

УДК 534.26

ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ КОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ, ВОЗБУЖДАЕМОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СЛУЧАЙНОЙ НАГРУЗКОЙ НА ГРАНИЦЕ

В. В. КРИЖАНОВСКИЙ, В. В. КРИЖАНОВСКИЙ - м. л.

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 8.11.2000 ◊ Пересмотрено 26.09.2001

Рассмотрена задача вычисления акустического поля в конечном кусочно-однородном полой цилиндре. Предполагается, что поле создается осесимметричными источниками, расположенными на внутренней стенке цилиндра. На основе метода разложения решения краевой задачи по собственным функциям дифференциальных операторов уравнения Гельмгольца определена структура акустического поля. Выполнен анализ структуры решений для разных вариантов задания условий сопряжения компонент поля на границах между слоями цилиндра. Определена рациональная, с точки зрения точности вычислений, форма общего решения. Для трехслойной модели вычислена спектральная плотность мощности поля радиальной колебательной скорости на наружной боковой стенке цилиндра. Предполагается, что поле создается случайными пульсациями давления некоррелированных по пространству источников. Определены спектральные характеристики наблюдаемого акустического поля, чувствительные к неоднородностям по плотности и скорости распространения акустических колебаний. Показано, что слоистая структура неоднородностей цилиндра по плотности может быть обнаружена по данным о распределении спектральной плотности мощности акустического поля вдоль образующей цилиндра. При этом поле может формироваться как сосредоточенными, так и распределенными источниками. Для определения слоистых неоднородностей по скорости целесообразно использовать данные о взаимной спектральной плотности мощности акустического поля между точками наблюдения вдоль образующей цилиндра. Поле при этом должно формироваться источником, сосредоточенным вблизи одного из торцов цилиндра.

Розглянуто задачу обчислення акустичного поля в кінцевому кусочно-однорідному порожнистому циліндрі. Вважається, що поле створюється осесиметричними джерелами, розташованими на внутрішній стінці циліндра. На основі методу розкладу розв'язку крайової задачі по власним функціям диференціальних операторів рівняння Гельмгольца визначено структуру акустичного поля. Виконано аналіз структури розв'язків для різних варіантів завдання умов спряження компонент поля на межах між шарами циліндра. Визначена раціональна, з погляду точності обчислень, форма загального розв'язку. Для тришарової моделі обчислено спектральну щільність потужності поля радіальної коливальної швидкості на зовнішній бічній стінці циліндра. Вважається, що поле створюється випадковими пульсаціями тиску некорельованих по простору джерел. Визначено спектральні характеристики результуючого акустичного поля, чутливі до неоднорідностей густини та швидкості поширення акустичних коливань. Показано, що шарувата структура неоднорідностей циліндра по густині може бути виявлена за даними про розподіл спектральної щільності потужності акустичного поля уздовж твірної циліндра. При цьому поле може формуватися як зосередженими, так і розподіленими джерелами. Для визначення шаруватих неоднорідностей по швидкості доцільно використовувати дані про взаємну спектральну щільність потужності акустичного поля між точками спостереження уздовж твірної циліндра. Поле при цьому повинно формуватися джерелом, зосередженим поблизу одного з торців циліндра.

The problem of calculation of an acoustic field in a finite piecewise-homogeneous hollow cylinder is considered. It is supposed that the field is induced by axi-symmetric sources situated on an internal wall of the cylinder. On the base of the method of decomposition of the boundary problem solution with respect to eigen-functions of differential operators of the Helmholtz's equation the structure of an acoustic field is determined. The structure of solutions for different variants of matching conditions on the interfaces between the cylinder's layers is analyzed. The rational form of general solution, from the viewpoint of numerical precision, is found. The spectral power density of radial vibrational velocity on the external lateral cylinder wall is calculated for a three-layered model. It is supposed that the field is induced by random pressure pulsations, uncorrelated in space. The spectral characteristics of the observed acoustic field, sensitive to heterogeneities on density and the sound speed, are determined. It is shown that the layered cylinder's heterogeneity on density can be discovered using the data on distribution of the spectral power density of an acoustic field along the cylinder's generatrix. In doing so, the sound field may be formed both by the point sources, and the distributed ones. To determine the layered heterogeneity on the sound speed it is expedient to analyze the data on mutual spectral power density of an acoustic field between the supervision points along the cylinder's generatrix. In this case the field should be formed by the source concentrated nearby the cylinder's end faces.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], объективным признаком проявления заболеваний органов дыхания человека (острой очаговой пневмонии, пневмосклероза, туберкулеза и др.) является поражение тканей этих органов. При этом могут изменяться такие фи-

зические характеристики пораженных тканей как плотность и скорость распространения звука [2,3]. В случае очаговых поражений долей легких, в них формируются протяженные области патологической неоднородности тканей паренхимы, которые являются диагностическим признаком заболевания. Использование ультразвуковых сигналов для

выявления этих патологий оказывается малоэффективным [4] из-за их сильного затухания, а также малой плотности неоднородностей мягкой ткани паренхимы. В свою очередь, существенным недостатком рентгенологических методов [1] является значительная лучевая нагрузка на организм обследуемого пациента и медицинский персонал.

Кроме указанных методов обследования, в практической медицине широко используется аускультация, т. е. выслушивание шумов дыхания на поверхности грудной клетки. При этом выявление патологии производится по изменению характера звуковых сигналов в некоторой системе пространственно-разнесенных точек. Существенным достоинством этого подхода является его неинвазивность.

Развитие компьютерных методов регистрации и обработки акустических сигналов шумов дыхания [5, 6] позволяет существенно расширить диагностические возможности аускультативных методик. В связи с этим, представляет интерес исследование влияния акустических параметров неоднородностей на характеристики сигналов регистрируемых на поверхности грудной клетки. Проведение указанных исследований *in vivo* сопряжено со значительными сложностями. Поэтому целесообразно рассмотреть упрощенную модельную ситуацию, позволяющую получить аналитическое решение поставленной задачи.

Предположим, что грудная клетка вместе с легкими до уровня диафрагмы моделируется кусочно-однородным полым цилиндром со стенками конечной толщины. Примем также, что шумы, возбуждаемые при дыхании турбулентным потоком воздуха в больших дыхательных путях, могут быть представлены осесимметричным распределением пульсаций давления, действующим на внутреннюю боковую стенку данного цилиндра, а приемники шумов дыхания размещены по образующей на ее внешней боковой поверхности. На основе такого модельного представления можно перейти к строгой математической формулировке рассматриваемой задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется кусочно-однородный полый цилиндр, наружный и внутренний радиусы которого равны r_1 и r_0 соответственно. Будем полагать, что цилиндр разделен на N однородных поперечных слоев Ω_i , $i = 1, \dots, N$, имеющих следующие параметры: высоту l_i , плотность ρ_i и скорость распространения звука c_i . Общую высоту цилиндра обозначим через $l = l_1 + l_2 + \dots + l_N$. Геометрия за-

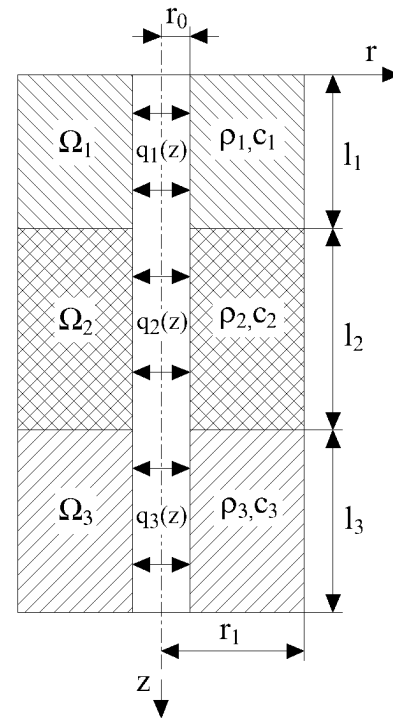


Рис. 1. Модель трехслойного цилиндра

дачи для случая $N = 3$ представлена на рис. 1.

Предположим, что акустическое поле в цилиндре возбуждается случайными пульсациями давления, заданными на его внутренней боковой стенке, которые в пределах каждого i -го слоя будем обозначать $q_i(\omega, z) = q_i(\omega, r_0, z)$, $i = 1, \dots, N$. Необходимо определить поле $\phi_i(\omega, r, z)$, регистрируемое на наружной боковой стенке i -го слоя цилиндра.

Данная постановка относится к классу задач о поле в плоско-слоистом волноводе [7], при решении которых основное внимание уделяется эффектам, связанным со слоистостью среды. Это позволяет использовать упрощенные модели, не учитывающие влияние конечных размеров и формы слоистой области на структуру поля, что существенно упрощает рассуждения. Вместе с тем, для ограниченных слоистых областей, размеры которых превышают длину волны, а затухание в среде не столь значительно, чтобы можно было пренебречь отраженными от границ волнами, корректное описание структуры акустического поля требует полного учета влияния всех границ слоистой области. В общем случае получить замкнутое решение этой задачи не удастся. Однако, для осесимметричной постановки решение может быть представлено в явном виде. Покажем это.

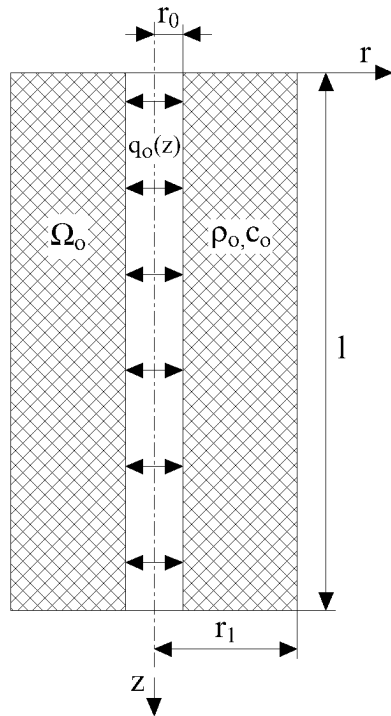


Рис. 2. Модель однородного цилиндра

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

С методической точки зрения удобно сначала получить решение задачи для однородного полого цилиндра (рис. 2). С одной стороны, это позволит более наглядно представить процедуру вычисления поля, а с другой, – полученные результаты будут полезны при сравнительном анализе решений для моделей однородного и кусочно-однородного цилиндров.

Геометрические параметры задачи l , r_1 и r_0 те же, что и на рис. 1. Акустические характеристики стенок цилиндра обозначим как ρ_0 и c_0 , а пульсации давления на внутренней боковой стенке цилиндра – как $q_0(\omega, z)$. Кроме того, предположим, что на торцах цилиндра также могут действовать источники, определяемые функциями $p_i(\omega, r)$, $i = 0, 1$, которые связаны с пульсациями давления или колебательной скорости. Необходимо найти акустическое поле $\phi_0(\omega, r, z)$, создаваемое источниками на боковой наружной поверхности однородного цилиндра.

В результате имеем следующую краевую задачу. Требуется вычислить поле $\phi_0(\omega, r, z)$, которое

должно удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta \phi_0(\omega, r, z) + k^2 \phi_0(\omega, r, z) = 0, \quad (1)$$

где $k = \omega/c$, и граничным условиям

$$\Gamma_{zi}(\phi) = p_i, \quad i = 0, 1, \quad (2)$$

$$\phi(\omega, r, z)|_{r=r_1} = 0, \quad (3)$$

$$-j\omega\rho_0\phi(\omega, r, z)|_{r=r_0} = q_0(\omega, z), \quad (4)$$

где Γ_{zi} – оператор граничных условий по переменной z :

$$\Gamma_{zi}(\phi) = [\lambda_i\phi(\omega, r, z) + \beta_i \frac{\partial \phi(\omega, r, z)}{\partial z}]|_{z=z_i}. \quad (5)$$

В соотношениях (2) – (5) введены обозначения координат торцевых поверхностей цилиндра: $z_0 = 0$ и $z_1 = l$, а для варьирования характеристик краевых условий на торцах используются константы λ_i и β_i , входящие в оператор граничных условий (5).

При последующем изложении результатов для сокращения записей мы будем опускать аргумент ω в тех местах, где это не существенно. Кроме того, для учета затухания в стенках цилиндра введем комплексную добавку Δc_0 к скорости распространения звука c : $c = c_0 + j\Delta c_0$, $j = \sqrt{-1}$.

Так как исследуемая задача обладает осевой симметрией, можно не учитывать зависимость решения от азимутального угла и рассматривать уравнение Гельмгольца для плоской задачи:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k^2 \phi = 0. \quad (6)$$

Чтобы обеспечить выполнение неоднородных граничных условий на торцах и боковых стенках цилиндра, представим решение в виде суммы двух компонент:

$$\phi(\omega, r, z) = \phi^{(I)}(\omega, r, z) + \phi^{(II)}(\omega, r, z). \quad (7)$$

При этом компонента $\phi^{(I)}(\omega, r, z)$ должна удовлетворять неоднородному граничному условию (4), а компонента $\phi^{(II)}(\omega, r, z)$ – неоднородному граничному условию (2). Для определения структуры обеих компонент воспользуемся методом разложения решения краевой задачи по собственным функциям дифференциальных операторов уравнения Гельмгольца [8]. Тогда $\phi^{(I)}(\omega, r, z)$ можно представить в виде разложения в ряд:

$$\begin{aligned} \phi^{(I)}(\omega, r, z) = \sum_n (a_n^{(I)} \psi_n^{(I)}(r) + b_n^{(I)} \eta_n^{(I)}(r)) \times \\ \times (A_n^{(I)} \xi_n^{(I)}(z) + B_n^{(I)} \gamma_n^{(I)}(z)), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\xi_n^{(I)}(z) \equiv \xi(\alpha_n^{(I)} z)$ и $\gamma_n^{(I)}(z) \equiv \gamma(\alpha_n^{(I)} z)$ – линейно-независимые собственные функции дифференциального оператора

$$D_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (9)$$

соответствующие собственным числам $-(\alpha_n^{(I)})^2$, удовлетворяющим дисперсионному уравнению

$$\Gamma_{z1}(\xi_n^{(I)})\Gamma_{z0}(\gamma_n^{(I)}) - \Gamma_{z0}(\xi_n^{(I)})\Gamma_{z1}(\gamma_n^{(I)}) = 0. \quad (10)$$

Заметим, что в качестве линейно-независимых функций можно использовать следующую пару:

$$\begin{aligned} \xi_n^{(I)}(z) &= \sin(\alpha_n^{(I)} z), \\ \gamma_n^{(I)}(z) &= \cos(\alpha_n^{(I)} z). \end{aligned} \quad (11)$$

Вторая пара линейно-независимых собственных функций

$$\psi_n^{(I)}(r) \equiv \psi(k_n^{(I)} r), \quad \eta_n^{(I)}(r) \equiv \eta(k_n^{(I)} r)$$

соответствует собственным числам $-(k_n^{(I)})^2$, определяемым соотношением

$$(k_n^{(I)})^2 = k^2 - (\alpha_n^{(I)})^2, \quad (12)$$

и удовлетворяет дифференциальному оператору

$$D_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (13)$$

Здесь вид линейно-независимых функций $\psi_n^{(I)}(r)$ и $\eta_n^{(I)}(r)$ при действительных значениях k и $\alpha_n^{(I)}$ зависит от знака разности квадратов (12). В связи с этим определим указанные функции соотношениями:

$$\psi_n^{(I)}(r) = \begin{cases} J_0(k_n^{(I)} r) & \text{при } k \geq \alpha_n^{(I)}, \\ I_0(k_n^{(I)} r) & \text{при } k < \alpha_n^{(I)}, \end{cases} \quad (14)$$

$$\eta_n^{(I)}(r) = \begin{cases} N_0(k_n^{(I)} r) & \text{при } k \geq \alpha_n^{(I)}, \\ K_0(k_n^{(I)} r) & \text{при } k < \alpha_n^{(I)}, \end{cases} \quad (15)$$

где J_0 , N_0 – функции Бесселя и Неймана, а I_0 и K_0 – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда соответственно.

Частотно-зависимые неизвестные весовые коэффициенты $a_n^{(I)}$, $b_n^{(I)}$, $A_n^{(I)}$ и $B_n^{(I)}$ находим, используя заданные граничные условия. В частности, из граничного условия (2), которое для компоненты $\phi^{(I)}(\omega, r, z)$ имеет вид

$$\Gamma_{zi}(\phi^{(I)}) = 0, \quad i = 0, 1, \quad (16)$$

следует

$$A_n^{(I)} = \Gamma_{z0}(\gamma_n^{(I)}), \quad B_n^{(I)} = -\Gamma_{z0}(\xi_n^{(I)}). \quad (17)$$

Неизвестные коэффициенты $a_n^{(I)}$ и $b_n^{(I)}$ получаем из граничных условий (3) и (4). Подставив в них разложение (8) и используя свойство ортогональности собственных функций, соответствующих разным собственным числам, получаем систему уравнений относительно $a_n^{(I)}$, $b_n^{(I)}$:

$$\begin{cases} a_n^{(I)} \psi_n^{(I)}(r_0) + b_n^{(I)} \eta_n^{(I)}(r_0) = \frac{j}{\omega \rho_0} \frac{Q_n^{(I)}}{\|H_n^{(I)}\|}, \\ a_n^{(I)} \psi_n^{(I)}(r_1) + b_n^{(I)} \eta_n^{(I)}(r_1) = 0, \end{cases} \quad (18)$$

где

$$H_n^{(I)}(z, z_0) = \Gamma_{z0}(\gamma_n^{(I)})\xi_n^{(I)}(z) - \Gamma_{z0}(\xi_n^{(I)})\gamma_n^{(I)}(z);$$

$$(H_n^{(I)}, H_m^{(I)})_z = \|H_n^{(I)}\| \delta_{nm}; \quad Q_n^{(I)} = (q, H_n^{(I)})_z;$$

$$\|H_n^{(I)}\| = (H_n^{(I)}, H_n^{(I)})_z.$$

В этих выражениях введен символ скалярного произведения функций $g(z)$ и $s(z)$ по переменной z :

$$(g, s)_z = \int_{z_0}^{z_1} g(z)s(z)dz,$$

а через δ_{nm} обозначен символ Кронекера. Решая эту систему и подставляя найденные коэффициенты в ряд (8), получим для первой компоненты выражение

$$\begin{aligned} \phi^{(I)}(\omega, r, z) &= \\ &= \frac{j}{\omega \rho_0} \sum_n \frac{Q_n^{(I)} Z_n^{(I)}(r, r_1) H_n^{(I)}(z, z_0)}{\|H_n^{(I)}\| Z_n^{(I)}(r_0, r_1)}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $Z_n^{(I)}(r, r_1) = \psi_n^{(I)}(r)\eta_n^{(I)}(r_1) - \psi_n^{(I)}(r_1)\eta_n^{(I)}(r)$.

Для радиальной компоненты колебательной скорости на наружной боковой поверхности цилиндра, связанной с потенциалом скорости известным соотношением

$$v(\omega, z) = \frac{\partial \phi(\omega, r, z)}{\partial r} \Big|_{r=r_1}, \quad (20)$$

структура выражения (19) несколько упрощается, и окончательное выражение для первой компоненты радиальной колебательной скорости имеет вид

$$v^{(I)}(\omega, z) = \frac{2j}{\omega \pi r_1 \rho_0} \sum_n \frac{Q_n^{(I)} H_n^{(I)}(z, z_0)}{\|H_n^{(I)}\| Z_n^{(I)}(r_0, r_1)}. \quad (21)$$

Аналогичным образом определяем разложение в ряд компоненты $\phi^{(II)}(\omega, r, z)$:

$$\begin{aligned} \phi^{(II)}(\omega, r, z) &= \\ &= \sum_n (a_n^{(II)} \psi_n^{(II)}(r) + b_n^{(II)} \eta_n^{(II)}(r)) \times \\ &\times (A_n^{(II)} \xi_n^{(II)}(z) + B_n^{(II)} \gamma_n^{(II)}(z)), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\psi_n^{(II)}(r) \equiv \psi(k_n^{(II)} r)$ и $\eta_n^{(II)}(r) \equiv \eta(k_n^{(II)} r)$ – линейно-независимые собственные функции дифференциального оператора (13), соответствующие собственным значениям $-(k_n^{(II)})^2$, удовлетворяющим дисперсионному уравнению

$$\psi_n^{(II)}(r_1) \eta_n^{(II)}(r_0) - \psi_n^{(II)}(r_0) \eta_n^{(II)}(r_1) = 0. \quad (23)$$

Заметим, что в качестве линейно-независимых функций здесь можно использовать следующую пару:

$$\psi_n^{(II)}(r) = J_0(k_n^{(II)} r), \quad \eta_n^{(II)}(r) = N_0(k_n^{(II)} r). \quad (24)$$

Вторая пара линейно-независимых собственных функций $\xi_n^{(II)}(z) = \xi(\alpha_n^{(II)} z)$ и $\gamma_n^{(II)}(z) = \gamma(\alpha_n^{(II)} z)$ соответствует собственным числам $-(\alpha_n^{(II)})^2$, определяемым соотношением

$$(\alpha_n^{(II)})^2 = k^2 - (k_n^{(II)})^2, \quad (25)$$

и удовлетворяет дифференциальному оператору (9). Здесь вид линейно-независимых функций $\xi_n^{(II)}(z)$ и $\gamma_n^{(II)}(z)$ при действительных значениях k и $k_n^{(II)}$ зависит от знака разности квадратов (25). В связи с этим можем определить указанные функции соотношениями:

$$\xi_n^{(II)}(z) = \begin{cases} \sin(\alpha_n^{(II)} z) & \text{при } k \geq k_n^{(II)}, \\ \text{sh}(\alpha_n^{(II)} z) & \text{при } k < k_n^{(II)}, \end{cases} \quad (26)$$

$$\gamma_n^{(II)}(z) = \begin{cases} \cos(\alpha_n^{(II)} z) & \text{при } k \geq k_n^{(II)}, \\ \text{ch}(\alpha_n^{(II)} z) & \text{при } k < k_n^{(II)}. \end{cases} \quad (27)$$

Из граничных условий (3) и (4), которые для компоненты $\phi^{(II)}(\omega, r, z)$ имеют вид

$$\phi^{(II)}(\omega, r, z)|_{r=r_i} = 0, \quad i = 0, 1, \quad (28)$$

определяем неизвестные коэффициенты

$$a_n^{(II)} = \eta_n^{(II)}(r_0), \quad b_n^{(II)} = -\psi_n^{(II)}(r_0). \quad (29)$$

Наконец, неизвестные коэффициенты $A_n^{(II)}$ и $B_n^{(II)}$ получаем, используя краевые условия (2). Подставив в эти условия разложение (22) и используя свойство ортогональности собственных функций, соответствующих разным собственным числам, получим следующую систему из двух уравнений ($i=0, 1$):

$$A_n^{(II)} \Gamma_{zi}(\xi_n^{(II)}) + B_n^{(II)} \Gamma_{zi}(\gamma_n^{(II)}) = \frac{P_{ni}^{(II)}}{\|Z_n^{(II)}\|}, \quad (30)$$

где

$$Z_n^{(II)}(r, r_0) = \psi_n^{(II)}(r) \eta_n^{(II)}(r_0) - \psi_n^{(II)}(r_0) \eta_n^{(II)}(r);$$

$$(Z_n^{(II)}, Z_m^{(II)})_r = \|Z_n^{(II)}\| \delta_{nm}; \quad P_{in}^{(II)} = (p_i, Z_n^{(II)})_r;$$

$$\|Z_n^{(II)}\| = (Z_n^{(II)}, Z_n^{(II)})_r;$$

$$(g, s)_r = \int_{r_0}^{r_1} g(r) s(r) r dr \quad -$$

символ взвешенного скалярного произведения функций $g(r)$ и $s(r)$ по переменной r . Решая эту систему уравнений и подставляя полученные коэффициенты в ряд (22), находим для второй компоненты выражение:

$$\begin{aligned} \phi^{(II)}(\omega, r, z) &= \sum_n \frac{Z_n^{(II)}(r, r_0)}{\|Z_n^{(II)}\| D_n^{(II)}} \times \\ &\times (D_{An}^{(II)} \xi_n^{(II)}(z) + D_{Bn}^{(II)} \gamma_n^{(II)}(z)), \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$D_n^{(II)} = \Gamma_{z0}(\xi_n^{(II)}) \Gamma_{z1}(\gamma_n^{(II)}) - \Gamma_{z1}(\xi_n^{(II)}) \Gamma_{z0}(\gamma_n^{(II)});$$

$$D_{An}^{(II)} = P_{n0} \Gamma_{z1}(\gamma_n^{(II)}) - P_{n1} \Gamma_{z0}(\gamma_n^{(II)});$$

$$D_{Bn}^{(II)} = P_{n1} \Gamma_{z0}(\xi_n^{(II)}) - P_{n0} \Gamma_{z1}(\xi_n^{(II)}).$$

Отсюда легко получить выражение для радиальной составляющей колебательной скорости второй компоненты:

$$\begin{aligned} v^{(II)}(\omega, z) &= \frac{2}{\pi r_1} \sum_n \frac{1}{\|Z_n^{(II)}\| D_n^{(II)}} \times \\ &\times (D_{An}^{(II)} \xi_n^{(II)}(z) + D_{Bn}^{(II)} \gamma_n^{(II)}(z)). \end{aligned} \quad (32)$$

Таким образом, полностью определены выражения для компонент поля радиальных колебательных скоростей $v^{(I)}(\omega, z)$ и $v^{(II)}(\omega, z)$. Из полученных соотношений видно, что эти компоненты не связаны друг с другом, так как, в силу принятых нами предположений, независимы источники, возбуждающие эти компоненты. В частности,

при $q(z)=0$ полное поле определяется только компонентой $v^{(II)}(\omega, z)$, а при $p_i=0, i=0, 1$ – только компонентой $v^{(I)}(\omega, z)$.

3. РЕШЕНИЕ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

Рассмотрим теперь решение задачи для N -слойного кусочно-однородного цилиндра. В этом случае граничные условия для поля $\phi_i(\omega, r, z)$ внутри i -го слоя имеют вид на торцах:

$$\begin{aligned} \rho_i \phi_i(\omega, r, z) \Big|_{z=z_i} &= \rho_{i+1} \phi_{i+1}(\omega, r, z) \Big|_{z=z_i}, \\ \frac{\partial \phi_i(\omega, r, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_i} &= \frac{\partial \phi_{i+1}(\omega, r, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_i}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$i = 1, \dots, N-1,$$

причем

$$\begin{aligned} \phi_1(\omega, r, z) \Big|_{z=z_0} &= 0, \\ \frac{\partial \phi_N(\omega, r, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_N} &= 0, \end{aligned} \quad (34)$$

а на боковых поверхностях:

$$\begin{aligned} -j\omega \rho_i \phi_i(\omega, r, z) \Big|_{r=r_0} &= q_i(\omega, z), \\ \phi_i(\omega, r, z) \Big|_{r=r_1} &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

Здесь $z_i = l_1 + l_2 + \dots + l_i$.

Анализ граничных условий показывает, что в пределах каждого слоя они подобны краевым условиям рассмотренной выше задачи для поля в однородном цилиндре. Поэтому здесь также целесообразно искать решение задачи для i -го слоя в виде суперпозиции двух компонент: $\phi_i(\omega, r, z) = \phi_i^{(I)}(\omega, r, z) + \phi_i^{(II)}(\omega, r, z)$. При этом компонента $\phi_i^{(I)}(\omega, r, z)$ должна обеспечивать выполнение неоднородных граничных условий (35) на внутренней боковой стенке i -го слоя, а компонента $\phi_i^{(II)}(\omega, r, z)$ необходима для выполнения условий сопряжения полей (33) на границах слоев. С учетом этих предположений перейдем к определению структуры $\phi_i^{(I)}(\omega, r, z)$ и $\phi_i^{(II)}(\omega, r, z)$. По аналогии с задачей для однородного цилиндра, представим поле $\phi_i^{(I)}(\omega, r, z)$ в виде разложения в ряд:

$$\begin{aligned} \phi_i^{(I)}(\omega, r, z) &= \sum_n (a_{ni}^{(I)} \psi_{ni}^{(I)}(r) + b_{ni}^{(I)} \eta_{ni}^{(I)}(r)) \times \\ &\times (A_{ni}^{(I)} \xi_{ni}^{(I)}(z) + B_{ni}^{(I)} \gamma_{ni}^{(I)}(z)), \end{aligned} \quad (36)$$

где $\xi_{ni}^{(I)}(z) \equiv \xi(\alpha_{ni}^{(I)} z)$ и $\gamma_{ni}^{(I)}(z) \equiv \gamma(\alpha_{ni}^{(I)} z)$ – собственные функции дифференциального оператора (9), соответствующие собственным числам $-\alpha_{ni}^{(I)2}$. Дисперсионное уравнение для определения собственных чисел имеет вид, аналогичный (10), но с подстановкой координат границ соответствующего слоя: z_{i-1} и z_i .

Надо учесть, что в данном случае условия сопряжения полей на границах слоев определены в терминах непрерывности полей по давлению и колебательной скорости в отдельности. Поэтому на границе каждого слоя однородные граничные условия для компоненты $\phi_i^{(I)}(\omega, r, z)$ могут быть заданы в одной из двух форм, соответствующих гипотезам абсолютно “мягкой” или “жесткой” границы. Эти частные случаи следуют из выражений (16) при выборе соответствующих значений коэффициентов λ_i и β_i . В частности, если принять условие абсолютно “мягкой” границы

$$\phi_i^{(I)}(\omega, r, z) \Big|_{z=z_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (37)$$

то в дисперсионном уравнении надо использовать коэффициенты $\lambda_i=1$ и $\beta_i=0$, а для условия абсолютно “жесткой” границы

$$\frac{\partial \phi_i^{(I)}(\omega, r, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (38)$$

следует задать $\lambda_i=0$ и $\beta_i=1$. Указанные замечания относятся также к соотношениям (17), определяющим неизвестные коэффициенты $A_{ni}^{(I)}$ и $B_{ni}^{(I)}$. Наконец, коэффициенты $a_{ni}^{(I)}$ и $b_{ni}^{(I)}$ получаем из системы уравнений, подобной (18), в которой коэффициенты возбуждения $Q_{ni}^{(I)} = (q_i, H_{ni}^{(I)})_z$ однозначно определяются разложением пульсаций давления q_i на боковых стенках соответствующего слоя по полной системе ортогональных функций:

$$H_{ni}^{(I)}(z, z_{i-1}) = \Gamma_{z, i-1}(\gamma_{ni}^{(I)}) \xi_{ni}^{(I)}(z) - \Gamma_{z, i-1}(\xi_{ni}^{(I)}) \gamma_{ni}^{(I)}(z).$$

По аналогии с решением (19) для однородного цилиндра, легко показать, что для слоистого цилиндра структура полевой компоненты $\phi_i^{(I)}(\omega, r, z)$ определяется соотношением

$$\begin{aligned} \phi_i^{(I)}(\omega, r, z) &= \frac{j}{\omega \rho_0} \times \\ &\times \sum_n \frac{Q_{ni}^{(I)} Z_{ni}^{(I)}(r, r_1) H_{ni}^{(I)}(z, z_{i-1})}{\|H_{ni}^{(I)}\| \|Z_{ni}^{(I)}(r_0, r_1)\|}, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$Z_{ni}^{(I)}(r, r_1) = \psi_{ni}^{(I)}(r) \eta_{ni}^{(I)}(r_1) - \psi_{ni}^{(I)}(r_1) \eta_{ni}^{(I)}(r); \quad (40)$$

$\|H_{ni}^{(I)}\| = (H_{ni}^{(I)}, H_{ni}^{(I)})_z$; $\psi_{ni}^{(I)}(r) \equiv \psi(k_{ni}^{(I)}r)$ и $\eta_{ni}^{(I)}(r) \equiv \eta(k_{ni}^{(I)}r)$ – собственные функции дифференциального оператора (13), соответствующие собственным числам $-(k_{ni}^{(I)})^2$, которые определяются соотношением $(k_{ni}^{(I)})^2 = k^2 - (\alpha_{ni}^{(I)})^2$.

Перейдем к рассмотрению компоненты $\phi_i^{(II)}(\omega, r, z)$. Определим ее в виде аналогичного по структуре ряда:

$$\phi_i^{(II)}(\omega, r, z) = \sum_n (a_{ni}^{(II)} \psi_{ni}^{(II)}(r) + b_{ni}^{(II)} \eta_{ni}^{(II)}(r)) \times (A_{ni}^{(II)} \xi_{ni}^{(II)}(z) + B_{ni}^{(II)} \gamma_{ni}^{(II)}(z)), \quad (41)$$

в котором $\psi_{ni}^{(II)}(r) \equiv \psi(k_{ni}^{(II)}r)$ и $\eta_{ni}^{(II)}(r) \equiv \eta(k_{ni}^{(II)}r)$ – линейно-независимые собственные функции дифференциального оператора (13), соответствующие собственным значениям $-(k_{ni}^{(II)})^2$, удовлетворяющим для всех $i = 1, \dots, N$ дисперсионному уравнению, подобному уравнению (23):

$$\psi_{ni}^{(II)}(r_1) \eta_{ni}^{(II)}(r_0) - \psi_{ni}^{(II)}(r_0) \eta_{ni}^{(II)}(r_1) = 0. \quad (42)$$

Так как фигурирующие в этой системе уравнений радиальные собственные функции для всех слоев однотипны ($\psi_{ni}^{(II)}(r) \equiv \psi_n^{(II)}(r)$, $\eta_{ni}^{(II)}(r) \equiv \eta_n^{(II)}(r)$, см. формулу (24)), то и соответствующие им спектры собственных чисел $k_{ni}^{(II)} \equiv k_n^{(II)}$ не будут зависеть от номера слоя i . По этой же причине весовые коэффициенты $a_{ni}^{(II)}$ и $b_{ni}^{(II)}$, определяемые аналогично выражению (29) в виде $a_{ni}^{(II)} = \eta_{ni}^{(II)}(r_0) = \eta_n^{(II)}(r_0)$ и $b_{ni}^{(II)} = -\psi_{ni}^{(II)}(r_0) = -\psi_n^{(II)}(r_0)$, также не зависят от номера слоя. Следовательно, радиальные базисные функции

$$Z_{ni}^{(II)}(r, r_0) = \psi_{ni}^{(II)}(r) \eta_{ni}^{(II)}(r_0) - \psi_{ni}^{(II)}(r_0) \eta_{ni}^{(II)}(r) \equiv Z_n^{(II)}(r), \quad (43)$$

по которым разлагается в ряд компонента поля $\phi_i^{(II)}(\omega, r, z)$, будут для всех слоев одинаковыми. Это является следствием выполнения условия сопряжения компонент поля $\phi_i^{(II)}(\omega, r, z)$ на границах между слоями.

Для вычисления неизвестных весовых коэффициентов $A_{ni}^{(II)}$ и $B_{ni}^{(II)}$ подставляем ряд (41) в граничные условия (33)–(35) и используем свойства ортогональности радиальных собственных функций (43) с разными номерами. В результате получаем систему из $2N$ уравнений с $2N$ неизвестными коэффициентами $A_{ni}^{(II)}$, $B_{ni}^{(II)}$, $i = 1, \dots, N$. Ее

вид зависит от типа однородных граничных условий, принятых на границах между слоями для компоненты поля $\phi_i^{(I)}(\omega, r, z)$. В частности, при использовании условия абсолютно “мягкой” границы (37) имеем

$$A_{n1}^{(II)} \xi_{n1}^{(II)}(0) + B_{n1}^{(II)} \gamma_{n1}^{(II)}(0) = 0,$$

$$\rho_i (A_{ni}^{(II)} \xi_{ni}^{(II)}(z_i) + B_{ni}^{(II)} \gamma_{ni}^{(II)}(z_i)) - \rho_{i+1} (A_{ni+1}^{(II)} \xi_{ni+1}^{(II)}(z_i) + B_{ni+1}^{(II)} \gamma_{ni+1}^{(II)}(z_i)) = 0,$$

$$\left(A_{ni}^{(II)} \frac{\partial \xi_{ni}^{(II)}(z)}{\partial z} + B_{ni}^{(II)} \frac{\partial \gamma_{ni}^{(II)}(z)}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_i} - \left(A_{ni+1}^{(II)} \frac{\partial \xi_{ni+1}^{(II)}(z)}{\partial z} + B_{ni+1}^{(II)} \frac{\partial \gamma_{ni+1}^{(II)}(z)}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_i} = \quad (44)$$

$$= \frac{1}{\|Z_n^{(II)}\|} \left(\frac{\partial \phi_{i+1}^{(I)}(z)}{\partial z} \Big|_{z=z_i}, Z_n^{(II)} \right)_r - \left(\frac{\partial \phi_i^{(I)}(z)}{\partial z} \Big|_{z=z_i}, Z_n^{(II)} \right)_r,$$

$$\left(A_{nN}^{(II)} \frac{\partial \xi_{nN}^{(II)}(z)}{\partial z} + B_{nN}^{(II)} \frac{\partial \gamma_{nN}^{(II)}(z)}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_N} = 0.$$

Здесь $i = 1, \dots, N-1$. Из системы видно, что компоненты поля $\phi_i^{(II)}(\omega, r, z)$ определяются виртуальными источниками, амплитуды возбуждения которых пропорциональны проекциям градиентов колебательных скоростей

$$\Delta V_{ni}^{(II)}(r) = \frac{1}{\|Z_n^{(II)}\|} \times \left(\left(\frac{\partial \phi_{i+1}^{(I)}(z)}{\partial z} - \frac{\partial \phi_i^{(I)}(z)}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_i}, Z_n^{(II)} \right)_r \quad (45)$$

на границах с номерами $i = 1, \dots, N-1$ на полную систему радиальных базисных функций (43). Следовательно, в данном представлении решения задачи уже нельзя считать, что компоненты поля $\phi_i^{(II)}(\omega, r, z)$ независимы от компонент $\phi_i^{(I)}(\omega, r, z)$ и, соответственно, от источников q_i . Характер этой зависимости определяется геометрией слоистости, распределением источников и структурой $\phi_i^{(I)}(\omega, r, z)$, которая связана с конкретным выбором однородных граничных условий в формах (37) или (38).

Проиллюстрируем влияние геометрии, положив, параметры всех слоев одинаковыми (однородный

цилиндр). Фактически, в этом случае получаем два представления для решения одной и той же задачи. При этом во втором варианте геометрия задачи отличается условным разбиением однородного цилиндра на фиктивные слои. Сравнительный анализ этих вариантов решений показывает, что по мере сокращения числа слоев зависимость компоненты $\phi_i^{(II)}(\omega, r, z)$ от компоненты $\phi_i^{(I)}(\omega, r, z)$ ослабевает. В предельном случае перехода к однослойной модели цилиндра с однородными граничными условиями на торцах компонента $\phi_i^{(II)}(\omega, r, z)$ исчезает.

Влияние структуры источников хорошо видно из сравнения решений для двух вариантов их распределения. В первом случае предполагается, что источники равномерно распределены по всей высоте цилиндра, а во втором – сосредоточены в i -ом слое. Для равномерно распределенного источника полное поле определяется обеими компонентами решения во всех слоях. При этом компонента $\phi_i^{(II)}(\omega, r, z)$ зависит от градиентов колебательных скоростей первой компоненты на границах всех слоев. Если же источник сосредоточен в i -ом слое, то полное поле будет двухкомпонентным только в этом слое. В остальных слоях полное поле определяется второй компонентой $\phi_i^{(II)}(\omega, r, z)$, которая зависит от градиента колебательной скорости первой компоненты на границах i -го слоя.

Рассмотрим теперь как влияет на структуру решений $\phi_i^{(II)}(\omega, r, z)$ замена однородных граничных условий (37) на (38). В этой ситуации неизвестные коэффициенты $A_{ni}^{(II)}, B_{ni}^{(II)}, i = 1, \dots, N$ должны удовлетворять системе уравнений, отличающейся от (44) видом правых частей. В частности, уравнения сопряжения полей по колебательной скорости теперь станут однородными, а правые части уравнения сопряжения по давлению будут определяться соотношениями

$$\Delta P_n^{(II)}(r) = \frac{1}{\|Z_n^{(II)}\|} \times ((\rho_{i+1}\phi_{i+1}^{(I)} - \rho_i\phi_i^{(I)})|_{z=z_i}, Z_n^{(II)})_r, \quad (46)$$

$$i = 1, \dots, N - 1.$$

Как видно, из структуры соотношений (46), в данном случае амплитуда возбуждения поля $\phi_i^{(II)}(\omega, r, z)$ пропорциональна проекциям градиентов пульсаций давления поля $\phi_i^{(I)}(\omega, r, z)$, заданных на границах слоев соответствующего номера $i = 1, \dots, N - 1$ на полную ортогональную систему радиальных базисных функций (43). Указанные

закономерности сохраняют свою силу и при комбинировании однородных граничных условий (37) и (38). Такой произвол в выборе комбинации однородных граничных условий для компонент поля $\phi_i^{(I)}(\omega, r, z)$ порождает многообразие форм представления решений рассматриваемой задачи [9, 10].

Выбор того или иного варианта представления решения влияет на точность вычислений. Численные эксперименты на трехслойном цилиндре показали, что наиболее рациональной с точки зрения точности вычислений является форма решения, которая получается при использовании на границах каждого из слоев той же комбинации однородных граничных условий для компонент поля $\phi_i^{(I)}(\omega, r, z)$, что и на наружных торцах цилиндра. Количественный анализ проводился на трехслойной модели, которая позволяет в полной мере выявить характерные особенности представления акустических полей в слоистых цилиндрах без чрезмерного усложнения алгоритма.

4. СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ И ЕЕ АНАЛИЗ

Воспользуемся полученными ранее результатами для N -слойной модели. Будем полагать, что для компонент поля $\phi_i^{(I)}(\omega, r, z)$ на границе между первым и вторым слоями выполняется условие (38), а на границе между вторым и третьим – условие (37). Тогда выражения для первой и второй компонент радиальной колебательной скорости поля, регистрируемого на наружной боковой стенке трехслойного цилиндра, можно представить в виде

$$v_i^{(I)}(\omega, z) = \frac{4j}{\omega \pi r_1 \rho_i l_i} \sum_n \frac{Q_{ni}^{(I)} H_n^{(I)}(z, z_{i-1})}{Z_{(ni)}^{(I)}(r_1, r_0)}, \quad (47)$$

$$v_i^{(II)}(\omega, z) = \frac{2}{\pi r_1} \sum_m \Phi_{mi}^{(II)}(\omega) H_{mi}^{(II)}(z, z_{i-1}), \quad (48)$$

где $i = 1, 2, 3$;

$$H_{mi}^{(II)}(z, z_{i-1}) = \begin{cases} \sin(\alpha_{m1}^{(II)} z) & \text{при } i = 1, \\ \frac{d_{m1} F_{m1}(z) + d_{m4} F_{m2}(z)}{F_m} & \text{при } i = 2, \\ \cos(\alpha_{m3}^{(II)}(l - z)) & \text{при } i = 3; \end{cases} \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
 F_{m1}(z) &= \alpha_{m2}^{(II)} \cos(\alpha_{m2}^{(II)}(l_1 + l_2 - z)) - \\
 &\quad - \frac{\rho_2}{\rho_3} \alpha_{m3}^{(II)} \operatorname{tg}(\alpha_{m3}^{(II)} l_3) \sin(\alpha_{m2}^{(II)}(l_1 + l_2 - z)); \\
 F_{m2}(z) &= \rho_1 \frac{\alpha_{m2}^{(II)}}{\alpha_{m1}^{(II)}} \operatorname{tg}(\alpha_{m1}^{(II)} l_1) \times \\
 &\quad \times \cos(\alpha_{m2}^{(II)}(z - l_1)) + \rho_2 \sin(\alpha_{m2}^{(II)}(z - l_1)); \\
 F_m &= \left[\rho_1 \frac{(\alpha_{m2}^{(II)})^2}{\alpha_{m1}^{(II)}} \operatorname{tg}(\alpha_{m1}^{(II)} l_1) + \right. \\
 &\quad \left. + \alpha_{m3}^{(II)} \frac{(\rho_2)^2}{\rho_3} \operatorname{tg}(\alpha_{m3}^{(II)} l_3) \right] \sin(\alpha_{m2}^{(II)} l_2) + \\
 &\quad + \alpha_{m2}^{(II)} \rho_2 \left[\frac{\rho_1 \alpha_{m3}^{(II)}}{\rho_3 \alpha_{m1}^{(II)}} \operatorname{tg}(\alpha_{m1}^{(II)} l_1) \operatorname{tg}(\alpha_{m3}^{(II)} l_3) - \right. \\
 &\quad \left. - 1 \right] \cos(\alpha_{m2}^{(II)} l_2);
 \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
 d_{m1} &= \rho_2 \sum_n \Phi_{n2}^{(I)} \tilde{\Psi}_{nm2}^{(I,II)} - \\
 &\quad - \rho_1 \sum_n \Phi_{n1}^{(I)} \tilde{\Psi}_{nm1}^{(I,II)} \sin(\alpha_{n1}^{(I)} l_1); \\
 d_{m4} &= - \sum_n \alpha_{n2}^{(I)} \Phi_{n2}^{(I)} \tilde{\Psi}_{nm2}^{(I,II)} \sin(\alpha_{n2}^{(I)} l_2) - \\
 &\quad - \sum_n \alpha_{n3}^{(I)} \Phi_{n3}^{(I)} \tilde{\Psi}_{nm3}^{(I,II)} \sin(\alpha_{n3}^{(I)} l_3); \\
 \Phi_{ni}^{(I)}(\omega) &= \frac{2jQ_{ni}^{(I)}(\omega)}{\omega \rho_i l_i Z_{ni}^{(I)}(r_1, r_0)};
 \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{m1}^{(II)} &= \frac{\alpha_{m2}^{(II)} [d_{m1} F_{m1}(l_1) + d_{m4} F_{m2}(l_1)]}{\alpha_{m1}^{(II)} \sin(\alpha_{m1}^{(II)} l_1) F_m}; \\
 \Phi_{m3}^{(II)} &= \frac{\rho_2 [d_{m1} F_{m1}(l_1 + l_2) + d_{m4} F_{m2}(l_1 + l_2)]}{\rho_3 \cos(\alpha_{m3}^{(II)} l_1) F_m};
 \end{aligned} \tag{52}$$

$$\Phi_{m2}^{(II)} = 1.$$

Здесь введено обозначение нормированного интеграла

$$\tilde{\Psi}_{nmi}^{(I,II)} = \frac{1}{\|Z_n^{(II)}\|} \int_{r_0}^{r_1} Z_{ni}^{(I)}(r_1, r) Z_m^{(II)}(r_1, r) r dr, \tag{53}$$

характеризующего корреляцию радиальных базисных функций первой и второй компонент поля.

Как видно из выражений (49) и (52), амплитуды возбуждения компоненты (48) определяются составляющими d_{m1} и d_{m4} , которые, как отмечалось выше, зависят от градиентов колебательных скоростей (45). Существенное влияние на величину амплитуд возбуждения оказывает функция (53), определяющая связь радиальных базисных функций (40) и (43). Действительно, вычисляя интеграл (53), получаем

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Psi}_{nmi}^{(I,II)} &= \frac{2k_m^{(II)}}{(k_m^{(II)})^2 - (k_{ni}^{(I)})^2} \times \\
 &\quad \times \frac{1}{r_1 D_m^{(II)}(r_0, r_1) - r_0 D_m^{(II)}(r_1, r_0)},
 \end{aligned} \tag{54}$$

где

$$\begin{aligned}
 D_m^{(II)}(r_p, r_n) &= N_1(k_m^{(II)} r_n) J_0(k_m^{(II)} r_p) - \\
 &\quad - J_1(k_m^{(II)} r_n) N_0(k_m^{(II)} r_p), \\
 n, p &= 0, 1, \quad n \neq p;
 \end{aligned} \tag{55}$$

J_1 и N_1 – функции Бесселя и Неймана первого рода, первого порядка соответственно. Видно, что данная характеристика выделяет те из радиальных базисных функций поля (48), собственные числа $k_m^{(II)}$ которых близки к собственным числам $k_{ni}^{(I)}$ радиальных базисных функций поля (47). В силу того, что собственные числа $k_{ni}^{(I)}$, в отличие от $k_m^{(II)}$, частотно зависимы, при изменении частоты будут меняться номера выделяемых базисных функций поля (48). Таким образом, энергия каждой моды поля (47) в пределах заданного диапазона частот перераспределяется между модами поля (48), передающими ее в соседние слои.

Указанные особенности представления компонент поля могут быть использованы для оценки количества членов, которые достаточно удержать в функциональных рядах, описывающих частные решения, чтобы обеспечить требуемую точность вычислений в заданном диапазоне частот.

5. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ЦИЛИНДРЕ

С учетом статистического характера источников сигналов, последующий анализ будет основан на вычислении спектральной плотности мощности (СПМ) регистрируемых на поверхности цилиндров акустических полей радиальной колебательной скорости. Влияние неоднородностей акустических параметров на структуру поля будем

оценивать на основе сравнения этих СПМ для однородного и кусочно-однородного цилиндров. Для них СПМ полей радиальной колебательной скорости в точке поверхности z_{r0} определяется соотношениями

$$P_{vi}(\omega, z_{r0}) = \langle v_i(\omega, z_{r0})[v_i(\omega, z_{r0})]^* \rangle_q, \quad (56)$$

$$P_{vo}(\omega, z_{r0}) = \langle v(\omega, z_{r0})[v(\omega, z_{r0})]^* \rangle_q. \quad (57)$$

Здесь $\langle \cdot \rangle_q$ – символ статистического усреднения, по случайным величинам пульсаций давления источников $q(\omega, z)$; “*” – символ комплексного сопряжения. В частности, для поля в однородном цилиндре СПМ задается выражением

$$P_{vo} = \sum_p \sum_m R_{pm}(\omega) C_{po}(\omega, z_{r0}) C_{mo}^*(\omega, z_{r0}), \quad (58)$$

где

$$R_{pm}(\omega) = \langle Q_p(\omega)[Q_m(\omega)]^* \rangle = \int_{z_{q1}}^{z_{q2}} \int_{z_{q1}}^{z_{q2}} K_q(\omega, z', z'') \times \\ \times H_p(z', z_0) H_m(z'', z_0) dz' dz'', \quad (59)$$

$$C_{po}(\omega, z_{r0}) = \frac{4j}{\omega \pi r_1 \rho_0 l} \frac{H_p(z_{r0}, z_0)}{Z_p(r_1, r_0)}; \quad (60)$$

$$H_n(z, z_0) = \sin(\alpha_n z); \quad (61)$$

$K_q(\omega, z', z'')$ определяет пространственную корреляционную функцию поля источников $q(\omega, z)$, расположенных на интервале $[z_{q1}, z_{q2}]$.

Аналогично можно показать, что для поля в слоистом цилиндре СПМ определяется корреляционной функцией источников в форме

$$\langle Q_{ni}^{(I)}(\omega)[Q_{pi}^{(I)}(\omega)]^* \rangle = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \int_{z_{i-1}}^{z_i} K_q(\omega, z', z'') \times \\ \times H_{ni}^{(I)}(z', z_{i-1}) H_{pi}^{(I)}(z'', z_{i-1}) dz' dz'', \quad (62)$$

где

$$H_{ni}^{(I)}(z, z_{i-1}) = \begin{cases} \sin(\alpha_{n1}^{(I)} z) & \text{при } i = 1, \\ \sin(\alpha_{n2}^{(I)}(z - l_1)) & \text{при } i = 2, \\ \cos(\alpha_{n3}^{(I)}(l - z)) & \text{при } i = 3. \end{cases}$$

Предположим, что источники сигналов некоррелированы, т.е. $K_q(\omega, z, z') = P_q(\omega, z)\delta(z - z')$, где $P_q(\omega, z)$ – СПМ излучения источников. В рамках этого представления можно описать используемые в расчетах варианты СПМ источников сигналов с помощью следующих соотношений: модели

равномерно распределенного источника соответствует СПМ $P_q(\omega, z) = P_q(\omega)$ при $z \in [z_{q1}, z_{q2}]$, а модели сосредоточенного источника – $P_q(\omega, z) = P_q(\omega)\delta(z - z_q)$. Отметим, что для принятой модели распределенного источника корреляционная матрица (62) принимает диагональный вид:

$$\langle Q_{ni}^{(I)}(\omega)[Q_{pi}^{(I)}(\omega)]^* \rangle = \frac{l_i}{2} \delta_{np}. \quad (63)$$

Рассмотрим влияние слоистости по плотности на структуру акустического поля. Анализ полученных соотношений показывает, что изменение плотности слоев влияет на распределение уровня амплитуды поля в них, практически не меняя пространственное распределение фазы. Это позволяет в качестве информативной характеристики использовать пространственное распределение уровней СПМ.

Заметим, что для рассматриваемой модели трехслойного цилиндра при одинаковой высоте слоев ($l_i = l/3$, $i = 1, 2, 3$) можно определить условия, при которых поле, регистрируемое в точках поверхности над третьим слоем с плотностью $\rho_3 = \rho_0$, совпадает с полем однородного цилиндра той же плотности ρ_0 . Такая ситуация будет иметь место, если значения плотностей в двух других слоях (ρ_1 и ρ_2) удовлетворяют уравнению $\rho_2^2 + \rho_2(\rho_1 - 3\rho_0) + \rho_1\rho_0 = 0$. Это позволяет сделать вывод о том, что только при пространственно-разнесенной регистрации данных о поле могут быть надежно обнаружены неоднородности по плотности.

Исследуем, как изменяется структура СПМ на поверхности слоистого по плотности цилиндра. Предположим, что цилиндр разделен на три одинаковых по высоте слоя, один из которых создает неоднородность по плотности. Пусть источник расположен в первом слое. Анализ проведем для трех случаев, отличающихся положением слоя неоднородности с более высокой плотностью. Такая модельная ситуация может описывать, например, патологию той или иной из долей легких, связанную с уплотнением тканей при воспалительных процессах. Рассмотрим пространственные изменения уровней СПМ акустического поля в зависимости от частоты. В качестве информативной характеристики будем использовать отношение СПМ поля для кусочно-однородного и однородного цилиндров в соответствующих точках их поверхности:

$$\Delta P_v(\omega, z_0) = \frac{P_{vi}(\omega, z_0)}{P_{vo}(\omega, z_0)}. \quad (64)$$

Результаты расчета данной характеристики для

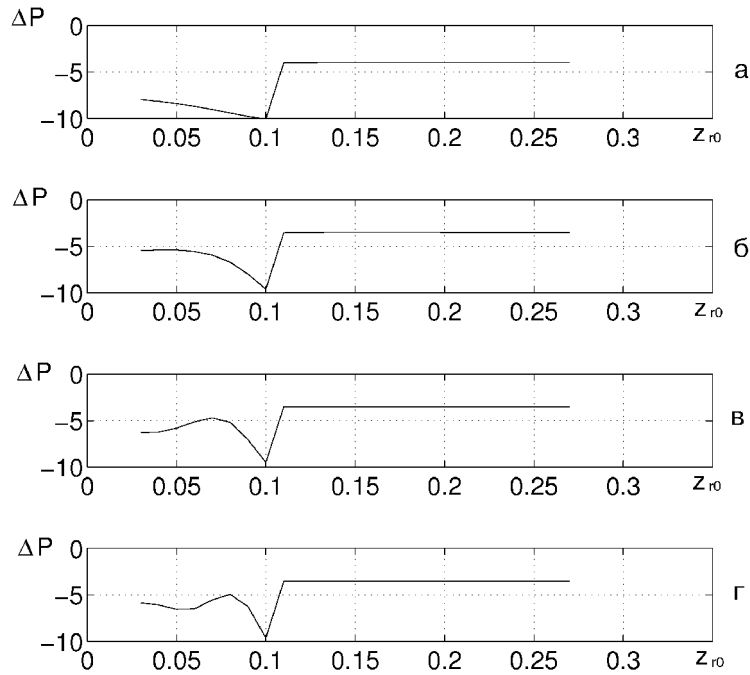


Рис. 3. Относительный уровень пространственных изменений СПМ сосредоточенного источника ($z_q = 0.05$ м) при повышенной в два раза плотности первого слоя ($\rho_1 = 500 \text{ кг/м}^3$):
 а - $f = 100$ Гц, б - $f = 300$ Гц, в - $f = 550$ Гц, г - $f = 800$ Гц

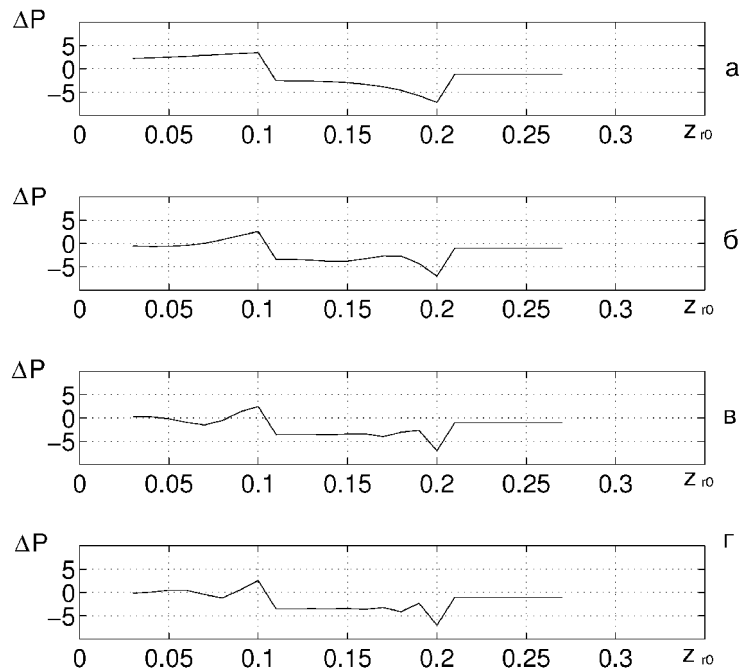


Рис. 4. Относительный уровень пространственных изменений СПМ сосредоточенного источника ($z_q = 0.05$ м) при повышенной в два раза плотности второго слоя ($\rho_1 = 500 \text{ кг/м}^3$):
 а - $f = 100$ Гц, б - $f = 300$ Гц, в - $f = 550$ Гц, г - $f = 800$ Гц

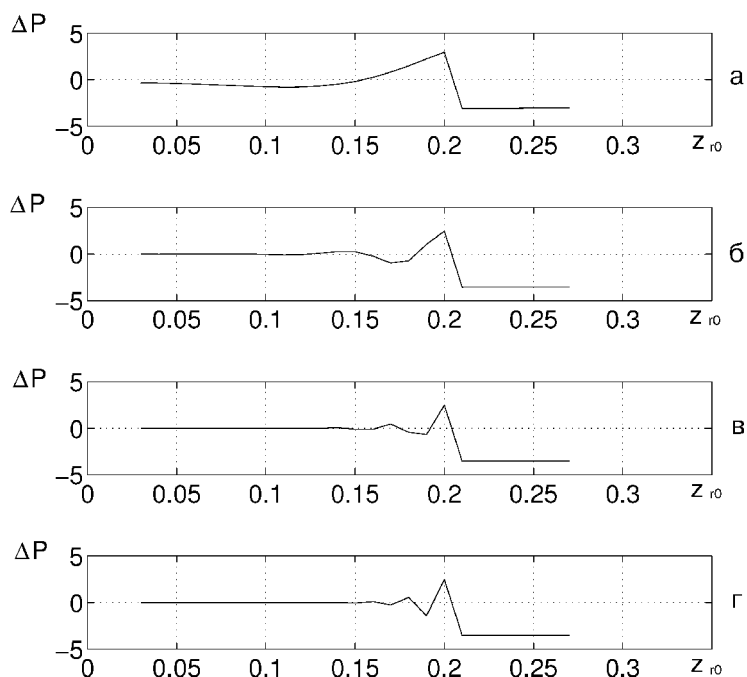


Рис. 5. Относительный уровень пространственных изменений СПМ сосредоточенного источника ($z_q = 0.05$ м) при повышенной в два раза плотности второго слоя ($\rho_1 = 500 \text{ кг/м}^3$):
 а - $f = 100$ Гц, б - $f = 300$ Гц, в - $f = 550$ Гц, г - $f = 800$ Гц

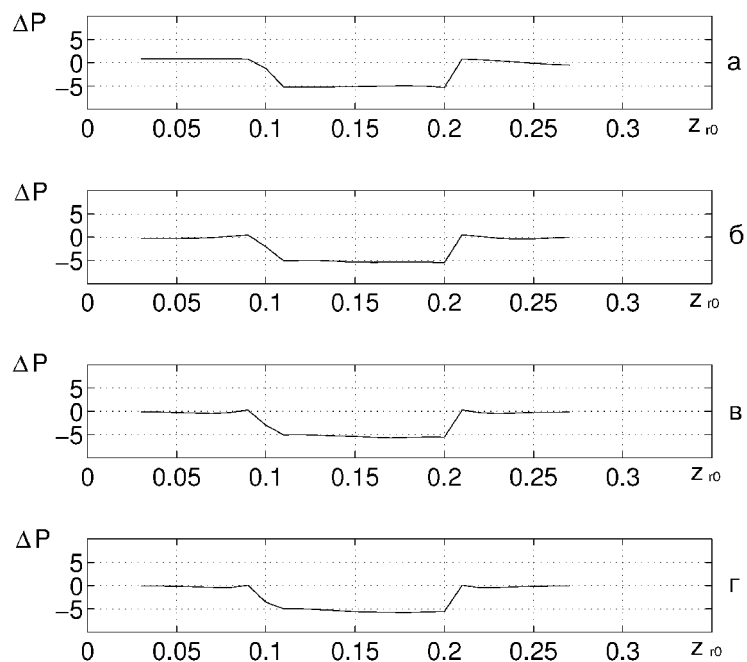


Рис. 6. Относительный уровень пространственных изменений СПМ распределенного источника ($z_{q1} = 0$ м, $z_{q2} = 0.3$ м) при повышенной в два раза плотности второго слоя ($\rho_2 = 500 \text{ кг/м}^3$):
 а - $f = 100$ Гц, б - $f = 300$ Гц, в - $f = 550$ Гц, г - $f = 800$ Гц

трех указанных вариантов слоистой модели представлены на рис. 3–5.

Для однородного цилиндра вычисления выполнены при следующих исходных данных: $l=0.3$ м, $r_0=0.0085$ м, $r_1=0.15$ м, $z_q=0.05$ м, $z_{r0}=0.03 \div 0.25$ м, $l_i=0.1$ м ($i=1, 2, 3$), $\rho_i=\rho_o=250$ кг/м³, $c_i=c_o=23$ м/с, $\Delta c_i=0.2c_i$. Отличие исходных данных заключается в том, что вводится дополнительный параметр $\rho_p=500$ кг/м³, где индекс p может принимать значения от единицы до трех, в зависимости от того, какой слой имеет повышенную плотность. Рис. 3 характеризует случай, когда повышена плотность среды первого слоя ($p=1$), рис. 4 – второго ($p=2$) и, наконец, рис. 5 – третьего. По оси абсцисс на графиках отложена координата приемника на поверхности цилиндра z_0 , а по оси ординат – величина отношения СПМ (64) в дБ, вычисленная для четырех значений частоты.

Видно, что над слоем с повышенной плотностью наблюдается снижение полной мощности акустических колебаний. Аналогичные выводы можно сделать для случая, когда источник распределен вдоль всей оси цилиндра. Например, для случая повышения плотности в среднем слое $\rho_2=500$ кг/м³ результаты приведены на рис. 6. Из сравнения с рис. 4 видно, что для распределенного источника аномалия по плотности обнаруживается более эффективно, а скачок по уровню соответствует реальному соотношению плотностей в модели слоистого цилиндра. Эти результаты, в целом, согласуются с принятой в медицинской практике методикой выслушивания больных в разных точках грудной клетки с целью выявления участков, где ухудшается слышимость шумов дыхания из-за патологического уплотнения тканей легких.

Отметим, что в окрестности границ слоев на графиках наблюдаются скачки уровней, связанные с проявлением эффекта Гиббса для рядов Фурье, описывающих функции с разрывами первого рода. Кроме того, из рисунков видно, что на низких частотах четкость выделения области аномально по плотности слоя снижается. Таким образом, для повышения эффективности обнаружения неоднородностей по плотности необходимо повышать частоту анализа. Заметим однако, что возможность обнаружения слоистых неоднородностей на заданной частоте анализа зависит от так называемого отношения “сигнал/помеха”, определяемого величиной приращения СПМ акустических колебаний, вызванного изменениями плотности аномального слоя и мощностью помехи. В реальных ситуациях с ростом частоты отношение сигнал/помеха уменьшается, что снижает эффективность обнару-

жения неоднородностей. Следовательно, алгоритм обнаружения неоднородностей конкретных размеров должен быть оптимизирован по частоте. Более детальное обсуждение этой задачи выходит за рамки данной работы. В целом, представленные результаты показывают, что путем регистрации СПМ шумов дыхания в пространственно-разнесенных точках и сравнения их с некоторым эталоном (например, аналогичными данными, полученными для обследуемого пациента ранее) можно выявлять новообразованные участки уплотненных тканей.

Перейдем к рассмотрению влияния на структуру акустических полей слоистости по скорости распространения акустических колебаний. Анализ показывает, что наличие неоднородности по скорости звука приводит к изменениям пространственной структуры поля как по амплитуде, так и по фазе. Это свойство может быть использовано в качестве признака разделения неоднородностей по плотности и по скорости. Рассмотрим, как меняется фазовая структура поля в пространственно-разнесенной системе точек при слоистости по скорости звука. Информация о пространственном распределении фазы может быть получена из анализа взаимной СПМ (ВСПМ), между точками приема с координатами z_{r0} и z_{r1} , которая для полей колебательной скорости однородного и кусочно-однородного цилиндров определяется соответственно соотношениями

$$\begin{aligned} P_{vi}(\omega, z_{r0}, z_{r1}) &= \langle v_i(\omega, z_{r0}) [v_i(\omega, z_{r1})]^* \rangle_q, \\ P_{vo}(\omega, z_{r0}, z_{r1}) &= \langle v(\omega, z_{r0}) [v(\omega, z_{r1})]^* \rangle_q. \end{aligned} \quad (65)$$

Сравним пространственное распределение фаз ВСПМ однородного и кусочно-однородного цилиндров $\phi_{vo}(\omega, z_{r0}, z_{r1})$ и $\phi_{vi}(\omega, z_{r0}, z_{r1})$. При сравнении будем использовать ту же модель однородного цилиндра, что и выше. Слоистая же модель цилиндра в данном случае отличается повышенным значением скорости распространения звука во втором слое: $c_2=45$ м/с. Пусть источник звука сосредоточен в первом слое и имеет координату $z_q=0.05$ м. Вычислим ВСПМ поля между расположенными на поверхности первой точкой приема с фиксированной координатой $z_{r0}=0.03$ м и второй точкой приема, координата которой z_{r1} принимает дискретный ряд значений в интервале $0.03 \div 0.27$ м с шагом $dz=0.01$ м.

Результаты расчетов для этого случая приведены на рис. 7. По оси абсцисс отложены координаты точки z_{r1} , а по оси ординат – значения фазовых углов $\phi_{vo}(\omega, z_{r0}, z_{r1})$ и $\phi_{vi}(\omega, z_{r0}, z_{r1})$ в градусах. На рис. 7 изображены значения фазовых углов для

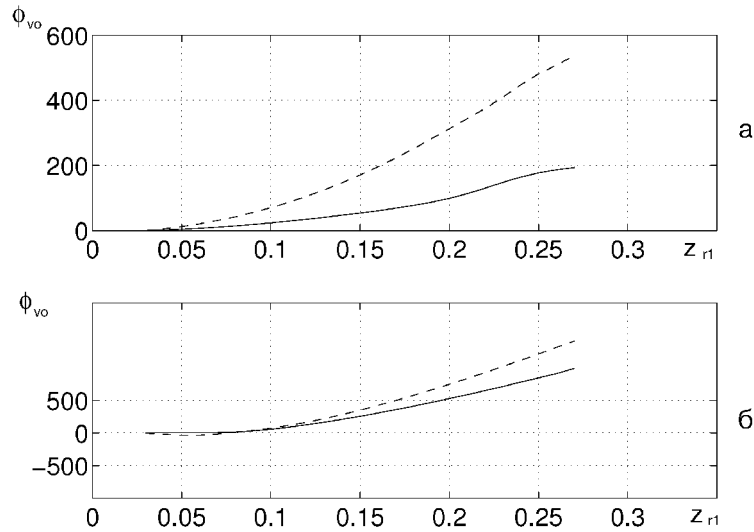


Рис. 7. Пространственные изменения фазы ВСПМ сосредоточенного источника ($z_q = 0.05$ м) в однородном цилиндре ($c_i = 23$ м/с, $i = 1, 2, 3$)
 а - $f = 100$ Гц (сплошная) и $f = 300$ Гц (штриховая), б - $f = 550$ Гц (сплошная) и $f = 800$ Гц (штриховая)

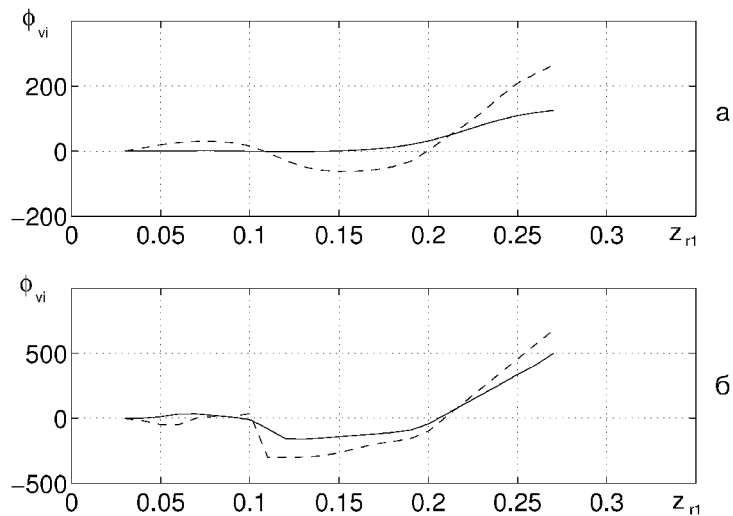


Рис. 8. Пространственные изменения фазы ВСПМ сосредоточенного источника ($z_q = 0.05$ м) при повышенной скорости распространения акустических колебаний во втором слое ($c_2 = 45$ м/с):
 а - $f = 100$ Гц (сплошная) и $f = 300$ Гц (штриховая), б - $f = 550$ Гц (сплошная) и $f = 800$ Гц (штриховая)

модели однородного цилиндра в зависимости от величины смещения координаты z_{r1} относительно координаты z_{r0} при нескольких значениях частоты: $f = 100, 300$ Гц (рис. 7, а) и $f = 550, 800$ Гц (рис. 7, б). Аналогичные зависимости приведены на рис. 8 для модели кусочно-однородного цилиндра.

Как видно, характер поведения фазовой характеристики для этих ситуаций различен. В первом случае фаза монотонно возрастает по мере удале-

ния точки приема z_{r1} от точки z_{r0} . В случае появления слоя с повышенным значением скорости звука наблюдается существенное изменение градиента фазы при переходе из первого во второй слой и последующем выходе из этого слоя. Такое поведение фазовой характеристики указывает на то, что за счет повышения скорости звука во втором слое акустический сигнал достигает его поверхности раньше, чем в первом слое, в котором сосредоточен источник. Следует заме-

тять, что для источника, распределенного вдоль всей оси, монотонность изменения фазы ВСПМ по пространству нарушается даже в однородном цилиндре.

Таким образом, анализ пространственного распределения фазы ВСПМ поля позволяет обнаружить неоднородности по скорости в цилиндре при условии, что источник сигнала сосредоточен вблизи одного из его торцов. Вместе с тем, представленные результаты показывают, что в слоистых структурах использование традиционных методов измерения скорости звука по величине задержки сигнала между двумя точками приема может давать существенные ошибки. В ряде случаев более надежные результаты оценивания средней скорости звука могут быть получены с помощью спектральных методов. В частности, такой подход к оцениванию скорости звука в однородном цилиндре рассматривался в работе [11].

Более детальный анализ особенностей измерений скорости звука для слоистой модели цилиндра будет проведен в последующих работах. Укажем лишь, что эффективность обнаружения неоднородностей по скорости зависит от их волнового размера и величины приращения неоднородности по скорости звука в соответствующем слое.

ВЫВОДЫ

1. В явном виде получены выражения для вычисления акустических полей, возбуждаемых осесимметричными источниками в кусочно-однородном цилиндре. Проведен анализ структуры полученных соотношений. Решение представлено в виде наборов общих решений граничных задач для внутренней области полого конечного цилиндра. Проанализирована неоднозначность формы общих решений с точки зрения возможности строгого выполнения условий сопряжения на поверхностях контакта цилиндров с различными свойствами. Даны рекомендации для выбора формы общего решения, обеспечивающей более высокую эффективность вычислительного алгоритма.
2. Получены данные о спектральной плотности мощности звуковых полей, возбуждаемых случайными пространственно-некоррелированными источниками разной протяженности на внутренней поверхности полого кусочно-однородного цилиндра. Выполнен анализ особенностей пространственной структуры спектральной плотности мощности акустических полей радиальной

колебательной скорости, обусловленных слоистостью по плотности, а также по скорости распространения акустических колебаний. Определены условия, при которых наблюдается идентичность структур акустических полей, регистрируемых на отдельных участках поверхности однородного и кусочно-однородного по плотности цилиндров.

3. Показано, что, независимо от протяженности источников, для выявления слоевой неоднородности цилиндра по плотности целесообразно использовать пространственное распределение СПМ регистрируемых акустических колебаний. Для обнаружения слоистой неоднородности по скорости информативной характеристикой является пространственное распределение фазы ВСПМ акустического поля, возбуждаемого источником, сосредоточенным вблизи торцов цилиндра.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор глубоко признателен академику НАН Украины профессору В. Т. Гринченко за ряд полезных методических замечаний, высказанных в ходе подготовки статьи.

1. *Болезни органов дыхания: руководство для врачей (в 4-х томах) / Под ред. Н. Р. Палева: том 1. Общая пульмонология.* – М.: Медицина, 1989. – 512 с.
2. *Kraman S. S. Speed of low-frequency sound through the lungs of normal men // J. Appl. Physiol.* – 1983. – **55**. – P. 1862–1867.
3. *Rice D. A. Sound speed in pulmonary parenchyma // J. Appl. Physiol.* – 1983. – **54**, N 1. – P. 304–308.
4. *Применение ультразвука в медицине. Физические основы / Ред. К. Хилла.* – М.: Мир, 1989. – 568 с.
5. *Pasterkamp H., Carson C., Daien D., Oh Y. Digital respirosography. New images of lung sounds // Chest.* – 1989. – **96**, N 6. – P. 1405–1412.
6. *Вовк И. В., Гринченко В. Т., Дахнов С. Л., Крижановский В. В., Олійник В. Н. Шумы дыхания человека: объективизация аускультативных признаков // Акуст. вісн.* – 1999. – **2**, N 3. – С. 11–32.
7. *Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.* – М.: Наука, 1973. – 343 с.
8. *Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики.* – М.: Атомиздат, 1972. – 392 с.
9. *Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках.* – К.: Наук. думка, 1986. – 240 с.
10. *Гринченко В. Т. Развитие метода решений задач излучения и рассеяния звука в неканонических областях // Гидромеханика.* – 1996. – **70**. – С. 27–40.
11. *Крижановский В. В. Статистическая оценка акустических параметров респираторного тракта человека // Акуст. вісн.* – 1998. – **1**, N 1. – С. 40–51.