4) и силовых (10) условий сопряжения, совместно с граничными условиями закрепления балок при $z = 0$ и $z = z_3$.

Рассмотрим установившиеся гармонические колебания упругой системы в плоскости Oxz с частотой ω . Для случая неосесимметричных деформаций срединной поверхности цилиндрической оболочки ее перемещения u, v, w и перемещения балок ξ_k будем искать в виде

$$\begin{aligned} u &= e^{i\omega t} u_n(z) \cos n\varphi, \\ v &= e^{i\omega t} v_n(z) \sin n\varphi, \\ w &= e^{i\omega t} w_n(z) \cos n\varphi, \\ \xi_k &= e^{i\omega t} \eta_k(z), \\ n &= 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \tag{11}$$

В соответствии с этим, усилия и моменты в оболочке определяются по формулам

$$\begin{aligned} T_1 &= e^{i\omega t} T_{1(n)} \cos n\varphi, \\ T_2 &= e^{i\omega t} T_{2(n)} \cos n\varphi, \\ S &= e^{i\omega t} S_{(n)} \sin n\varphi, \\ Q_1^* &= e^{i\omega t} Q_{1(n)}^* \cos n\varphi, \\ M_1 &= e^{i\omega t} M_{1(n)} \cos n\varphi. \end{aligned} \tag{12}$$

Будем пользоваться безразмерными величинами, которые связаны с соответствующими размерными величинами следующим образом:

$$\begin{aligned} z &= R\alpha_1, \quad z_1 = R\gamma_1, \quad z - z_1 = R\alpha, \\ z_3 - z &= R\alpha_2, \quad z_3 - z_2 = R\gamma_2, \quad l = \gamma R, \\ M_{1(n)} &= \frac{EhR}{(1-\nu^2)} \bar{M}_{1(n)}, \quad Q^{(k)} = \pi EhR \bar{Q}^{(k)}, \\ M^{(k)} &= \pi EhR^2 \bar{M}^{(k)}, \quad \omega^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)\rho R^2} \bar{\omega}^2, \\ E_k I_k &= \pi EhR^3 \zeta_k, \quad m_k = (1-\nu^2) \pi \rho R h \bar{m}_k, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \{T_{1(n)}, Q_{1(n)}^*, S_{(n)}\} &= \\ &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \{\bar{T}_{1(n)}, \bar{Q}_{1(n)}^*, \bar{S}_{(n)}\}, \\ \{u_n, v_n, w_n\} &= R \{\bar{u}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n\}. \end{aligned}$$

В дальнейшем для упрощения формы записи, черточку над безразмерными величинами опускаем.

Подставляя соотношения (11) в (9), получаем для определения функций $U_n(\alpha), V_n(\alpha), W_n(\alpha)$ и $\eta_k(\alpha_k)$ следующие уравнения:

$$\frac{d^2}{d\alpha_k} \left(\zeta_k \frac{d^2 \eta_k}{d\alpha_k^2} \right) - \omega^2 m_k \eta_k = 0, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} L_{11}^{(n)}(u_n) + L_{12}^{(n)}(v_n) + L_{13}^{(n)}(w_n) + \omega^2 u_n &= 0, \\ L_{21}^{(n)}(u_n) + L_{22}^{(n)}(v_n) + L_{23}^{(n)}(w_n) + \omega^2 v_n &= 0, \\ L_{31}^{(n)}(u_n) + L_{32}^{(n)}(v_n) + L_{33}^{(n)}(w_n) - \omega^2 w_n &= 0, \\ n &= 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \tag{15}$$

где $L_{ij}^{(n)}, i, j=1, \dots, 3$ – дифференциальные операторы, получаемые из операторов L_{ij} после отделения в них угловой переменной и перехода к безразмерным величинам.

Если количество волн в окружном направлении оболочки n равно единице, то кинематические и силовые условия сопряжения в сечениях $z = z_1$ и $z = z_2$ имеют вид

$$\begin{aligned} u_1(\chi_k) &= (-1)^k \frac{d\eta_k(\gamma_k)}{d\alpha_k}, \\ \frac{dw_1(\chi_k)}{d\alpha} &= (-1)^{k+1} \frac{d\eta_k(\gamma_k)}{d\alpha_k}, \\ v_1(\chi_k) &= -\eta_k(\gamma_k), \quad w_1(\chi_k) = \eta_k(\gamma_k), \\ \left\{ c^2 \left[\frac{d^3 w_1}{d\alpha^3} - (2-\nu) \frac{dw_1}{d\alpha} \right] + \nu_1 \left(\frac{dv_1}{d\alpha} - u_1 \right) \right\}_{\alpha=\chi_k} &+ \\ + (-1)^k (1-\nu^2) \frac{d}{d\alpha_k} \left(\zeta_k \frac{d^2 \eta_k}{d\alpha_k^2} \right)_{\alpha_k=\gamma_k} &= 0, \\ \left\{ c^2 \left(\nu w_1 - \frac{d^2 w_1}{d\alpha^2} \right) + \frac{du_1}{d\alpha} + \nu(v_1 + w_1) \right\}_{\alpha=\chi_k} &+ \\ + (1-\nu^2) \left(\zeta_k \frac{d^2 \eta_k}{d\alpha_k^2} \right)_{\alpha_k=\gamma_k} &= 0, \\ k &= 1, 2. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь и в дальнейшем $\chi_1 = 0, \chi_2 = \gamma$. К соотношениям (16) и (17) необходимо добавить граничные условия для балок при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$.

Для случая, когда количество волн в окружном направлении превосходит единицу, кинематические условия сопряжения дают граничные условия для оболочки

$$\begin{aligned} u_n(\chi_k) = v_n(\chi_k) = w_n(\chi_k) = \frac{dw_n(\chi_k)}{d\alpha} &= 0, \\ k &= 1, 2, \end{aligned} \tag{17}$$

и колебания рассматриваемой системы возможны лишь при $\eta_k(\alpha_k) \equiv 0$. Полученные граничные условия являются следствием ортогональности функций $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Таким образом, собственные колебания рассматриваемой упругой системы, как и в случае цилиндрической оболочки, являются следствием ортогональности функций $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

дрической оболочки с присоединенным твердым телом [8], распадаются на два типа колебаний.

Исследование первого типа колебаний требует одновременного интегрирования уравнений теории балок и цилиндрической оболочки при условиях сопряжения (16), (17) и при соответствующих граничных условиях на свободных от оболочки торцах балок. Для этого случая, с учетом представления (11) для прогибов оболочки при $n=1$, проекции главного вектора сил на оси Oy и Oz , изгибающий момент относительно оси Ox и крутящий момент, которые передаются от оболочки к балкам в узлах их стыковки, будут равны нулю [7]. Следовательно, балки будут совершать только поперечные движения в плоскости Oxz при одновременном деформировании поверхности цилиндрической оболочки.

При втором типе колебаний оболочка совершает пространственные неосесимметричные колебания в плоскости Oxz , в то время как балки остаются неподвижными. Определение характеристик этого типа колебаний сводится к решению классической задачи о колебаниях цилиндрической оболочки с двумя жестко зашпеленными торцами при числе волн в окружном направлении больше единицы.

Нахождение минимальной частоты системы может быть осуществлено после определения вышеуказанных типов колебаний.

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для случая, когда толщина оболочки и жесткостные характеристики балок являются постоянными величинами, в работе [9] построены точные решения соответствующих задач на собственные значения. Согласно такому подходу, определение общего решения для уравнений оболочки по методу Эйлера при фиксированном значении частоты ω сводится к решению характеристического уравнения восьмого порядка. Используя точные решения уравнений для балок (14), условия сопряжения (16), (17) и условия закрепления свободных от оболочки торцов балок, исходная задача сводится к решению линейной однородной алгебраической системы двенадцатого порядка относительно постоянных интегрирования. Равенство нулю определителя этой системы приводит к частотному уравнению относительно параметра ω . В результате процесс нахождения частот системы сводится к последовательному подбору значений ω , удовлетворяющих частотному уравнению, с предварительным нахождением для каждого фиксированного значения ω корней характеристического уравнения. Следует отметить, что при изме-

нении частотного параметра ω , геометрических и физических параметров оболочки возможны различные комбинации корней характеристического уравнения. Это приводит к различной структуре общего решения системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (15), а следовательно, к разным видам частотного уравнения. По этой причине алгоритм решения рассматриваемой задачи достаточно сложен. Применение этого подхода при конкретных расчетах вызывает определенные затруднения, поскольку в [9] формульная схема решения задачи не приведена в силу ее громоздкости. В то же время, численные данные, полученные на основе точного решения довольно сложной спектральной задачи, играют неопределимую роль при разработке и оценке точности других приближенных решений рассматриваемой задачи.

Ниже для построения приближенных аналитических решений задач на собственные значения (14)–(17) и (15), (18) будет использовано сведение их к соответствующим эквивалентным вариационным задачам с последующим применением для их решения обобщенного метода Рунца.

Используя введенные потенциальную энергию деформаций системы и работу инерционных сил на возможных перемещениях, после интегрирования по углу φ и перехода к безразмерным величинам по формулам (13) спектральную задачу сводим к отысканию стационарных значений для квадратичного функционала:

$$\begin{aligned}
 I = & \frac{1}{2} \int_0^\gamma \left[\left(\frac{du_n}{d\alpha} \right)^2 + (w_n + \nu v_n)^2 + \right. \\
 & \left. + 2\nu \frac{du_n}{d\alpha} (w_n + \nu v_n) + \nu_1 \left(\frac{dv_n}{d\alpha} - \nu u_n \right)^2 \right] d\alpha + \\
 & + \frac{c^2}{2} \int_0^\gamma \left[\left(\frac{d^2 w_n}{d\alpha^2} \right)^2 + n^4 w_n^2 - \right. \\
 & \left. - 2\nu n^2 \frac{d^2 w_n}{d\alpha^2} w_n + 2(1-\nu) n^2 \left(\frac{dw_n}{d\alpha} \right)^2 \right] d\alpha + \quad (19) \\
 & + \frac{(1-\nu^2)}{2} \sum_{k=1}^2 \int_0^{\gamma_k} \zeta_k \left(\frac{d^2 \eta_k}{d\alpha_k} \right)^2 d\alpha_k - \\
 & - \frac{\omega^2}{2} \left[\int_0^\gamma (u_n^2 + v_n^2 + w_n^2) d\alpha + \right. \\
 & \left. + (1-\nu^2) \sum_{k=1}^2 \int_0^{\gamma_k} m_k \eta_k^2 d\alpha_k \right].
 \end{aligned}$$

Для случая $n=1$ функционал (19) необходи-

мо минимизировать на классе функций, удовлетворяющих кинематическим условиям сопряжения (16) и главным граничным условиям на свободных от оболочки торцах балок. Силовые и моментные граничные условия (17) являются естественными условиями для функционала, что существенно упрощает построение систем базисных функций в методе Ритца.

Для случая $n > 1$ в функционале (19) следует положить $\eta_k \equiv 0, k = 1, 2$. Класс допустимых функций должен быть ограничен условиями (18). Предположим для определенности, что торцы балок при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ жестко защемлены.

Решения для балок будем искать на классе частных решений уравнения

$$\frac{d^4 \eta_k}{d\alpha_k^4} - \beta_k^4 \eta_k = 0, \quad (20)$$

где $\beta_k^4 = m_k \omega^2 / \zeta_k, k = 1, 2$. При этом с учетом выбранных условий закрепления для балок будем иметь

$$\begin{aligned} \eta_1(\alpha_1) &= C_1 U(\beta_1 \alpha_1) + C_2 V(\beta_1 \alpha_1), \\ \eta_2(\alpha_2) &= D_1 U(\beta_2 \alpha_2) + D_2 V(\beta_2 \alpha_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь C_i и $D_i, i = 1, 2$ – произвольные постоянные; $U(\beta z)$ и $V(\beta z)$ – функции Крылова,

$$\begin{aligned} U(\beta z) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \beta z - \cos \beta z), \\ V(\beta z) &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} \beta z - \sin \beta z). \end{aligned}$$

Для отыскания стационарных значений функционала (19) представим искомые функции $u_n(\alpha), v_n(\alpha)$ и $w_n(\alpha)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_n(\alpha) &= \sum_{j=1}^N a_j U_j(\alpha) + \\ &+ \delta_{1n} \left(\frac{d\eta_2(\gamma_2)}{d\alpha_2} f_2(\alpha) - \frac{d\eta_1(\gamma_1)}{d\alpha_1} f_1(\alpha) \right), \\ v_n(\alpha) &= \sum_{j=1}^N b_j V_j(\alpha) - \\ &- \delta_{1n} (\eta_1(\gamma_1) f_1(\alpha) + \eta_2(\gamma_2) f_2(\alpha)), \\ w_n(\alpha) &= \sum_{j=1}^N c_j W_j(\alpha) + \\ &+ \delta_{1n} \left(\eta_1(\gamma_1) g_1(\alpha) + \eta_2(\gamma_2) g_2(\alpha) + \right. \\ &\left. + \frac{d\eta_1(\gamma_1)}{d\alpha_1} h_1(\alpha) - \frac{d\eta_2(\gamma_2)}{d\alpha_2} h_2(\alpha) \right), \\ \delta_{1n} &= \begin{cases} 1, & \forall n = 1, \\ 0, & \forall n > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь a_j, b_j, c_j – произвольные постоянные;

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= 1 - \frac{\alpha}{\gamma}; & f_2(\alpha) &= \frac{\alpha}{\gamma}; \\ g_1(\alpha) &= 1 - \frac{3}{\gamma^2} \alpha^2 + \frac{2}{\gamma^3} \alpha^3; & g_2(\alpha) &= 1 - g_1(\alpha); \\ h_1(\alpha) &= \alpha - \frac{2}{\gamma} \alpha^2 + \frac{1}{\gamma^2} \alpha^3; & h_2(\alpha) &= -\frac{\alpha^2}{\gamma} + \frac{\alpha^3}{\gamma^2}, \end{aligned}$$

а координатные функции $U_j(\alpha), V_j(\alpha)$ и $W_j(\alpha)$ подчинены граничным условиям (18).

Представления для прогибов оболочки в форме (22) будут удовлетворять главным граничным условиям (16) для функционала (19) при любых значениях вектора

$$\vec{X} \{a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N, c_1, c_2, \dots, c_N, C_1, C_2, D_1, D_2\}.$$

Заметим, что решения для перемещений оболочки в форме (22) включают в себя и формы с частотами колебаний ω_{1i}^* , при которых $\eta_1(\gamma_1) = 0, d\eta_1(\gamma_1)/d\alpha_1 = 0$, а также формы с частотами ω_{2i}^* , при которых $\eta_2(\gamma_2) = 0, d\eta_2(\gamma_2)/d\alpha_2 = 0$. В случае совпадения частот с ω_{1i}^* первая балка будет осуществлять колебания при защемленном торце в месте стыковки ее с оболочкой и принятом граничном условии при $\alpha_1 = 0$. При этих частотах оболочка

и вторая балка остаются неподвижными. Аналогичная ситуация будет иметь место и при $\omega = \omega_{2i}^*$. Для исключения этих частот и форм колебаний из рассмотрения при изучении связанных форм колебаний рассматриваемой упругой системы необходимо разделить $\eta_1(\gamma_1)$, $d\eta_1(\gamma_1)/d\alpha_1$ и $\eta_2(\gamma_2)$, $d\eta_2(\gamma_2)/d\alpha_2$ на соответствующие коэффициенты

$$K_1 = \sum_{i=1}^p (\omega - \omega_{1i}^*), \quad K_2 = \sum_{i=1}^p (\omega - \omega_{2i}^*),$$

где количество членов p в суммах выбирается в соответствии с числом рассматриваемых частот.

Построение систем базисных функций будем осуществлять с использованием полиномов Лежандра, которые обеспечивают их линейную независимость и полноту на отрезке $[0, \gamma]$. При этом

$$\begin{aligned} U_j(\alpha) &= V_j(\alpha) = \alpha(\alpha - \gamma)P_j\left(\frac{2}{\gamma}\alpha - 1\right), \\ W_j(\alpha) &= \alpha^2(\alpha - \gamma)^2P_j\left(\frac{2}{\gamma}\alpha - 1\right), \\ j &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $P_j(z)$ – смещенные на единицу по индексу j полиномы Лежандра, вычисление которых и их первых двух производных можно проводить с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} P_1(z) &= 1, \quad P_2(z) = z, \quad P_3(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \\ P_{j+2}(z) &= \frac{1}{j+1}[(2j+1)zP_{j+1}(z) - jP_j(z)], \\ P'_{j+2}(z) &= zP'_{j+1}(z) + (j+1)P_{j+1}(z), \\ P''_{j+2}(z) &= zP''_{j+1}(z) + (j+2)P'_{j+1}(z). \end{aligned}$$

Обращает на себя внимание то, что, в отличие от традиционного метода Ритца, представления (22) для функций $u_n(\alpha)$, $v_n(\alpha)$ и $w_n(\alpha)$ для случая $n = 1$ не являются независимыми, поскольку они включают в себя общие постоянные C_1 , C_2 и D_1 , D_2 , подлежащие определению в дальнейшем. Поэтому построение однородной линейной алгебраической системы относительно вектора \vec{X} вызывает определенные технические трудности. Формирование алгебраических уравнений можно существенно упростить, вычислив предварительно вариацию функционала (19) с учетом некоторых преобразований, связанные с тем, что $\eta_1(\alpha_1)$ и $\eta_2(\alpha_2)$ выбирались на классе частных решений уравнений для балок.

Введем в рассмотрение следующие дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(p, q) &= \frac{dp}{d\alpha} \frac{dq}{d\alpha} + \nu_1 n^2 pq, \\ \Psi_{12}(p, q) &= \nu n p \frac{dq}{d\alpha} - \nu_1 n \frac{dp}{d\alpha} q, \\ \Psi_{13}(p, q) &= \nu p \frac{dq}{d\alpha}, \quad \Psi_{23}(p, q) = npq, \\ \Psi_{22}(p, q) &= n^2 pq + \nu_1 \frac{dp}{d\alpha} \frac{dq}{d\alpha}; \\ \Psi_{33}(p, q) &= pq + c^2 \left[\left(\frac{d^2 p}{d\alpha^2} - \nu n^2 p \right) \frac{d^2 q}{d\alpha^2} + \left(n^4 p - \nu n^2 \frac{d^2 p}{d\alpha^2} \right) q + 2(1 - \nu) n^2 \frac{dp}{d\alpha} \frac{dq}{d\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь $p(\alpha)$ и $q(\alpha)$ – произвольные функции.

Используя эти операторы, вариацию функционала (19) можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_0^\gamma [\Psi_{11}(u_n, \delta u_n) + \Psi_{12}(v_n, \delta v_n) + \\ &+ \Psi_{13}(w_n, \delta u_n) + \Psi_{12}(\delta v_n, u_n) + \\ &+ \Psi_{22}(v_n, \delta v_n) + \Psi_{23}(w_n, \delta v_n) + \\ &+ \Psi_{13}(\delta w_n, u_n) + \Psi_{23}(\delta w_n, v_n) + \\ &+ \Psi_{33}(w_n, \delta w_n)] d\alpha - \\ &- \omega^2 \int_0^\gamma (u_n \delta u_n + v_n \delta v_n + w_n \delta w_n) d\alpha + \\ &+ (1 - \nu^2) \left\{ \sum_{k=1}^2 \left[\zeta_k \frac{d^2 \eta_k}{d\alpha_k^2} \frac{d\delta \eta_k}{d\alpha_k} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{d}{d\alpha_k} \left(\zeta_k \frac{d^2 \eta_k}{d\alpha_k^2} \right) \delta \eta_k \right]_{\alpha_k = \gamma_k} \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Вычислив, к примеру, частную производную $\partial I / \partial \alpha_i$ и положив в соотношении (25) $\delta u_n = U_i$, $\delta v_n \equiv 0$, $\delta w_n \equiv 0$ и $\delta \eta_k \equiv 0$, получим первые N уравнений относительно вектора \vec{X} . Аналогично поступим и при вычислении частных производных от функционала I по переменным b_i , c_i , C_1 , C_2 , D_1 , D_2 , найдя соответствующие вариации из представления (22).

Таким образом, воспользовавшись необходимыми условиями для экстремума функционала,

после приравнивания нулю всех частных производных от него по компонентам вектора \vec{X} , исходную вариационную задачу сведем к решению однородной алгебраической системы

$$(A - \omega^2 B) \vec{X}^T = 0, \quad (26)$$

где A и B – симметричные матрицы порядка $3N+4$ для $n = 1$ и $3N$ для $n > 1$. В силу того, что частотный параметр ω входит в аргумент функций Крылова, часть элементов матриц A и B будет зависеть от этого параметра.

Введем в рассмотрение следующие определенные интегралы:

$$\begin{aligned} \Phi_1(f, h) &= \int_0^\gamma [\Psi_{11}(f, f) - 2\Psi_{13}(h, f) + \\ &\quad + \Psi_{33}(h, h)] d\alpha, \\ \Phi_2(f, h) &= \int_0^\gamma [\Psi_{22}(f, f) - 2\Psi_{23}(h, f) + \\ &\quad + \Psi_{33}(h, h)] d\alpha, \\ \Phi_3(f, g, h) &= \int_0^\gamma [\Psi_{12}(f, f) - \Psi_{13}(g, f) - \\ &\quad - \Psi_{23}(h, f) + \Psi_{33}(h, g)] d\alpha, \\ F_1 &= \int_0^\gamma [-\Psi_{11}(f_2, f_1) + \Psi_{13}(h_2, f_1) + \\ &\quad + \Psi_{13}(h_1, f_2) - \Psi_{33}(h_2, h_1)] d\alpha, \\ F_2 &= \int_0^\gamma [\Psi_{12}(f_2, f_1) - \Psi_{13}(g_2, f_1) - \\ &\quad - \Psi_{23}(h_1, f_2) + \Psi_{33}(g_2, h_1)] d\alpha, \\ F_3 &= \int_0^\gamma [-\Psi_{12}(f_1, f_2) + \Psi_{13}(g_1, f_2) + \\ &\quad + \Psi_{23}(h_2, f_1) - \Psi_{33}(h_2, g_1)] d\alpha, \\ F_4 &= \int_0^\gamma [\Psi_{22}(f_2, f_1) - \Psi_{23}(g_2, f_1) - \\ &\quad - \Psi_{23}(g_1, f_2) + \Psi_{33}(g_2, g_1)] d\alpha, \\ \alpha_{11}(i) &= \int_0^\gamma [\Psi_{13}(h_1, U_i) - \Psi_{11}(f_1, U_i)] d\alpha, \\ \alpha_{12}(i) &= \int_0^\gamma [\Psi_{13}(g_1, U_i) - \Psi_{12}(f_1, U_i)] d\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{13}(i) &= \int_0^\gamma [\Psi_{13}(h_2, U_i) - \Psi_{11}(f_2, U_i)] d\alpha, \\ \alpha_{14}(i) &= \int_0^\gamma [\Psi_{13}(g_2, U_i) - \Psi_{12}(f_2, U_i)] d\alpha, \\ \alpha_{21}(i) &= \int_0^\gamma [\Psi_{23}(h_1, V_i) - \Psi_{12}(V_i, f_1)] d\alpha, \\ \alpha_{22}(i) &= \int_0^\gamma [\Psi_{23}(g_1, V_i) - \Psi_{22}(f_1, V_i)] d\alpha, \\ \alpha_{23}(i) &= \int_0^\gamma [\Psi_{23}(h_2, V_i) - \Psi_{12}(V_i, f_2)] d\alpha, \\ \alpha_{24}(i) &= \int_0^\gamma [\Psi_{23}(g_2, V_i) - \Psi_{22}(f_2, V_i)] d\alpha, \\ \alpha_{31}(i) &= \int_0^\gamma [\Psi_{33}(h_1, W_i) - \Psi_{13}(W_i, f_1)] d\alpha, \\ \alpha_{32}(i) &= \int_0^\gamma [\Psi_{33}(g_1, W_i) - \Psi_{23}(W_i, f_1)] d\alpha, \\ \alpha_{33}(i) &= \int_0^\gamma [\Psi_{33}(h_2, W_i) - \Psi_{13}(W_i, f_2)] d\alpha, \\ \alpha_{34}(i) &= \int_0^\gamma [\Psi_{33}(g_2, W_i) - \Psi_{23}(W_i, f_2)] d\alpha. \end{aligned}$$

Обозначим значения балочных функций $U(\beta_k \alpha_k)$, $V(\beta_k \alpha_k)$ и их первых производных при $\alpha_k = \gamma_k$, $k = 1, 2$, через

$$\begin{aligned} u_{0k} &= U(\beta_k \gamma_k), \quad u'_{0k} = \left. \frac{dU(\beta_k \alpha_k)}{d\alpha_k} \right|_{\alpha_k = \gamma_k}, \\ v_{0k} &= V(\beta_k \gamma_k), \quad v'_{0k} = \left. \frac{dV(\beta_k \alpha_k)}{d\alpha_k} \right|_{\alpha_k = \gamma_k}, \quad (27) \\ (u_{0k} v_{0k})' &= \left. \frac{d}{d\alpha_k} [U(\beta_k \alpha_k) V(\beta_k \alpha_k)] \right|_{\alpha_k = \gamma_k}. \end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений элементы верхней части симметричной матрицы A относительно главной диагонали можно представить в виде

$$a_{i,j} = \int_0^\gamma \Psi_{11}(U_j, U_i) d\alpha,$$

$$a_{i,j+N} = \int_0^\gamma \Psi_{12}(V_j, U_i) d\alpha,$$

$$a_{i,j+2N} = \int_0^\gamma \Psi_{13}(W_j, U_i) d\alpha,$$

$$a_{i+N,j+N} = \int_0^\gamma \Psi_{22}(V_j, V_i) d\alpha,$$

$$a_{i+N,j+2N} = \int_0^\gamma \Psi_{23}(W_j, V_i) d\alpha,$$

$$a_{i+2N,j+2N} = \int_0^\gamma \Psi_{33}(W_j, W_i) d\alpha,$$

$$a_{i,N_1} = u'_{01}\alpha_{11}(i) + u_{01}\alpha_{12}(i),$$

$$a_{i,N_2} = v'_{01}\alpha_{11}(i) + v_{01}\alpha_{12}(i),$$

$$a_{i,N_3} = -u'_{02}\alpha_{13}(i) + u_{02}\alpha_{14}(i),$$

$$a_{i,N_4} = -v'_{02}\alpha_{13}(i) + v_{02}\alpha_{14}(i),$$

$$a_{i+N,N_1} = u'_{01}\alpha_{21}(i) + u_{01}\alpha_{22}(i),$$

$$a_{i+N,N_2} = v'_{01}\alpha_{21}(i) + v_{01}\alpha_{22}(i),$$

$$a_{i+N,N_3} = -u'_{02}\alpha_{23}(i) + u_{02}\alpha_{24}(i),$$

$$a_{i+N,N_4} = -v'_{02}\alpha_{23}(i) + v_{02}\alpha_{24}(i),$$

$$a_{i+2N,N_1} = u'_{01}\alpha_{31}(i) + u_{01}\alpha_{32}(i),$$

$$a_{i+2N,N_2} = v'_{01}\alpha_{31}(i) + v_{01}\alpha_{32}(i),$$

$$a_{i+2N,N_3} = -u'_{02}\alpha_{33}(i) + u_{02}\alpha_{34}(i),$$

$$a_{i+2N,N_4} = -v'_{02}\alpha_{33}(i) + v_{02}\alpha_{34}(i),$$

$$a_{N_1,N_1} = C_{11}^{(1)} + (u'_{01})^2 \Phi_1(f_1, h_1) + 2u_{01}u'_{01} \Phi_3(f_1, g_1, h_1) + (u_{01})^2 \Phi_2(f_1, g_1),$$

$$a_{N_1,N_2} = C_{12}^{(1)} + u'_{01}v'_{01} \Phi_1(f_1, h_1) + (u_{01}v_{01})' \Phi_3(f_1, g_1, h_1) + u_{01}v_{01} \Phi_2(f_1, g_1),$$

$$a_{N_1,N_3} = u'_{01}u'_{02}F_1 + u_{02}u'_{01}F_2 + u_{01}u'_{02}F_3 + u_{01}u_{02}F_4,$$

$$a_{N_1,N_4} = u'_{01}v'_{02}F_1 + v_{02}u'_{01}F_2 + u_{01}v'_{02}F_3 + u_{01}v_{02}F_4,$$

$$a_{N_2,N_2} = C_{22}^{(1)} + (v'_{01})^2 \Phi_1(f_1, h_1) +$$

$$+ 2v_{01}v'_{01} \Phi_3(f_1, g_1, h_1) + (v_{01})^2 \Phi_2(f_1, g_1),$$

$$a_{N_2,N_3} = v'_{01}u'_{02}F_1 + u_{02}v'_{01}F_2 + v_{01}u'_{02}F_3 + v_{01}u_{02}F_4,$$

$$a_{N_2,N_4} = v'_{01}v'_{02}F_1 + v_{02}v'_{01}F_2 + v_{01}v'_{02}F_3 + v_{01}v_{02}F_4,$$

$$a_{N_3,N_3} = C_{11}^{(2)} + (u'_{02})^2 \Phi_1(f_2, h_2) - 2u_{02}u'_{02} \Phi_3(f_2, g_2, h_2) + (u_{02})^2 \Phi_2(f_2, g_2),$$

$$a_{N_3,N_4} = C_{12}^{(2)} + u'_{02}v'_{02} \Phi_1(f_2, h_2) - (u_{02}v_{02})' \Phi_3(f_2, g_2, h_2) + u_{02}v_{02} \Phi_2(f_2, g_2),$$

$$a_{N_4,N_4} = C_{22}^{(2)} + (v'_{02})^2 \Phi_1(f_2, h_2) - 2v_{02}v'_{02} \Phi_3(f_2, g_2, h_2) + (v_{02})^2 \Phi_2(f_2, g_2),$$

где $N_i = 3N + i$; $i = 1, \dots, 4$;

$$C_{11}^{(k)} = (1 - \nu^2) \zeta_k \beta_k^3 (ST - VU)_{\alpha_k = \gamma_k};$$

$$C_{12}^{(k)} = (1 - \nu^2) \zeta_k \beta_k^3 (T^2 - SU)_{\alpha_k = \gamma_k};$$

$$C_{22}^{(k)} = (1 - \nu^2) \zeta_k \beta_k^3 (TU - SV)_{\alpha_k = \gamma_k};$$

$$k = 1, 2.$$

Здесь S , T , U и V – функции Крылова. Выражения для U и V были представлены выше, а S и T имеют следующий вид:

$$S(\beta\alpha) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \beta\alpha + \cos \beta\alpha),$$

$$T(\beta\alpha) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \beta\alpha + \sin \beta\alpha).$$

Введя в рассмотрение определенные интегралы

$$(f, g) = \int_0^\gamma fg d\alpha, \quad E(f, g) = \int_0^\gamma (f^2 + g^2) d\alpha,$$

$$FH = \int_0^\gamma (f_1 f_2 + h_1 h_2) d\alpha,$$

$$FG = \int_0^\gamma (f_1 f_2 + g_1 g_2) d\alpha,$$

соответствующие элементы матрицы B представим в форме

$$b_{i,j} = (U_j, U_i),$$

$$b_{i,j+N} = b_{i,j+2N} b_{i+N,j+2N} = 0,$$

$$\begin{aligned}
b_{i,N_1} &= -u'_{01}(f_1, U_i), \\
b_{i,N_2} &= -v'_{01}(f_1, U_i), \\
b_{i,N_3} &= u'_{02}(f_2, U_i), \\
b_{i,N_4} &= v'_{02}(f_2, U_i), \\
b_{i+N,j+N} &= (V_j, V_i), \\
b_{i+N,N_1} &= -u_{01}(f_1, V_i), \\
b_{i+N,N_2} &= -v_{01}(f_1, V_i), \\
b_{i+N,N_3} &= -u_{02}(f_2, V_i), \\
b_{i+N,N_4} &= -v_{02}(f_2, V_i), \\
b_{i+2N,j+2N} &= (W_j, W_i), \\
b_{i+2N,N_1} &= u_{01}(g_1, W_i) + u'_{01}(h_1, W_i), \\
b_{i+2N,N_2} &= v_{01}(g_1, W_i) + v'_{01}(h_1, W_i), \\
b_{i+2N,N_3} &= u_{02}(g_2, W_i) - u'_{02}(h_2, W_i), \\
b_{i+2N,N_4} &= v_{02}(g_2, W_i) - v'_{02}(h_2, W_i), \\
b_{N_1,N_1} &= (u'_{01})^2 E(f_1, h_1) + 2u_{01}u'_{01}(g_1, h_1) + \\
&\quad + (u_{01})^2 E(f_1, g_1), \\
b_{N_1,N_2} &= u'_{01}v'_{01}E(f_1, h_1) + u_{01}v_{01}E(f_1, g_1) + \\
&\quad + (u_{01}v_{01})'(g_1, h_1), \\
b_{N_1,N_3} &= -u'_{01}u'_{02}FH + u_{01}u_{02}FG - \\
&\quad - u_{01}u'_{02}(g_1, h_2) + u_{02}u'_{01}(g_2, h_1), \\
b_{N_1,N_4} &= -u'_{01}v'_{02}FH + u_{01}v_{02}FG - \\
&\quad - u_{01}v'_{02}(g_1, h_2) + v_{02}u'_{01}(g_2, h_1), \\
b_{N_2,N_2} &= (v'_{01})^2 E(f_1, h_1) + 2v_{01}v'_{01}(g_1, h_1) + \\
&\quad + (v_{01})^2 E(f_1, g_1), \\
b_{N_2,N_3} &= -v'_{01}u'_{02}FH + v_{01}u_{02}FG - \\
&\quad - v_{01}u'_{02}(g_1, h_2) + u_{02}v'_{01}(g_2, h_1), \\
b_{N_2,N_4} &= -v'_{01}v'_{02}FH + v_{01}v_{02}FG - \\
&\quad - v_{01}v'_{02}(g_1, h_2) + v_{02}v'_{01}(g_2, h_1), \\
b_{N_3,N_3} &= (u'_{02})^2 E(f_2, h_2) - 2u_{02}u'_{02}(g_2, h_2) + \\
&\quad + (u_{02})^2 E(f_2, g_2), \\
b_{N_3,N_4} &= u'_{02}v'_{02}E(f_2, h_2) + u_{02}v_{02}E(f_2, g_2) -
\end{aligned}$$

$$-(u_{02}v_{02})'(g_2, h_2),$$

$$\begin{aligned}
b_{N_4,N_4} &= (v'_{02})^2 E(f_2, h_2) - 2v_{02}v'_{02}(g_2, h_2) + \\
&\quad + (v_{02})^2 E(f_2, g_2).
\end{aligned}$$

Если количество волн в окружном направлении оболочки превышает единицу, матрицы A и B получаются из матриц, построенных для $n = 1$, вычеркиванием из них последних четырех столбцов и строк. При этом, в силу симметрии граничных условий, симметричные и антисимметричные формы колебаний оболочки могут быть рассмотрены независимо. Тогда порядок алгебраической системы можно уменьшить в два раза [8].

Таким образом, задача определения собственных частот и форм поперечных колебаний балок, скрепленных между собой упругой круговой цилиндрической оболочкой, свелась к вычислению квадратур с последующим решением однородной алгебраической задачи (26).

3. УПРОЩЕННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решение рассматриваемой задачи можно значительно упростить, если дополнительно предположить, что поперечные сечения оболочки при деформировании остаются плоскими и перпендикулярными к ее нейтральной оси, а нормальные напряжения на площадках, параллельных этой оси, пренебрежимо малы. При таких допущениях оболочку можно заменить эквивалентной балкой с постоянными по длине погонной массой $m = 2\pi R h \rho$ и изгибной жесткостью $EI = E\pi R^3 h$. В результате, исходная задача сводится к расчету собственных колебаний неоднородной упругой балки с кусочно-постоянными изгибной жесткостью $E_i I_i$ и погонной массой m_i .

Наиболее эффективным способом решения этой задачи является метод начальных параметров Коши [12, 13], позволяющий находить частоты и формы собственных колебаний упругой системы, используя частотный определитель, порядок которого не зависит от номера тона колебаний и от числа участков балки с постоянными упруго-массовыми характеристиками. Кроме того, сам метод очень прост для реализации на ЭВМ, так как все вычисления сводятся к перемножению матриц четвертого порядка и нахождению корней трансцендентного уравнения.

Приведем расчетную схему определения собственных частот и форм поперечных колебаний неоднородной балки с использованием матриц перехода.

Разобьем балку на k участков с длинами l_i ,

$i = 1, 2, \dots, k$, на каждом из которых изгибная жесткость и погонная масса постоянны. Вводя для каждого участка свою систему координат, начало которой связано с его левым концом, дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами для любого i -го участка будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \eta_i(z_i)}{dz_i^4} - \beta_i^4 \eta_i(z_i) &= 0, \\ \beta_i^4 &= \frac{m_i}{D_i} \omega^2, \quad D_i = E_i I_i, \\ 0 \leq z_i \leq l_i, \quad i &= 1, 2, \dots, k, \end{aligned} \quad (28)$$

где ω – собственная частота упругой системы; $\eta_i(z_i)$ – форма колебаний i -го участка балки.

Уравнения (28) должны решаться при принятых граничных условиях закрепления свободных торцов 1-го и k -го участков балки и условиях сопряжения i -го и $i+1$ -го участков балки в местах их стыковки:

$$\begin{aligned} \eta_i(l_i) &= \eta_{i+1}(0), \quad D_i \eta_i''(l_i) = D_{i+1} \eta_{i+1}''(0), \\ \eta_i'(l_i) &= \eta_{i+1}'(0), \quad D_i \eta_i'''(l_i) = D_{i+1} \eta_{i+1}'''(0), \end{aligned} \quad (29)$$

которые представляют собой непрерывность прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих сил.

Общее решение для каждого из участков составной балки можно представить в виде

$$\begin{aligned} \eta_i(z_i) &= \eta_i(0) S(\beta_i z_i) + \frac{1}{\beta_i} \eta_i'(0) T(\beta_i z_i) + \\ &+ \frac{1}{\beta_i^2} \eta_i''(0) U(\beta_i z_i) + \frac{1}{\beta_i^3} \eta_i'''(0) V(\beta_i z_i). \end{aligned} \quad (30)$$

Введем в рассмотрение четырехмерный вектор-столбец $\vec{u}_i(z_i) = \{u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, u_{4i}\}^T$, компоненты которого связаны с функциями $\eta_i(z_i)$ и их производными соотношениями

$$\begin{aligned} u_{1i} &= \eta_i(z_i), \quad u_{3i} = D_i \eta_i''(z_i), \\ u_{2i} &= \eta_i'(z_i), \quad u_{4i} = D_i \eta_i'''(z_i). \end{aligned} \quad (31)$$

Тогда условия сопряжения (29) для смежных участков балки примут вид

$$\vec{u}_i(l_i) = \vec{u}_{i+1}(0), \quad (32)$$

а вектор $\vec{u}_i(z_i)$ можно выразить через его начальные значения $\vec{u}_i(0)$ и функции Крылова:

$$\vec{u}_i(z_i) = A_i(z_i) \vec{u}_i(0). \quad (33)$$

Здесь $A_i(z_i)$ – матрица перехода, которая имеет следующий вид:

$$A_i(z_i) = \begin{bmatrix} S & \frac{1}{\beta_i} T & \frac{1}{\beta_i^2} U & \frac{1}{\beta_i^3} V \\ \beta_i V & S & \frac{1}{\beta_i} T & \frac{1}{\beta_i^2} U \\ \beta_i^2 D_i U & \beta_i D_i V & S & \frac{1}{\beta_i} T \\ \beta_i^3 D_i T & \beta_i^2 D_i U & \beta_i V & S \end{bmatrix}$$

, где аргументами в функциях Крылова являются $\beta_i z_i$.

Исходя из соотношения (33), с учетом условий сопряжения (32) установим формулу

$$\vec{u}_{i+1}(z_{i+1}) = A_{i+1}(z_{i+1}) A_i(l_i) \vec{u}_i(0). \quad (34)$$

Далее, воспользовавшись соотношениями (32)–(34), можно выразить решения на каждом участке через начальные значения $\vec{u}_1(0)$ на первом участке:

$$\vec{u}_i(z_i) = A_i(z_i) \prod_{j=i-1}^1 A_j(l_j) \vec{u}_1(0). \quad (35)$$

С учетом выражения (35) получаем формулу для вычисления перемещений и усилий на правом конце балки через перемещения и усилия на ее левом конце:

$$\vec{u}_k(l_k) = P \vec{u}_1(0). \quad (36)$$

Здесь

$$P = \prod_{i=k}^1 A_i(l_i).$$

Осталось подчинить найденные решения граничным условиям закрепления торцов 1-го и k -го участков балки. В случае свободных торцов должны выполняться условия

$$u_{31}(0) = u_{41}(0) = u_{3k}(l_k) = u_{4k}(l_k) = 0. \quad (37)$$

Тогда из соотношений (36) получаем частотное уравнение

$$p_{31} p_{42} - p_{32} p_{41} = 0. \quad (38)$$

Здесь через p_{ij} обозначены элементы матрицы P .

Выбрав условие нормировки $u_{11}(0) = 1$, начальный вектор $\vec{u}_1(0)$ запишем в виде

$$\vec{u}_1(0) = \{1, u_{21}(0), 0, 0\}^T, \quad u_{21}(0) = -\frac{p_{31}}{p_{32}}. \quad (39)$$

Табл. 1. Значения низших частот системы
в зависимости от числа координатных функций N
при $\gamma=2$, $\gamma_1=8$, $\zeta=2$

N	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
2	0.03813	0.09778	0.19468	0.29943	0.44334
4	0.03810	0.09772	0.19462	0.29933	0.44279
6	0.03809	0.09770	0.19460	0.29931	0.44275
8	0.03808	0.09770	0.19460	0.29931	0.44274
10	0.03808	0.09770	0.19459	0.29931	0.44274

Табл. 2. Значения низших частот системы
в зависимости от числа координатных функций N
при $\gamma=6$, $\gamma_1=4$, $\zeta=2$

N	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
2	0.03885	0.10514	0.18342	0.29362	0.38854
4	0.03873	0.10353	0.18275	0.26800	0.38800
6	0.03870	0.10343	0.18271	0.26745	0.38704
8	0.03868	0.10341	0.18269	0.26727	0.38690
10	0.03867	0.10340	0.18268	0.26720	0.38686
12	0.03866	0.10339	0.18267	0.26716	0.38684
14	0.03866	0.10339	0.18267	0.26716	0.38684

С учетом формул (35) и (39) форму собственных колебаний на каждом участке можно представить как

$$\eta_i(z_i) = b_{11}^{(i)}(z_i) - b_{12}^{(i)}(z_i) \frac{p_{31}}{p_{32}}, \quad 0 \leq z_i \leq l_i, \quad (40)$$

где $b_{pq}^{(i)}$ – коэффициенты матрицы

$$B(z_i) = A_i(z_i) \prod_{j=i-1}^1 A_j(l_j).$$

Для случая жесткого закрепления торцов балки частотное уравнение принимает вид

$$p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23} = 0. \quad (41)$$

Таким образом, изложенный алгоритм позволяет строить точное решение спектральной задачи о собственных колебаниях составной балки. Он получил широкое применение для расчета частот и форм собственных колебаний упругих систем, в том числе и систем с параметрами, меняющимися по длине [13].

4. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже приводятся результаты расчетов частот и форм собственных колебаний рассматриваемой

упругой системы для случая, когда торцы балок жестко зашпелены, а их жесткостные и массовые характеристики равны между собой. Во всех расчетах были приняты следующие значения безразмерных параметров системы:

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{\zeta_1} = \frac{m_2}{\zeta_2} = \frac{m}{\zeta} = 2.2, \\ \zeta = \frac{1}{75h}, \quad \nu = 0.3, \quad \frac{z_3}{R} = 20. \end{aligned} \quad (42)$$

Длина цилиндрической оболочки, ее толщина и местоположение в системе варьировались. При вычислении матриц A и B использовалась квадратурная формула Гаусса с числом узлов интегрирования, обеспечивающим необходимую точность вычислений.

В табл. 1 и 2 приведены результаты расчета первых пяти низших частот связанных поперечных колебаний упругой системы в зависимости от количества членов N в разложениях (22) для параметров $\gamma=2$, $\gamma_1=8$, $\zeta=2$ и $\gamma=6$, $\gamma_1=4$, $\zeta=2$ соответственно. Данные, приведенные в таблицах, свидетельствуют о том, что последовательные приближения, полученные на основе вариационного метода, сходятся достаточно быстро для цилиндрических оболочек средней относительной длины и имеют пределом величину, совпадающую с точным решением задачи [9].

При сохранении принятой точности вычисле-

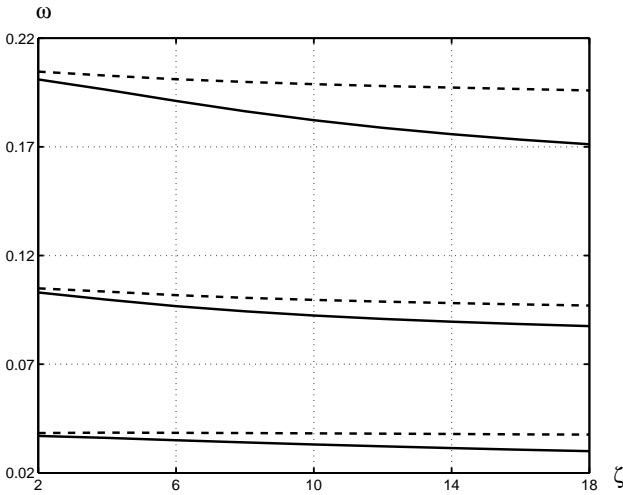


Рис. 2. Влияние толщины оболочки на частоты системы:
сплошные – оболочечная расчетная схема,
штриховые – балочная расчетная схема

ний увеличение длины оболочки требует увеличения количества членов в разложениях (22). В отличие от координатных функций, построенных на классе степенных функций [8], предложенные здесь базисные функции с использованием полиномов Лежандра обеспечивают высокую устойчивость вычислительного процесса при больших N (до 40), что делает возможным проведение необходимых расчетов в широком диапазоне входных параметров системы.

Все вычисления проводились по изложенной выше методике, а также с использованием чисто балочной схемы, в которой цилиндрическая оболочка заменялась балкой с постоянными по длине погонной массой и изгибной жесткостью. Результаты расчетов показали, что во всех случаях для первого типа колебаний упругой системы выполняется неравенство $\omega_i \leq \omega_i^*$, где ω_i и ω_i^* – частоты колебаний, вычисленные в строгой и упрощенной постановках задачи соответственно.

На рис. 2–4 приведены графики изменения частот первых трех тонов колебаний системы первого типа. Сплошным соответствуют частоты ω_i , а штриховым – частоты ω_i^* .

Влияние толщины h цилиндрической оболочки на частоты ω_i и ω_i^* показано на рис. 2 (согласно формуле (42) величина ζ обратно пропорциональна h). При вычислениях было положено $\gamma = 2$, $\gamma_1 = 4$. Из рисунка видно, что уменьшение толщины оболочки сопровождается увеличением различия в частотах ω_i и ω_i^* . Так, если при $\zeta = 2$ различие в первой частоте составляет порядка 3 %, а во

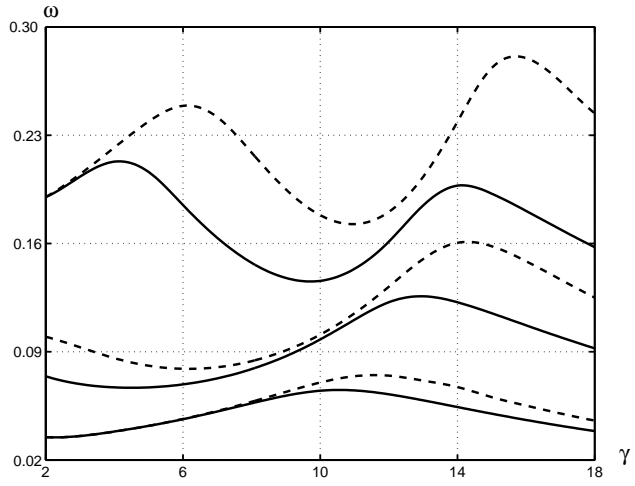


Рис. 3. Влияние длины оболочки на частоты системы:
сплошные – оболочечная расчетная схема,
штриховые – балочная расчетная схема

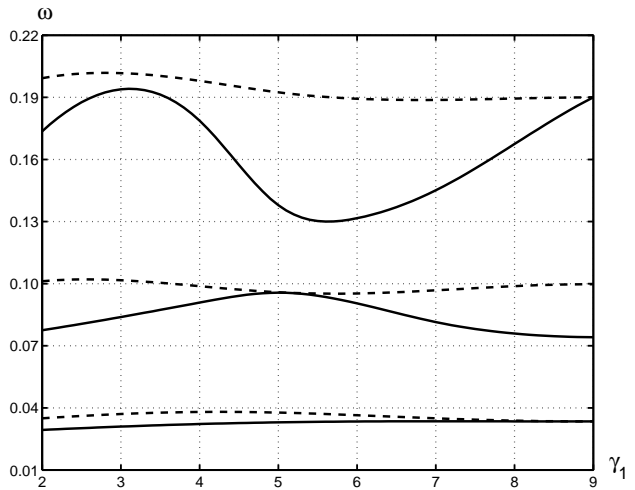


Рис. 4. Влияние местоположения оболочки на частоты системы:
сплошные – оболочечная расчетная схема,
штриховые – балочная расчетная схема

второй и третьей – 2 %, то при $\zeta = 14$ расхождение в первой частоте достигает 20 %, а во второй и третьей – 10 %.

Влияние длины цилиндрической оболочки на первые три частоты ω_i и ω_i^* при $\gamma_1 = \gamma_2$, $R/h = 900$ показано на рис. 3. Обращает на себя внимание довольно сложное поведение частот упругой системы в зависимости от длины цилиндрической вставки. Если при $\gamma \leq 8$ первые частоты ω_1 и ω_1^* в рассматриваемом примере практически совпадают, то для третьей частоты такое совпадение наблюдается при $\gamma < 4$. Минимальная разность во

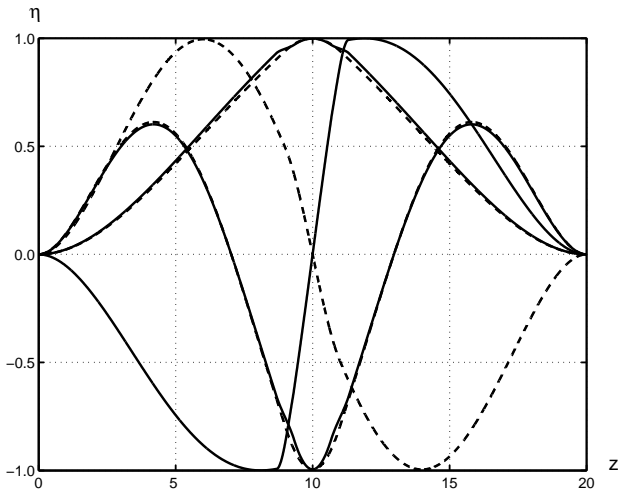


Рис. 5. Формы первых трех тонов колебаний системы при $\gamma=2, \gamma_1=9, R/h=900$:
 сплошные – оболочечная расчетная схема,
 штриховые – балочная расчетная схема

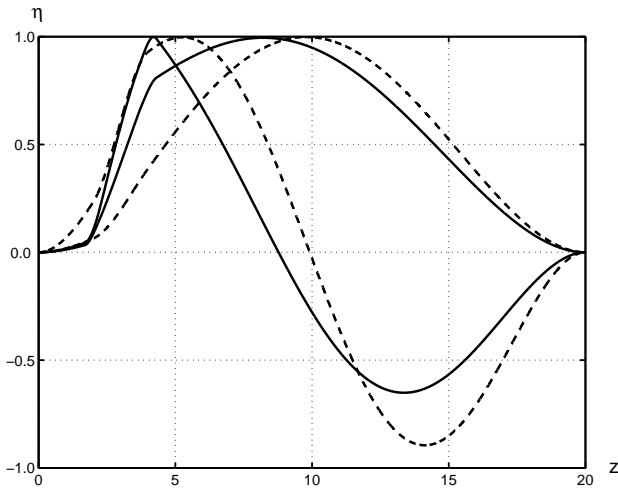


Рис. 6. Формы первых двух тонов колебаний системы при $\gamma=2, \gamma_1=2, R/h=900$:
 сплошные – оболочечная расчетная схема,
 штриховые – балочная расчетная схема

вторых частотах ω_2 и ω_2^* , не превышающая 7 %, наблюдается лишь при $8 < \gamma < 11$.

Зависимость частот от местоположения цилиндрической оболочки при $\gamma=2, R/h=900$ изображена на рис. 4. Отметим, что для случая симметричного расположения цилиндрической вставки в рассматриваемой упругой системе ($\gamma_1 = \gamma_2 = 9$) первые и третьи частоты ω_i и ω_i^* практически совпадают, тогда как для второй частоты расхождение составляет $\approx 35\%$.

Формы η первых трех тонов колебаний для этого

случая представлены на рис. 5. Сплошными показаны формы колебаний, отвечающие частотам ω_i , а штриховыми – частотам ω_i^* . Форма колебаний на участке $[0, z_1]$ совпадает с $\eta_1(\alpha_1)$, на участке $[z_1, z_2]$ – с $w_1(\alpha)$ и на участке $[z_2, z_3]$ – с $\eta_2(\alpha_2)$. Если первая и третья формы колебаний, рассчитанные по строгой и упрощенной постановкам задачи, практически совпадают друг с другом, то различие для второй формы является существенным.

На рис. 6 представлены формы первых двух тонов колебаний системы, рассчитанных при тех же параметрах, но для случая несимметричного расположения оболочки в системе при $\gamma_1=2$. Как видно из рисунка, в этом случае присутствуют расхождения в формах колебаний, полученных разными способами. Порядок этих расхождений соответствует порядку расхождений в частотах колебаний системы.

На рис. 7 в увеличенном масштабе показаны поведение первой формы колебаний системы и ее производной в окрестности сопряжения оболочки с балкой при $\gamma=2, \gamma_1=9, R/h=900$. Из этого рисунка видно, что в довольно узкой зоне оболочки, примыкающей к балке, наблюдаются резкие изменения как по форме, так и по ее производной, что свидетельствует о сложном напряженно-деформированном состоянии оболочки в зоне контакта. Ширина этой зоны и изменчивость перемещений и углов поворота оболочки зависит от перепада жесткостей составляющих элементов конструкции в узлах их стыковки. В соответствии с постановкой задачи, в сечении при $z=9$ выполняются условия непрерывности форм колебаний и их производных. В свою очередь, расчетная модель в виде составной упругой балки при определенных параметрах системы может удовлетворительно описывать деформации упругой системы в целом, но она неприменима для анализа местных деформаций конструкции.

Таким образом, точность представления динамических характеристик рассматриваемой упругой системы упрощенной моделью и пределы ее применимости в каждом конкретном случае должны определяться сравнением результатов с результатами расчета, основанными на уравнениях теории оболочек.

При вычислении частот колебаний ω_i^* по балочной схеме за счет поправочного коэффициента K можно подобрать такую изгибную жесткость $(EI)^* = EI/K$ на участке $[z_1, z_2]$, при которой частота ω_i^* для определенного типа колебаний будет совпадать с частотой ω_i . При этом исходное значение погонной массы считается неизменным.

Согласно рис. 8, значения параметров K для точек пересечения этих кривых с горизонтальными штриховыми линиями, соответствующими частотам ω_i^* , оказываются разными для различных типов колебаний. Они приблизительно равны $K=8, 4$ и 6 для первой, второй и третьей форм колебаний соответственно. Приведенные значения коэффициента K показывают, что если при расчете спектра собственных частот колебаний системы использовать чисто балочную схему, то для совпадения с частотами, полученными по оболочечной схеме, изгибная жесткость участка балки $[z_1, z_2]$ должна быть уменьшена в несколько раз.

Сравнение низших частот первого и второго типов колебаний упругой системы показало, что отношение между ними определяется толщиной и длиной оболочки. Так, при $\gamma_1=4$ и $R/h=1500$ для $\gamma=2$ и $\gamma=4$ низшие частоты первого типа колебаний равны $\omega_1=0.0294$ и 0.0279 соответственно. Минимальные частоты цилиндрической оболочки, жестко заделанной по торцам (частоты второго типа колебаний), равны $\omega_1^{(12)}=0.0439$ и $\omega_1^{(9)}=0.0221$ соответственно. Здесь верхний индекс при ω означает число волн в окружном направлении оболочки. Таким образом, нижней частотой системы при $\gamma=2$ является частота, соответствующая первому, а при $\gamma=4$ – второму типу колебаний. Эти результаты полностью совпадают с расчетными данными работы [9], полученными на основе точного решения рассматриваемой спектральной задачи.

Как уже отмечалось, обращает на себя внимание довольно сложное поведение частот в зависимости от длины цилиндрической вставки (см. рис. 3). Из этого рисунка видно, что балочная схема расчета полностью отображает качественную картину поведения частот системы. Ниже приведем результаты расчетов по балочной схеме, позволяющие дать некоторую физическую интерпретацию немонотонного поведения первой частоты системы.

Во всех расчетах было положено

$$\gamma_1 = \gamma_2, \quad \gamma_1 + \gamma + \gamma_2 = 10,$$

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta, \quad m_1 = m_2 = m.$$

При этом для всех участков неоднородной балки справедливо соотношение

$$\beta^4 = \frac{m}{\zeta} \frac{2}{(1-\nu^2)} \omega^2.$$

Здесь ζ и m – изгибная жесткость и погонная масса участка балки, отнесенные соответственно к

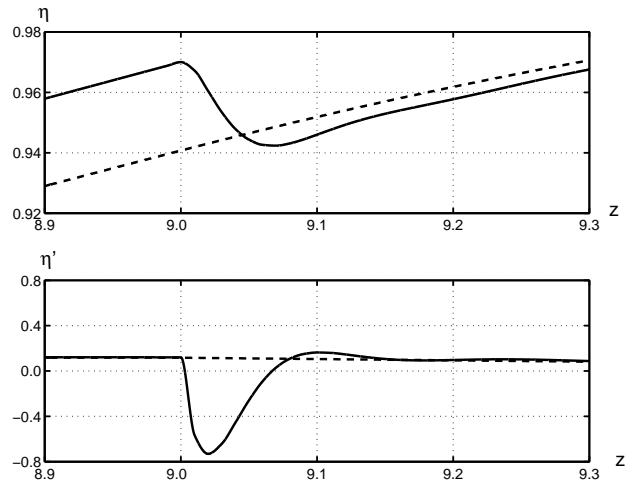


Рис. 7. Поведение первой формы колебаний системы и ее производной в окрестности стыковки оболочки с балками при $\gamma=2, \gamma_1=9, R/h=900$:

сплошные – оболочечная расчетная схема, штриховые – балочная расчетная схема

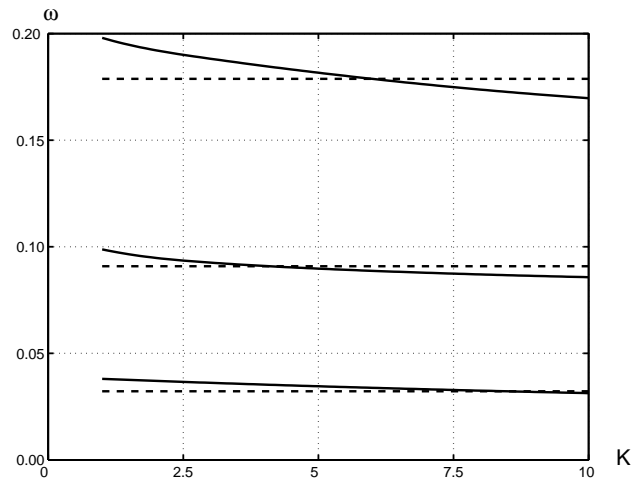


Рис. 8. Зависимость частот составной балки от изгибной жесткости балки на участке $[z_1, z_2]$ при неизменной ее погонной массе:

сплошные – оболочечная расчетная схема, штриховые – балочная расчетная схема

изгибной жесткости и погонной массе центрального участка. Введенные таким образом безразмерные величины ζ и m характеризуют степень неоднородности составной балки по жесткостным и массовым параметрам соответственно.

Известно, что увеличение длины однородной балки ведет к понижению ее частот. Этот же эффект наблюдается при уменьшении жесткости и увеличении погонной массы.

Рассмотрим влияние физических и геометриче-

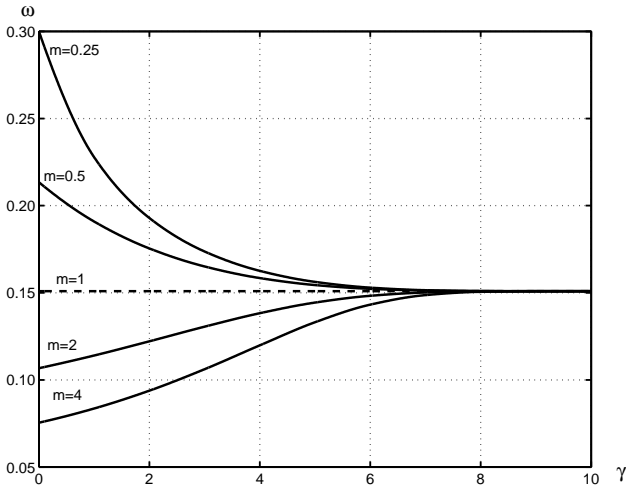


Рис. 9. Зависимость первой частоты составной балки от длины центрального участка при неизменной общей длине системы ($\gamma_1 + \gamma + \gamma_2 = 10$, $\zeta = 1$)

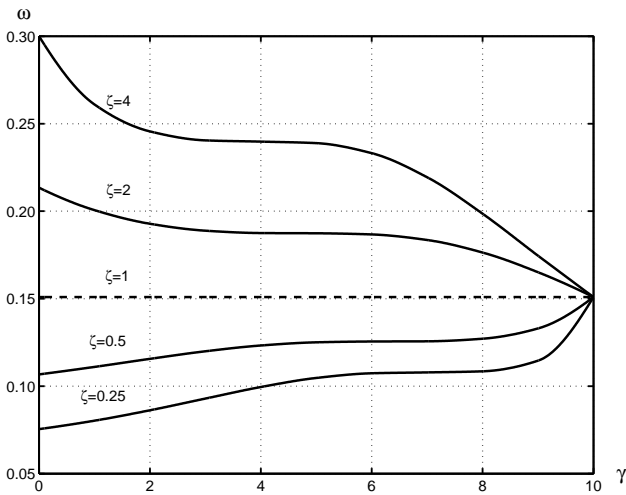


Рис. 10. Зависимость первой частоты составной балки от длины центрального участка при неизменной общей длине системы ($\gamma_1 + \gamma + \gamma_2 = 10$, $m = 1$)

ских параметров на формирование первой частоты рассматриваемой системы более подробно.

На рис. 9 представлены зависимости первой частоты составной балки от длины центрального участка, когда жесткостные параметры для всех ее участков одинаковы ($\zeta = 1$), а погонные массы боковых балок меняются. При $\gamma = 0$ имеем первые частоты однородной балки при соответствующих значениях m . При $\gamma \rightarrow 10$ все кривые стремятся к частоте однородной балки при $m = 1$. Если погонная масса центрального участка больше, чем погонная масса концевых участков, то с увеличением γ частота падает, и наоборот. Падение частот

объясняется увеличением массы системы, а возрастание – уменьшением массы при увеличении длины центрального участка.

На рис. 10 представлен случай, когда составная балка однородна по своим массовым параметрам ($m = 1$), но участки имеют различные изгибные жесткости. Объяснение поведения первой частоты здесь аналогично случаю, рассмотренному выше, с той лишь разницей, что с увеличением жесткости системы частота повышается, а с уменьшением – понижается. В обоих случаях имеем монотонный характер поведения первой частоты при изменении длины центрального участка.

На рис. 11 и 12 представлены зависимости первой частоты составных балок от длины центрального участка при $m/\zeta = 1$ и 5 соответственно для разных значений ζ . Видно, что существенное влияние на поведение частоты оказывает степень неоднородности как по массовым, так и по жесткостным параметрам составной балки. При $\gamma = 0$ и $\gamma = 10$ имеем частоту однородной балки при заданной величине m/ζ . С увеличением длины центральной вставки (см. рис. 11) при $\zeta = 2$ частота сразу начинает возрастать. По-видимому, на этом этапе на частоту системы преобладающее влияние оказывают параметры концевых участков составной балки и возрастание частоты происходит за счет уменьшения их длин γ_1 и γ_2 . При $\zeta > 2$ вначале наблюдается падение частоты, а при дальнейшем увеличении γ – ее рост. Это можно объяснить начальным ослаблением жесткости системы центральной вставкой. Однако затем, опять-таки за счет уменьшения γ_1 и γ_2 , наблюдается повышение частоты. Дальнейшее увеличение длины центральной вставки ведет к ослаблению влияния концевых участков на формирование частоты системы, что приводит к ее снижению к частоте однородного стержня при $m/\zeta = 1$.

В случае $\zeta < 1$ (массовые и жесткостные параметры центрального участка выше, чем у концевых участков) наблюдается несколько иная картина. Так, при $\zeta = 0.05$ с увеличением γ частота резко понижается, затем возрастает и приближается к частоте однородного стержня при $m/\zeta = 1$. Падение частоты можно объяснить существенным увеличением массы системы при начальном увеличении длины центрального участка. Дальнейшее поведение частоты при увеличении γ зависит от степени неоднородности составной балки. Так, если погонная масса и изгибная жесткость центрального участка в четыре раза больше, чем соответствующие величины концевых участков ($\zeta = 0.25$), то частота продолжает несколько снижаться. При существенном увеличении степени неоднородности

($\zeta = 0.05$ – погонная масса и изгибная жесткость центрального участка в двадцать раз больше, чем соответствующие величины конечных участков) – частота возрастает.

Практически аналогичная картина наблюдается в случае, представленном на рис. 12. Нетрудно заметить, что здесь на формирование частот большее влияние оказывают массовые параметры. Это обуславливает общее снижение частот по отношению к представленным на рис. 11.

На основании вышеизложенного можно сделать вывод о сложном взаимодействии физических и геометрических параметров при формировании частот рассматриваемой упругой системы. При этом различные соотношения физических величин m и ζ могут по-разному влиять на характер поведения частот при изменении геометрических параметров рассматриваемой конструкции.

Проведенный анализ указывает на необходимость предварительного осуществления расчетов по предложенной схеме при проведении проектно-конструкторских работ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложено приближенное решение задачи о собственных поперечных колебаниях тонкостенной круговой цилиндрической оболочки, соединяющей две упругие балки, на основе ее эквивалентной вариационной формулировки. Сопоставление точных и приближенных решений рассматриваемой задачи свидетельствует о достаточно высокой эффективности предложенного варианта вариационного метода.

Показано, что собственные колебания упругой системы распадаются на два типа колебаний. Первый тип обусловлен связанными колебаниями балок и оболочки в одной из плоскостей симметрии всей системы, когда количество волн в окружном направлении оболочки равно единице. При втором типе колебаний оболочка совершает пространственные неосесимметричные колебания с количеством волн в окружном направлении, большим единицы, тогда как балки остаются неподвижными. Минимальной частотой упругой системы будет меньшая из минимальных частот первого и второго типа колебаний.

В предположении, что деформации оболочки подчинены гипотезе плоских сечений, на основе метода начальных параметров Коши приведено точное решение рассматриваемой задачи в упрощенной постановке.

В рамках строгой и упрощенной постановок задачи проведено исследование частот и форм соб-

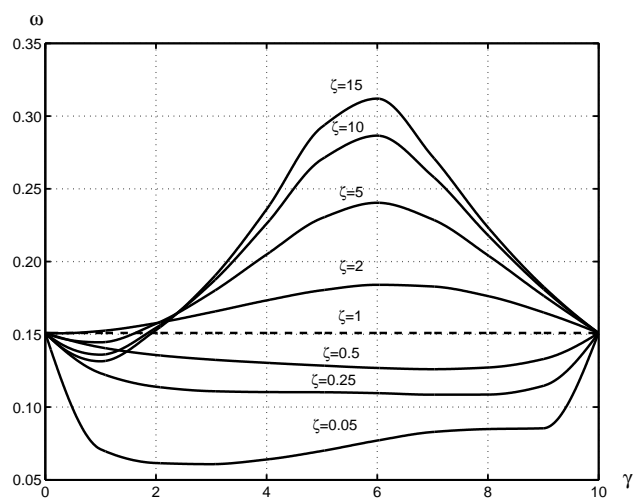


Рис. 11. Зависимость первой частоты составной балки от длины центрального участка при неизменной общей длине системы ($\gamma_1 + \gamma + \gamma_2 = 10$, $m/\zeta = 1$)

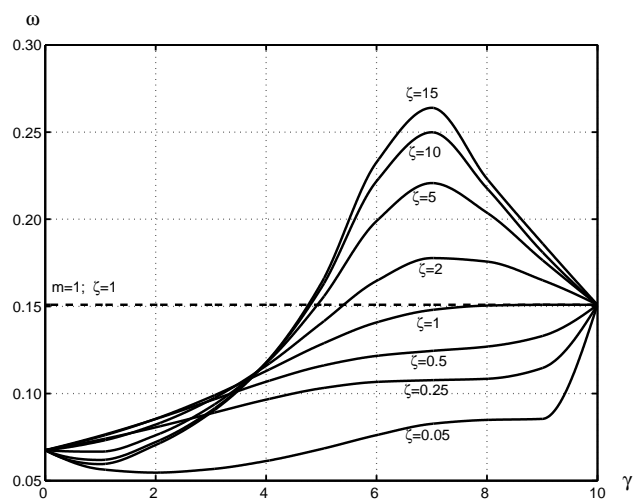


Рис. 12. Зависимость первой частоты составной балки от длины центрального участка при неизменной общей длине системы ($\gamma_1 + \gamma + \gamma_2 = 10$, $m/\zeta = 5$)

ственных колебаний упругой системы в зависимости от толщины оболочки, ее длины и местоположения. При этом показано, что в ряде случаев учет оболочечных эффектов цилиндрической вставки приводит к значительному различию в частотах и формах связанных колебаний, вычисленных по балочной схеме и при строгой постановке задачи. Такое различие наблюдается при резком перепаде жесткостей в узлах стыковки оболочки с балками. В связи с этим для достоверного описания динамических свойств системы в указанном случае необходимо привлекать расчетные схемы, основанные

на уравнениях теории оболочек.

Установлена возможность подбора изгибной жесткости при неизменной погонной массе участка балки, заменяющего цилиндрическую оболочку, при которой частоты, вычисленные по балочной схеме, будут совпадать с частотами, вычисленными по оболочечной схеме. При этом эквивалентные изгибные жесткости участка балки будут различными для разных форм колебаний.

На конкретных примерах проведено сравнение низших частот совместных колебаний системы с минимальными частотами цилиндрической оболочки при количестве волн в окружном направлении, большем единицы. Показано, что соотношение между ними определяется геометрическими характеристиками оболочки.

На примере с использованием балочной схемы расчета проведен анализ влияния физических и геометрических параметров системы на формирование ее низшей частоты. Показано, что основную роль при формировании частот играют соотношения массовых и жесткостных характеристик в сочетании с геометрическими параметрами системы.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Автор выражает благодарность академику НАН Украины В. Т. Гринченко за оказанное внимание к работе и сделанные замечания, способствовавшие улучшению ее содержания.

1. *Бреславский В. Е.* Продольные колебания цилиндрической оболочки, скрепленной с упруго-вязким наполнителем и сосредоточенными массами // Проблемы машиностроения.– 1981.– N 14.– С. 27–32.
2. *Бреславский В. Е.* Исследование колебаний тонких оболочек, скрепленных с наполнителем // Труды VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ленинград, 21–28 мая, 1973.– М: Наука.– 1973.– С. 271–276.
3. *Паламарчук В. Г.* Свободные колебания системы, состоящей из ребристой цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела // Прикл. мех.– 1978.– 14, N 4.– С. 56–62.
4. *Паламарчук В. Г.* Динамическая неустойчивость системы, состоящей из ребристой цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела // Прикл. мех.– 1978.– 14, N 5.– С. 45–51.
5. *Каиров А. С.* Влияние формы меридиана и присоединенных тел на собственные колебания оболочки вращения // Теор. и прикл. мех.– 1999.– Вып. 29.– С. 117–122.
6. *Каиров А. С.* Влияние подкреплений и геометрических характеристик на свободные колебания оболочек вращения с сосредоточенными массами // Судостроение.– 1986.– Вып. 35.– С. 16–22.
7. *Trotsenko Yu. V.* On equilibrium equations of cylindrical shell with attached rigid body // Nonlinear Oscillations.– 2001.– 4, N 3.– P. 422–431.
8. *Карпачев Ю. А., Троценко В. А., Троценко Ю. В.* Собственные неосесимметричные колебания цилиндрической оболочки с присоединенным твердым телом // Акуст. вісн.– 2001.– 4, N 1.– С. 44–59.
9. *Швейко Ю. Ю., Брусиловский А. Д., Мельникова А. М.* Поперечные колебания балок, соединенных цилиндрической оболочкой // Прикл. мех.– 1968.– 4, N 8.– С. 32–39.
10. *Брусиловский А. Д., Швейко Ю. Ю., Шмаков В. П.* Продольные колебания упругих конструкций с тонкостенными полостями, содержащими жидкость // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью.– Томск: Томский ун-т, 1978.– С. 21–31.
11. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек.– Л.: Судпромгиз, 1962.– 432 с.
12. *Крылов А. И.* Вибрация судов.– Л.: ОНТИ, 1936.– 442 с.
13. *Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость.– М.: Машиностроение, 1971.– 564 с.