

УДК 534.232

КОЛЕБАНИЯ ЗАТОПЛЕННОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУИ-ОБОЛОЧКИ

Ю. М. ДУДЗИНСКИЙ*, А. А. НАЗАРЕНКО**

* Одесский национальный политехнический университет

** Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

Получено 31.10.2001

Рассмотрена модель осесимметричного гидродинамического излучателя в виде упругой затопленной струи-оболочки. Получено значение частоты основного тона акустического сигнала как функция свойств рабочей жидкости, геометрических и гидродинамических параметров струи. Показана принципиальная возможность управления частотой сигнала за счет изменения упругости жидкости как функции гидростатического давления.

Розглянуто модель осесимметричного гідродинамічного випромінювача у вигляді пружного затопленого струменя-оболочки. Одержано значення частоти основного тону акустичного сигналу як функції властивостей робочої рідини, геометричних та гідродинамічних параметрів струменя. Показано принципову можливість керування частотою сигналу через зміну пружності рідини як функції гідростатичного тиску.

The axially symmetric hydrodynamic acoustic source, modelled with a submerged elastic underwater jet's membrane, is considered. The basic frequency of an acoustic signal is obtained as a function of the working fluid properties, the geometric and hydrodynamic parameters of jet. The principal possibility of controlling the signal's frequency by changing the elasticity of the fluid, as a function of hydrostatic pressure, is demonstrated.

ВВЕДЕНИЕ

Основными преимуществами гидродинамических излучателей по сравнению с электроакустическими являются простота в эксплуатации (питание осуществляется с помощью насоса), дешевизна готового продукта, отсутствие высоковольтного оборудования [1]. Работа большинства гидродинамических источников основана либо на возбуждении изгибных колебаний в пластинах или стержнях при натекании на них потока жидкости в режиме затопления, либо на эффекте Бернулли [2].

В осесимметричных гидродинамических излучающих системах часть кинетической энергии затопленной струи преобразуется в энергию акустических волн благодаря натеканию струи жидкости на определенное по форме и размерам препятствие. В результате, между торцами сопла и препятствия может быть сформирована вихревая тороидальная зона развитой кавитации. Периодический выброс содержимого этой области в окружающее пространство и синфазное схлопывание каверн генерируют акустические волны высокой интенсивности. Тороидальный вихрь отсекается от окружающего пространства вытекающей из сопла кольцевой струей (прямоточная излучающая система) или струей, отраженной от преграды и замыкающейся на наружную кромку сопла (противоточная излучающая система) [2]. В

первом случае затопленная струя жидкости имеет форму цилиндрической оболочки, ограничивающей тороидальную кавитационную зону, а во втором – конической с криволинейной образующей. Заметим, что во втором случае в реальных осесимметричных излучателях высота струи-оболочки (иначе, расстояние между торцами сопла и отражателя) всегда меньше диаметра ее сечения. Поэтому в противоточных гидродинамических излучателях струю-оболочку в первом приближении также можно считать цилиндрической.

Проведенные ранее исследования [3, 4] показали, что с помощью осесимметричных гидродинамических излучателей можно получить акустические поля высокой интенсивности для озвучивания жидкостей различной вязкости для широкого диапазона избыточных статических давлений в рабочей емкости. Высокая эрозионная активность вблизи рабочей пары сопло-отражатель может успешно применяться для интенсификации технологических процессов, протекающих в жидкой фазе [3, 5].

Очевидно, что максимум уровня звука достигается в случае оптимальных значений геометрических и гидродинамических параметров осесимметричного излучателя. В связи с этим, представляется важным установить зависимость частоты основного тона излучаемого сигнала от геометрических и гидродинамических параметров излучателя, а также характеристик рабочей жидкости.

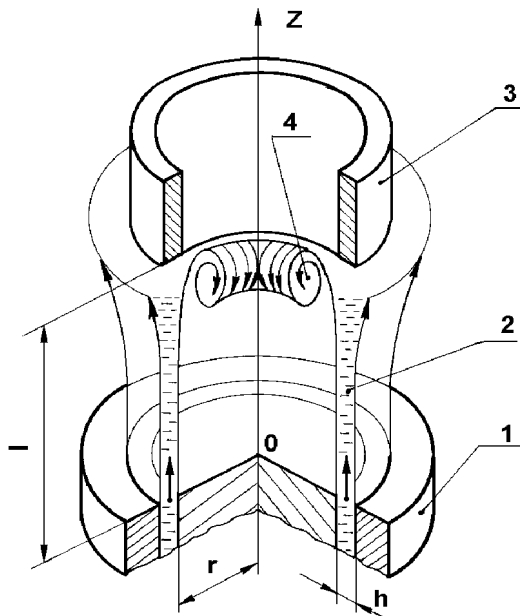


Рис. 1. Модель осесимметричного гидродинамического излучателя

1. МОДЕЛЬ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ-ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим прямооточную излучающую систему. Будем исходить из следующей модели: вытекающая из осесимметричного щелевого сопла 1 струя жидкости ведет себя, как упругая цилиндрическая оболочка 2, жестко защемленная на торце сопла и свободно опирающаяся на препятствие 3 (рис. 1). На нем цилиндрическая струя раздваивается: часть потока уходит во внешнюю среду, а другая заворачивается к оси Z , образуя вихрь 4, имеющий тороидальную форму. В центре вихревой зоны создаются условия для разрыва сплошности жидкости.

С увеличением концентрации каверн давление внутри области 4 возрастает, достигая критического значения, после чего наступает деформация свободного края упругой струи-оболочки и выброс содержимого кавитационной зоны с последующим синфазным схлопыванием ее каверн. При этом давление во внутренней полости оболочки становится меньше гидростатического давления в невозмущенной среде, что вновь приводит к заворачиванию свободного края струи в сторону оси Z и возникновению тороидального вихря. Этот процесс повторяется периодически.

Из сказанного понятно, что накопителем энергии является вихрь, а частоту основного тона за-

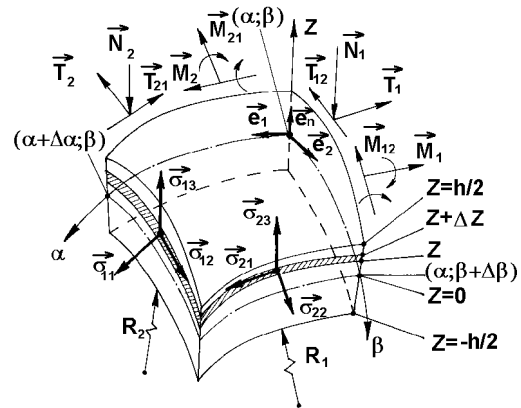


Рис. 2. Напряжения, эквивалентные силы и моменты, действующие на элемент оболочки

дают упругая жидкостная оболочка и присоединенная масса отсекаемой зоны. Решение задачи будем искать в таком виде, чтобы, зная скорость истечения жидкости из сопла, характеристики жидкой среды и геометрию оболочки, можно было получить частоту собственных колебаний последней. При этом будем исходить из гипотез Кирхгофа – Лява [6]:

- прямоугольные элементы оболочки, перпендикулярные к срединной поверхности, до и после деформирования остаются прямолинейными и перпендикулярными к изогнутой срединной поверхности, сохраняя при этом свою длину;
- нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности, считаются пренебрежимо малыми по сравнению с другими напряжениями.

В общем случае, на оболочку могут действовать внешние силы и моменты: массовые, поверхностные и краевые. В качестве массовых сил чаще всего выступают сила тяжести и центробежные силы инерции. Как поверхностные силы в теории оболочек наиболее часто рассматриваются силы гидростатического давления. На края оболочки могут действовать как активные внешние силы и моменты, так и силы реакций. Кроме того, к оболочке могут быть приложены нагрузки, распределенные вдоль линии или сосредоточенные в точке.

1.1. Система уравнений тонкой оболочки

Введем на срединной поверхности оболочки ортогональный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_n$ и оси связанной с ней криволинейной системы координат α, β (рис. 2).

Четырьмя нормальными сечениями, касательными к линиям α ; $\alpha + \Delta\alpha$; β ; $\beta + \Delta\beta$, выделим на срединной поверхности элемент оболочки. Векторы напряжений $\vec{\sigma}_{ij}$ показаны на рис. 2¹.

Введем вместо напряжений статически эквивалентные им усилия и моменты. Рассмотрим грань элемента, перпендикулярную оси α . Будем считать $\Delta\beta$ настолько малым, что в интервале $[\beta; \beta + \Delta\beta]$ при постоянном z напряжения постоянны. В силу малости прогибов полагаем, что коэффициенты Ламе и радиусы кривизны не меняются. Площадь заштрихованного участка грани на рис. 2 равна [6]

$$B\Delta\beta\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)dz, \quad (1)$$

где $B = \partial R_2 / \partial \beta$ – коэффициент Ламе; R_2 – радиус кривизны сечения. Тогда компоненты главного вектора системы напряжений, приложенных к этой грани [7], имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta T_1 &= B\Delta\beta \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz, \\ \Delta T_{12} &= B\Delta\beta \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz, \\ \Delta N_1 &= B\Delta\beta \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz, \end{aligned} \quad (2)$$

а компоненты главного момента ΔM_{12} , ΔM_1 вдоль осей α и β будут соответственно

$$\begin{aligned} \Delta M_{12} &= B\Delta\beta \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{12} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz, \\ \Delta M_1 &= B\Delta\beta \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{11} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz. \end{aligned} \quad (3)$$

Момент напряжений относительно оси, параллельной \vec{e}_n и проходящей через центральную точку дуги $B\Delta\beta$, равен нулю в предположении однородности напряжений вдоль дуги $B\Delta\beta$ [7].

Заменим систему напряжений, приложенных к грани элемента оболочки, статически эквивалентной системой сил и моментов, приложенных к

элементу срединной поверхности по отрезку дуги $[\beta; \beta + \Delta\beta]$. На единицу длины указанной линии приходится следующие удельные силы и моменты:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\Delta T_1}{B\Delta\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz, \\ T_{12} &= \frac{\Delta T_{12}}{B\Delta\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz, \\ N_1 &= \frac{\Delta N_1}{B\Delta\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz, \\ M_1 &= \frac{\Delta M_1}{B\Delta\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{11} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz, \\ M_{12} &= \frac{\Delta M_{12}}{B\Delta\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{12} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz. \end{aligned} \quad (4)$$

По аналогии, рассмотрим грань элемента, перпендикулярную направлению \vec{e}_2 (ось β). На единицу длины линии пересечения этой грани со срединной поверхностью приходится силы и моменты относительно направлений \vec{e}_1 , \vec{e}_2 :

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz, \\ T_{21} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz, \\ N_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz, \\ M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{22} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz, \\ M_{21} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{21} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz. \end{aligned} \quad (5)$$

В рассматриваемом случае под статически эквивалентными силами, приложенными к элементу срединной поверхности оболочки, понимаются: \vec{T}_1 , \vec{T}_2 – нормальные силы; \vec{T}_{12} , \vec{T}_{21} – сдвигающие силы; \vec{N}_1 , \vec{N}_2 – перерезывающие усилия. Статически экви-

¹Здесь и далее векторные величины будем обозначать стрелками вверх. Написание соответствующей величины без стрелки означает, что речь идет о величине вектора вдоль предопределенного направления.

валентные моменты имеют следующий смысл: \vec{M}_1 , \vec{M}_2 – изгибающие; \vec{M}_{12} , \vec{M}_{21} – крутящие.

Пусть при деформировании оболочки точки ее срединной поверхности получают перемещения $\vec{D}(\alpha, \beta)$. Обозначим через u , v , w проекции вектора \vec{D} :

$$\vec{D} = \vec{e}_1 u + \vec{e}_2 v + \vec{e}_n w.$$

Полагаем, что перемещения точек оболочки малы по сравнению с ее толщиной. Обозначим через θ и ψ углы поворота нормали к срединной поверхности относительно осей α и β . Воспользуемся геометрическими соотношениями теории упругости, устанавливающими связь перемещений с деформациями [7]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right), \\ \chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \psi, \\ \chi_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta, \\ \chi_{12} &= \frac{1}{A} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \theta + \\ &\quad + \left[\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right] \frac{1}{R_1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь ε_1 и ε_2 – относительные удлинения в направлениях α и β соответственно; ε_{12} – относительный сдвиг; величины χ_1 , χ_2 характеризуют изменения кривизны, а χ_{12} – кручение срединной поверхности оболочки;

$$\begin{aligned} \theta &= (\vec{e}_n, \vec{e}_1) = -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1}; \\ \psi &= (\vec{e}_n, \vec{e}_2) = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись обобщенным законом Гука, запишем связь между напряжениями и деформациями

в следующем виде [7, 8]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\varepsilon_1}{1+z/R_1} + \frac{\nu \varepsilon_2}{1+z/R_2} \right], \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\varepsilon_2}{1+z/R_2} + \frac{\nu \varepsilon_1}{1+z/R_1} \right], \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12}^{(z)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\varepsilon_{12}^{(z)} = \frac{1}{1+z/R_1} (\omega_1 + z\tau_1) + \frac{1}{1+z/R_2} (\omega_2 + z\tau_2);$$

$$\omega_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v;$$

$$\tau_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \theta;$$

$$\tau_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \psi;$$

(8)

E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона материала оболочки.

Подставим выражения (7) в соотношения (4) и (5), учитывая вид χ_1 , χ_2 и χ_{12} из системы (6). Поскольку срединная поверхность оболочки не имеет разрывов и производные смещений по α и β принимают конечные значения, то можно считать $1/R_1 \approx 1/R_2$. После очевидных преобразований получаем соотношения упругости:

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2),$$

$$T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1),$$

$$S_1 = S_2 = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12},$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_1 + \nu \chi_2),$$

$$M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_2 + \nu \chi_1),$$

$$H = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \chi_{12}.$$

(9)

В этой системе уравнений обобщенные изгибающие силы и обобщенные крутящие моменты равны

соответственно

$$\begin{aligned} S_1 &= T_{12} - \frac{M_{21}}{R_2}, \\ S_2 &= T_{21} - \frac{M_{12}}{R_1}, \\ H &= \frac{M_{12} + M_{21}}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения колебаний оболочки можно получить путем прибавления к внешним парам и силам, которые входят в уравнения равновесия, выражений для сил инерции и их моментов [7] (затуханием пренебрегаем):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(T_1 B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial(S_2 A)}{\partial \beta} + \right. \\ &\quad \left. + S_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - T_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right] - \frac{N_1}{R_1} = -2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ &\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(S_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(T_2 A)}{\partial \beta} - \right. \\ &\quad \left. - T_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - S_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right] - \frac{N_2}{R_2} = -2\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ &\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(N_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(N_2 B)}{\partial \beta} \right] + \\ &\quad + \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = -2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ &\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(M_{12} B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial(M_2 B)}{\partial \beta} + \right. \\ &\quad \left. + M_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - M_{21} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right] + N_2 = 0, \\ &\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(M_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(M_{21} A)}{\partial \beta} - \right. \\ &\quad \left. - M_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - M_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right] - N_1 = 0, \\ &\frac{M_{12}}{R_1} + \frac{M_{21}}{R_2} + S_1 + S_2 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где ρ – плотность материала оболочки; h – ее толщина.

Уравнения колебаний записываем относительно недеформированного состояния, пренебрегая произведениями компонент смещения u , v , w и их производных.

1.2. Собственные колебания цилиндрической струи-оболочки

Полная система уравнений оболочки состоит из геометрических соотношений (6), дающих связь перемещений с деформациями, соотношений упругости (9), связывающих деформации с усилиями и моментами, а также из уравнений колебания оболочки (11). Будем считать, что струя-оболочка деформируется под действием сил, равномерно распределенных по ее внутренней поверхности (все геометрические параметры считаются известными). Так как рассматриваются установившиеся колебания, то нет необходимости в начальных условиях. Применительно к системам уравнений (6), (9), (11) краевые условия принимают следующий вид [7]:

- для свободного края ($\beta = \text{const}$)

$$T_2 = 0,$$

$$S_1 = S_2 = 0, \quad (12)$$

$$N^* = N_2 - \frac{1}{A} \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha} = 0;$$

- для жестко защемленного края ($\beta = \text{const}$)

$$u = 0, \quad v = 0,$$

$$w = 0, \quad \psi = 0. \quad (13)$$

Здесь N^* – обобщенная перерезывающая сила.

В случае цилиндрической оболочки параметры Ламе [8] равны $A = 1$ и $B = r$ (r – радиус цилиндра), радиусы кривизны – $R_1 \rightarrow \infty$ и $R_2 = r$. Кроме того, при осевой симметрии ни одна из упругих величин не зависит от угловой координаты ϕ . Поскольку оболочка деформируется только в направлении нормали к ее поверхности, то отсутствуют сдвигающие усилия и крутящие моменты. Кроме того, в любом сечении $\phi = \text{const}$ равны нулю изгибающие моменты и перерезывающая сила. Если элемент оболочки, представленный на рис. 2, вырезан из тонкостенного струйного цилиндра (см. рис. 1), то в системах уравнений (6), (8), (9) и (11) следует принять вместо криволинейной оси α (орт \vec{e}_1) вертикальную ось Z , в качестве нормали (орт \vec{e}_n) – ось r . Тогда эквивалентные силы и моменты принимают следующие значения: $T_1 = T_z$, $N_1 = N_z$, $M_1 = M_z$, $M_{12} = 0$, $M_{21} = 0$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$.

С учетом вышеизложенного, уравнения (6), (9) и (11) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_z}{\partial z} + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial N_z}{\partial z} - \frac{\nu}{r} T_z + \left(\rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{Eh}{r^2}\right) w &= 0, \\ \frac{\partial M_z}{\partial z} - N_z &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\nu}{r} v - \frac{1-\nu^2}{Eh} T_z &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial z} + \psi z &= 0, \\ \frac{\partial \psi_z}{\partial z} - \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} M_z &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Условия на свободном крае ($z=l$) сводятся к равенствам

$$M_z = 0, \quad T_z = 0, \quad N_z = 0, \tag{15}$$

а на жестко защемленном ($z=0$) – к равенствам

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \psi_z = 0. \tag{16}$$

Примем коэффициент Пуассона равным нулю, что обусловлено моделью струи-оболочки (материал – жидкость).

Будем искать решения в виде

$$\begin{aligned} u(z, t) &= u(z) e^{i\omega t}, \\ w(z, t) &= w(z) e^{i\omega t}, \end{aligned} \tag{17}$$

где ω – круговая частота. Тогда исходная система уравнений (14) распадается на две, в одну из которых входят u и v , не представляющие для нас интереса а в другую – радиальное смещение свободного края оболочки w :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_z}{\partial z} + \left(\rho h \omega^2 - \frac{Eh}{r^2}\right) w &= 0, \\ \frac{\partial M_z}{\partial z} - N_z &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial z} + \psi z &= 0, \\ \frac{\partial \psi_z}{\partial z} - \frac{12}{Eh^3} M_z &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Путем простых математических преобразований система четырех дифференциальных уравнений (18) может быть сведена к одному:

$$\frac{Eh^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{Eh}{r^2} w = \omega^2 \rho h w, \tag{19}$$

$$0 \leq z \leq l.$$

Известно, что его общее решение имеет вид [9]:

$$\begin{aligned} w(z) &= a \operatorname{ch}(kz) + b \operatorname{sh}(kz) + \\ &+ c \cos(kz) + d \sin(kz), \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$k = \sqrt[4]{\frac{12(\rho r^2 \omega^2 - E)}{Eh^2 r^2}}; \tag{21}$$

a, b, c, d – подлежащие определению коэффициенты. Используя естественные краевые условия

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0,$$

$$w(l) = 0, \quad w'(l) = 0,$$

придем к системе четырех уравнений относительно a, b, c и d :

$$a + c = 0,$$

$$b + d = 0,$$

$$\begin{aligned} a \operatorname{ch}(kl) + b \operatorname{sh}(kl) - \\ - c \cos(kl) - d \sin(kl) &= 0, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} a \operatorname{sh}(kl) + b \operatorname{ch}(kl) - \\ - c \sin(kl) + d \cos(kl) &= 0. \end{aligned}$$

Система уравнений (22) имеет нетривиальное решение в том случае, если определитель системы равен нулю, т.е.

$$\Delta = 2[\operatorname{ch}(kl) \cos(kl) + 1] = 0. \tag{23}$$

Уравнение (23) имеет бесконечное множество решений. Каждому корню k_n соответствует частота ω_n , которая находится из решения дополнительного уравнения (21):

$$k_n^4 = \frac{12(\rho r^2 \omega_n^2 - E)}{Eh^2 r^2} \quad n = 1, 2, \dots \tag{24}$$

при заданных величинах ρ, r, h, E . Собственные колебания оболочки (основной тон) имеют наименьшую частоту ω_0 , соответствующую корню k_0 , который лежит в интервале [10]

$$\frac{\pi}{2} \leq k_0 l \leq \frac{3\pi}{2}. \tag{25}$$

Таким образом, нулевая мода колебаний характеризуется частотой ω_0 , определяемой выражением

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0^4 h^2 r^2 + 12}{12 \rho r^2} E}. \tag{26}$$

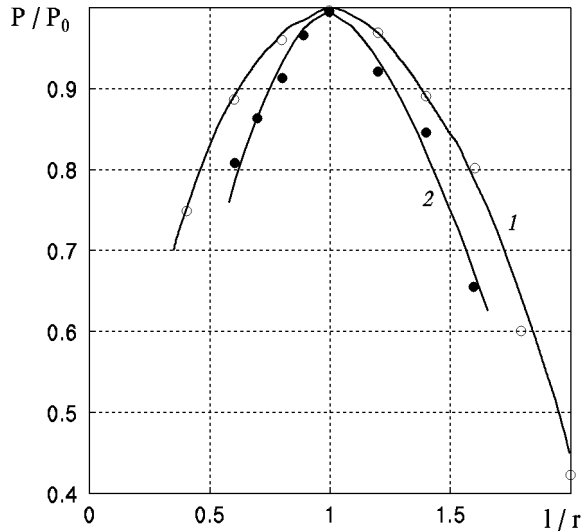


Рис. 3. Зависимость уровня акустического сигнала от высоты струи-оболочки:

1 – водопроводная вода, 2 – трансформаторное масло

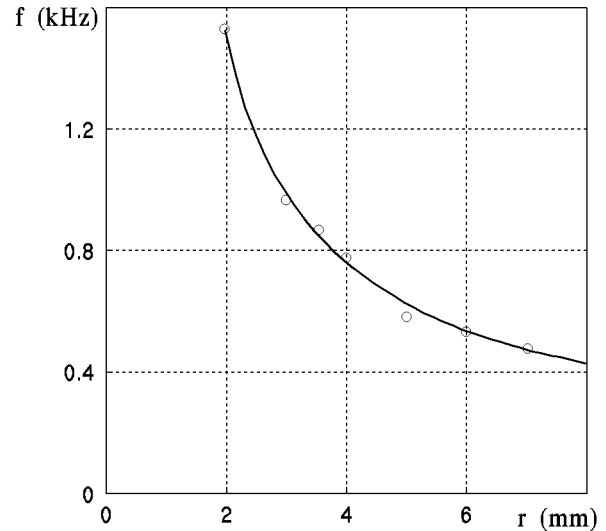


Рис. 4. Зависимость частоты основного тона от длины оболочки:

1 – трансформаторное масло, 2 – водопроводная вода

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Как видно из рис. 3, в реальных осесимметричных гидродинамических излучающих системах наибольший уровень акустического сигнала соответствует следующему соотношению длины и радиуса струи-оболочки:

$$l \approx (0.9 \div 1.1)r. \quad (27)$$

При слишком малом расстоянии между торцами сопла и отражателя ($l < 0.5r$) или достаточно большом ($1 > 2r$) возможен срыв генерирования тонального акустического сигнала. В первом случае это связано с тем, что диаметр сечения тороидального вихря (см. рис. 1) превосходит величину l . Во втором случае, за счет расширения кольцевой струи-оболочки, она перестает опираться на препятствие и уходит в окружающее пространство. Вследствие этого невозможен заворот части потока струи в сторону оси сопло–отражатель, и тороидальный вихрь не образуется. Поэтому для реального осесимметричного гидродинамического излучателя основному тону колебаний оболочки вместо условия (25) следует принимать

$$\frac{3\pi}{2} \leq k_0 l \leq \frac{5\pi}{2}. \quad (28)$$

Как видно из выражения (26), собственная частота колебаний струи-оболочки функционально

зависит от геометрических ($r, k_0 \sim 1/l, h$), гидродинамических (v) параметров и свойств рабочей жидкости (ρ, E). При этом, измерив частоту ω_0 основного тона колебаний, из уравнений (23) и (24) с учетом условия (28) можно определить неизвестный для данной модели модуль упругости жидкостной оболочки E . В частности, опытным путем был получен ряд основных частот ω_{0i} , соответствующих различным геометрическим параметрам оболочки $r_i, h_i, l_i \approx (0.9 \div 1.1)r_i$. При этом в каждом случае скорость истечения кольцевой струи соответствовала максимальному акустическому сигналу. В качестве рабочей жидкости использовались водопроводная вода ($\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$) и трансформаторное масло ($\rho = 950 \text{ кг/м}^3$). После усреднения значений E , соответствующих ряду измерений, получили величину модуля упругости струи-оболочки:

$$\text{водопроводная вода: } E = 2.81 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2;$$

$$\text{трансформаторное масло: } E = 2.97 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

Для любой механической колебательной системы с увеличением ее габаритов частота генерируемых колебаний должна падать. Этот факт отражен в выражении (26) – k_0^2 обратно пропорционален длине оболочки $l \sim r$. Это подтверждается и результатами эксперимента (рис. 4). Следует еще раз отметить, что излучатели данного типа дают интенсивный тональный акустический сигнал только в ограниченном интервале расстоя-

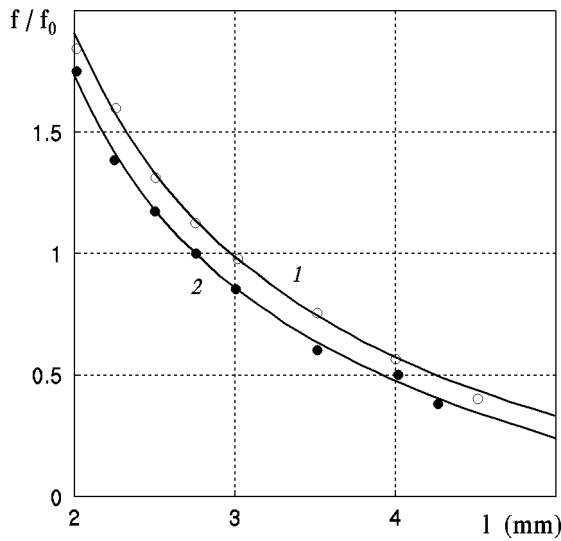


Рис. 5. Зависимость частоты основного тона от радиуса струи-оболочки

ний между соплом и отражателем, слева и справа от которого генерируется широкополосный турбулентный шум.

Представляет интерес зависимость основной частоты генерируемых колебаний от радиуса струйной осесимметричной оболочки. Так как радиус и длина упругой затопленной струи взаимосвязаны выражением (27), следует ожидать, что с увеличением r частота генерируемых колебаний будет уменьшаться. График $f(r)$ представлен на рис. 5.

На рис. 6 показана зависимость частоты основного тона генерируемых колебаний от скорости истечения из сопла затопленной круговой щелевой струи v . Исследования проводились при настройке излучателя на максимальный уровень звука ($v = v_{\text{опт}}$), а затем скорость истечения изменялась в большую и меньшую стороны. Для воды максимальному акустическому сигналу соответствовала частота $f_0 = 900$ Гц, причем скорость струи на выходе сопла составляла $v_{\text{опт}} = 30$ м/с. Поскольку вязкость у трансформаторного масла существенно выше, чем у воды, то максимальному уровню звука соответствуют значения $f_0 = 950$ Гц и $v_{\text{опт}} = 36$ м/с. Как следует из рис. 6, с увеличением скорости струи частота основного тона падает. Этому можно дать следующее объяснение: с возрастанием кинетической энергии кольцевой струи все меньшая ее часть заворачивается в сторону оси сопла – отражатель за счет создаваемого у торца препятствия разрежения, и все большая уходит в окружающее пространство. При этом

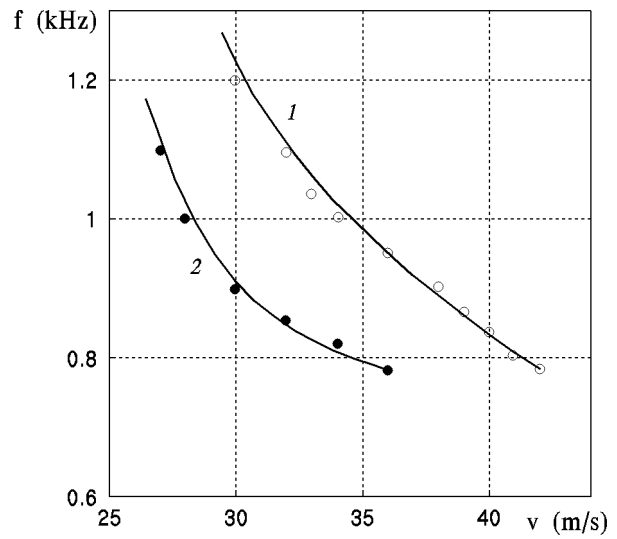


Рис. 6. Зависимость частоты основного тона от скорости истечения струи из сопла:

1 – трансформаторное масло, 2 – водопроводная вода

уменьшается расход рабочей жидкости на образование тороидального вихря, вследствие чего частота выбросов содержимого кавитационной тороидальной зоны понижается.

Следует заметить, что регулировка частоты основного тона генерируемых колебаний методом изменения скорости истечения струи на выходе сопла имеет достаточно ограниченный диапазон. При слишком низких скоростях невозможна кавитация в тороидальном вихре между торцами сопла и препятствия (см. рис. 1), и процесс гидродинамического звукообразования прекращается. При скоростях $v > 1.5v_{\text{опт}}$ кавитация, вероятно, возникает в канале сопла и, как следствие, генерируется широкополосный шум.

ВЫВОДЫ

1. Предложена модель затопленной осесимметричной кольцевой струи-оболочки. Получено выражение для частоты основной гармоники собственных колебаний жидкостной оболочки как функции свойств рабочей жидкости, геометрических и гидродинамических параметров струи.
2. Экспериментальные исследования процесса генерации звука осесимметричным гидродинамическим излучателем показали хорошее согласование расчетных и измеренных значений частоты основной гармоники.

3. Как следует из модели, частота основного тона прямо пропорциональна модулю упругости затопленной кольцевой струи-оболочки. Этот результат может быть использован для создания широкополосных осесимметричных гидродинамических излучающих систем. Поскольку модуль упругости зависит от гидростатического давления, то и частота звукового сигнала будет изменяться как функция избыточного давления в рабочей емкости.
1. Бергман Л. Ультразвук и его применение в науке и технике.– М.: ИИЛ, 1957.– 726 с.
 2. Назаренко А. Ф. Гидродинамические излучатели // Ультразвук. Маленькая энциклопедия / Под ред. И. П. Голяминой.– М.: Сов. энцикл, 1979.– С. 79–81.
 3. Дудзинский Ю. М., Назаренко О. А., Рыженко В. И. Эрозионная активность гидродинамического излучателя // Тр. Одес. политех. ун-та.– 1998.– 2, N 6.– С. 169–172.
 4. Дудзинский Ю. М., Назаренко А. Ф. Эффективность работы осесимметричных гидродинамических излучателей в условиях избыточного статического давления // Акуст. ж.– 1996.– 42, N 4.– С. 569–572.
 5. Дудзинский Ю. М., Назаренко А. А. Энергетические характеристики вторичной вихревой области осесимметричного гидродинамического излучателя // Акуст. вісн.– 2000.– 3, N 1.– С. 36–41.
 6. Ляв А. Математическая теория упругости.– М.: ОНТИ, 1935.– 420 с.
 7. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины.– М.: Изд-во МГУ, 1969.– 695 с.
 8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости.– М.: Наука, 1965.– 500 с.
 9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.: Наука, 1976.– С. 472–473.
 10. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.– М.: Наука, 1967.– 400 с.