

УДК 539.3:534.1

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ ЦИЛИНДРАХ С ПОДАТЛИВЫМИ СТЕНКАМИ

В. Т. ГРИНЧЕНКО*, Г. Л. КОМИССАРОВА**

* Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

** Институт механики НАН Украины имени С. П. Тимошенко, Киев

Получено 6.08.2001

Представлены данные о свойствах нормальных волн в составном упруго-жидкостном цилиндрическом волноводе. Предполагается, что скорость сдвиговых волн в материале цилиндра меньше скорости волн в идеальной жидкости, заполняющей волновод. Дисперсионные свойства нормальных волн определены на основе анализа дисперсионного уравнения, построенного с использованием полной системы уравнений динамической теории упругости для описания деформаций цилиндра и волнового уравнения для заполняющей жидкости. Такой подход позволил провести анализ взаимодействия волновых движений в упругой оболочке и жидком ядре в широком диапазоне частот и длин волн. Представлены данные о кинематических и энергетических характеристиках нормальных волн. Предложена методика систематизации данных о дисперсионных свойствах нормальных волн на основе выделения парциальных подсистем. Проведено сравнение полученных результатов с данными для волновода с относительно жестким упругим цилиндром, для которого скорость сдвиговых волн в материале цилиндра больше скорости звука в жидкости. Установлены существенные различия в проявлении эффектов взаимодействия волн в цилиндре и жидкости для случаев жестких и податливых материалов.

Представлено дані про властивості нормальних хвиль в складеному пружно-рідинному циліндричному хвилепроводі. Вважається, що швидкість зсувних хвиль у матеріалі циліндра менша за швидкість звуку в ідеальній рідині, яка заповнює циліндр. Дисперсійні властивості нормальних хвиль визначені на основі аналізу дисперсійного рівняння, побудованого з використанням повної системи рівнянь динамічної теорії пружності для опису деформування циліндра та хвильового рівняння для заповнюючої рідини. Такий підхід дозволив провести аналіз взаємодії хвильових рухів у пружній оболонці й рідинному ядрі в широкому діапазоні частот та довжин хвиль. Наведено дані про кінематичні та енергетичні характеристики нормальних хвиль. Запропоновано методикку систематизації даних про дисперсійні властивості нормальних хвиль на основі виділення парціальних підсистем. Одержані результати порівняно з даними для хвилепровода з відносно жорстким пружним циліндром, для якого швидкість зсувних хвиль в матеріалі циліндра більша, ніж швидкість звуку в рідині. Встановлено існування суттєвих відмінностей в характеристиках процесу взаємодії хвиль у циліндрі й рідині для випадків жорстких і піддатливих матеріалів.

Data concerning properties of normal waves in a compound elastic-liquid cylindrical waveguide are presented. It is supposed, that the speed of shear waves in a material of the cylinder is less than the speed of waves in liquid (perfect fluid) that fills the waveguide. The dispersion properties of normal waves are determined on basis of the dispersion equation analysis. The complete set of equations of the dynamic elasticity theory was used to describe deformation of the elastic cylinder. The waves in the filling liquid were described by the wave equation. Such approach has allowed to conduct the analysis of interaction of wave motions in an elastic shell and liquid core in a broad band of frequencies and wavelengths. The data about the kinematic and power characteristics of normal waves are presented. The technique of systematization of data about the dispersion properties of normal waves is offered. The method uses the idea of partial subsystems. The obtained results are compared to the data for a waveguide with rather rigid elastic cylinder (speed of shift waves in the material of the cylinder exceeds the sound speed in the liquid). The essential differences in development of the wave coupling effects in the cylinder and liquid for cases of rigid and complaint materials are shown.

ВВЕДЕНИЕ

Акустические волноводы в виде цилиндрических труб, наполненных жидкостью или газом, часто используются для измерения скорости и коэффициента поглощения звука в наполняющей среде. Знание характеристик нормальных волн позволяет также измерять акустические свойства материала трубы. При этом используются специфические свойства составных волноводов. Дело в том, что в предельном случае волновода с абсолютно жесткой стенкой в заполняющей его акустической среде при любой частоте распространяется плоская волна, фазовая скорость которой равна скорости звука в этой среде. Для волновода с упруги-

ми стенками такой бездисперсионной волны не существует. При этом дисперсия нижней нормальной волны существенно возрастает с уменьшением жесткости упругой стенки волновода.

Если волновод наполнен газом, упомянутый эффект практически не проявляется и движением стенки при описании нижней нормальной волны обычно можно пренебречь. Если же волновод наполнен жидкостью, ситуация может измениться. Существенное влияние стенок волновода на свойства нормальных волн может проявиться в том случае, когда волновые сопротивления жидкости и материала стенки довольно близки. Однако, даже при существенном различии волновых сопротивлений, для случая тонкостенного волновода дис-

персия низшей нормальной волны оказывается существенной. В обоих случаях плоская волна вырождается в моду, фазовая скорость которой может быть значительно меньше скорости звука в жидкости.

Начиная с первых работ Резала, Громеко, Кортевега, Жуковского, посвященных изучению волновых движений в заполненных жидкостью трубах, рассматривались как жесткие, так и податливые трубы. Как правило, речь шла о низшей нормальной волне и для ее фазовой скорости получались некоторые приближенные выражения. Обзор упомянутых ранних исследований приведен в [1]. Изучение свойств нормальных волн в составных волноводах и в настоящее время стимулируется рядом прикладных проблем. При этом интерес представляют не только нормальные волны низших порядков, но и волны, распространяющиеся при относительно высоких частотах. В этом случае дисперсионные свойства нормальных волн следует определять на основе решения полных дисперсионных уравнений, описывающих взаимодействие волновых движений в жидкости и в упругой стенке.

Исторически сложилось так, что при изучении свойств нормальных волн в составных волноводах зачастую используются приближенные теории оболочек. В какой-то мере это было оправдано в тот период, когда решение сложных трансцендентных уравнений вызывало определенные трудности, однако на сегодняшний день использование таких теорий при изучении дисперсионных свойств волноводов практически потеряло смысл, поскольку проведение вычислений с использованием полных уравнений динамической теории упругости не представляет существенных трудностей.

Дисперсионное уравнение упруго-жидкостного цилиндрического волновода зависит от параметров, характеризующих физические свойства жидкости и материала цилиндра, а также от толщины стенки цилиндра. Влияние толщины стенки на характеристики нормальных волн составного волновода для случая цилиндра из относительно жесткого материала изучено в работах [2–4]. Данная статья посвящена изучению волн в составном цилиндрическом волноводе, волновое сопротивление материала стенок которого близко к волновому сопротивлению заполняющей жидкости. Этот случай рассматривается в ряде современных публикаций. В работе [5], исходя из решения задачи в рамках теории оболочек Донне-Муштари, получены действительные, мнимые и комплексные корни дисперсионного уравнения для двух типов упруго-жидкостных волново-

дов: сталь–вода и жесткая резина–вода. Вычисления проведены для тонкостенных цилиндров с $h/R_c=0.05$ и 0.005 . Здесь h – толщина; R_c – средний радиус цилиндрической оболочки. Показано, что дисперсионные свойства низшей нормальной волны в этих волноводах существенно различаются.

Исследование дисперсионных свойств двух низших нормальных осесимметричных волн для составных волноводов алюминий–вода и полихлорвинил (ПХВ)–вода на основе уравнений динамической теории упругости проведено в [6]. Для волновода алюминий–вода с $h/R_c=0.4$ фазовая скорость первой нормальной волны близка к скорости звука в жидкости. Соответствующее ей волновое движение является плоским. Фазовая скорость второй нормальной волны при низких частотах значительно превосходит скорость звука в жидкости. Для волновода ПХВ–вода с $h/R_c=0.135$ фазовая скорость первой нормальной волны значительно меньше скорости звука в жидкости. Фазовая скорость второй нормальной волны в области низких частот близка к скорости звука в жидкости. С увеличением частоты фазовая скорость второй волны несколько уменьшается.

Распространение неосесимметричных нормальных волн ($n=1$) в цилиндре из мягкой резины рассмотрено в [7,8] для трех случаев: пустой цилиндр; цилиндр с жидкостью; цилиндр, контактирующий с внутренней и внешней жидкостями. Исходя из решения задачи на основе уравнений теории упругости, приведены данные для первых трех действительных дисперсионных кривых. В рассмотренной области частот для составного волновода мягкая резина–вода с относительным внутренним радиусом цилиндра $r_1=0.8$ влияние внутренней жидкости проявилось в виде эффекта присоединенной массы. Здесь $r_1=R_1/R$ где, R_1 и R – внутренний и внешний радиусы цилиндра соответственно. Волновые эффекты в жидкости для такого волновода начинают проявляться лишь на частотах, превышающих частоту запираания третьей нормальной волны.

Анализ накопленных данных о свойствах нормальных волн в составных волноводах типа упругий цилиндр–жидкость показывает, что их систематизацию целесообразно провести на основе оценки соотношения между значениями скоростей звука в жидкости и сдвиговых волн в материале цилиндра. Если скорость сдвиговых волн превосходит скорость звука, то все нормальные волны в составном волноводе, за исключением низшей, имеют фазовые скорости, превосходящие скорость звука в жидкости. В дальнейшем этот слу-

чай будем определять как случай жесткой оболочки. Волноводы, для которых сдвиговая скорость в материале цилиндра меньше скорости звука в жидкости, будут квалифицироваться как волноводы с податливыми стенками. При этом предполагается, что плотность материала цилиндра превосходит плотность заполняющей его жидкости.

Достаточно полная систематизация данных о свойствах волноводов с жесткими стенками приведена в работах [2–4]. Нормальные волны в волноводах с податливыми стенками обладают рядом специфических особенностей. Существующих данных об их свойствах для полного описания свойств такого класса волноводов недостаточно. Цель настоящей работы состоит в изучении особенностей распространения нормальных волн в упруго-жидкостных цилиндрических волноводах из податливых материалов при изменении частоты и толщины цилиндра в широком диапазоне значений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА СМЕЩЕНИЙ

Исследуются свойства нормальных осесимметричных волн в упругом цилиндре, заполненном идеальной сжимаемой жидкостью. Характеристики нормальных волн определяются, как и в работах [2–4], на основе решения дисперсионного уравнения, полученного в рамках использования для описания деформаций цилиндра полных уравнений теории упругости. Компоненты вектора смещений упругого цилиндра, удовлетворяющие уравнениям движения Ляме, имеют вид [2, 4]

$$\begin{aligned} u_j &= U_j(r) \exp[i(\zeta z - \omega t)], \quad j = r, z, \\ U_r(r) &= -\alpha[A_1 J_1(\alpha r) + A_2 Y_1(\alpha r)] + \\ &\quad + \beta[B_1 J_1(\beta r) + B_2 Y_1(\beta r)], \\ U_z(r) &= i\zeta[A_1 J_0(\alpha r) + A_2 Y_0(\alpha r)] + \\ &\quad + i\frac{\beta^2}{\zeta}[B_1 J_0(\beta r) + B_2 Y_0(\beta r)], \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \gamma_1^2 - \zeta^2; \quad \gamma_1 = \frac{\omega R}{V_D}; \\ \beta^2 &= \gamma_2^2 - \zeta^2; \quad \gamma_2 = \frac{\omega R}{V_S}. \end{aligned}$$

Выражение для потенциала скорости в жидкости, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца,

имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= DJ_0(\chi r) \exp[i(\zeta z - \omega t)], \\ \chi^2 &= \gamma_2^2 \left(\frac{V_S}{C}\right)^2 - \zeta^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ζ – безразмерная постоянная распространения; ω – круговая частота; V_D и V_S – скорости волн расширения и сдвига соответственно; C – скорость звука в жидкости; J_n и Y_n – функции Бесселя; A_1, A_2, B_1, B_2 и D – произвольные постоянные. Здесь и далее все линейные величины отнесены к внешнему радиусу цилиндра R , а потенциал скорости нормирован к произведению RC .

Граничные условия на внешней свободной поверхности цилиндра $r=1$ и условия контакта с жидкостью на внутренней поверхности цилиндра $r=r_1$ порождают при использовании решений (1) и (2) дисперсионное уравнение задачи. Это уравнение следует из условия равенства нулю определителя пятого порядка:

$$\Delta_5 = |a_{ij}| = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, 5, \quad (3)$$

явный вид элементов которого приведен в [2]. Дисперсионное уравнение связывает безразмерные частоту γ_2 и постоянную распространения ζ при заданных величинах безразмерных параметров $\nu, V_S/C, \rho_0/\rho_1$ и r_1 . Здесь ν – коэффициент Пуассона; ρ_0 и ρ_1 – плотности жидкости и материала цилиндра соответственно. Наличие такого большого количества параметров существенно усложняет исследование дисперсионных свойств заполненного жидкостью цилиндра. Задача исследования характеристик нормальных волн составного волновода значительно облегчается, если систематизацию расчетных данных проводить на основе данных о характеристиках парциальных подсистем. В качестве парциальных подсистем, по аналогии с работами [2–4], выбираем упругий пустой цилиндр и акустический волновод. Большая наглядность результатов обеспечивается, если считать, что в области низких частот акустический волновод имеет мягкие стенки. В области высоких частот в качестве второй парциальной подсистемы удобно выбрать акустический волновод с жесткими стенками.

Дисперсионное уравнение для пустого упругого цилиндра со свободными боковыми поверхностями получаем непосредственно из уравнения (3), полагая $\rho_0=0$. Дисперсионное уравнение для акустического волновода с мягкой стенкой имеет вид [4]

$$J_0(\chi r_1) = 0. \quad (4)$$

Табл. 1. Значения основных физических величин

МАТЕРИАЛ	К-Т ПУАССОНА ν	ПЛОТНОСТЬ ρ , кг/м ³	V_D , м/с	V_S , м/с	ρ_0/ρ_1	V_S/C
Сталь	0.29	7860	5890	3210	0.13	2.14
ПХВ	0.38	1430	1935	851.3	0.699	0.5675
Ж. резина	0.4	1100	1450	591.9	0.909	0.3946
М. резина	0.45	1000	238.5	72	1.0	0.048
Вода		1000	1500	—	—	—

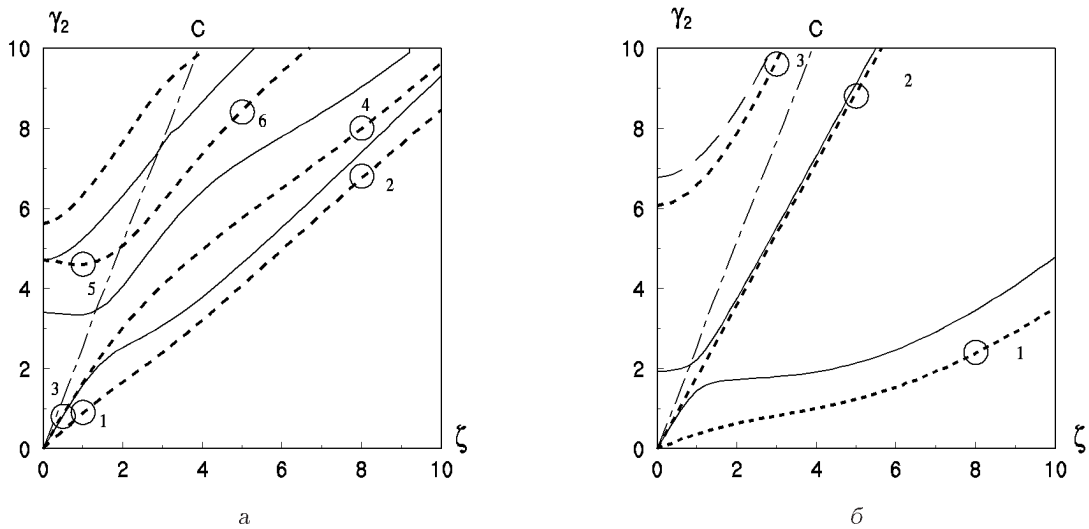


Рис. 1. Дисперсионные кривые нормальных волн в составных волноводах жесткая резина–вода (вещественные ветви):
а - $r_1 = 0.3$, б - $r_1 = 0.9$

Свойства нормальных волн в волноводе с жесткой стенкой определяются уравнением

$$\chi J_1(\chi r_1) = 0. \quad (5)$$

При анализе дисперсионных уравнений для акустических волноводов легко установить общее важное свойство нормальных волн: низшая нормальная волна в волноводе с жесткими стенками имеет постоянную фазовую скорость, равную скорости звука в неограниченной среде. Фазовые скорости остальных нормальных волн при любых значениях частоты превосходят значение скорости звука. Специфические предельные свойства присущи и нормальным волнам в упругом цилиндре со свободными границами. Так, низшая нормальная волна имеет фазовую скорость, превосходящую скорость волны Рэлея, и приближающуюся к ней с ростом частоты. Скорости всех остальных волн превосходят скорость сдвиговых волн в материале цилиндра.

2. ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА УПРУГО-ЖИДКОСТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ С ПОДАТЛИВЫМИ СТЕНКАМИ

Перейдем к более конкретному анализу свойств нормальных волн в составном волноводе на основе количественных данных о корнях дисперсионного уравнения (3). Рассмотрим заполненный водой цилиндр из податливого материала. Вычисления проведены для трех вариантов случаев материала цилиндра: ПХВ, жесткая резина и мягкая резина. Значения основных физических характеристик для этих материалов, а также для стали и воды приведены в табл. 1 [2,5–7]. Видно, что для составного волновода сталь–вода отношение V_S/C больше единицы, а $\rho_0/\rho_1 \ll 1$. Для перечисленных податливых материалов величина V_S/C становится меньше единицы, а $\rho_0/\rho_1 \sim 1$. При этом значение коэффициента Пуассона ν приближается к 0.5

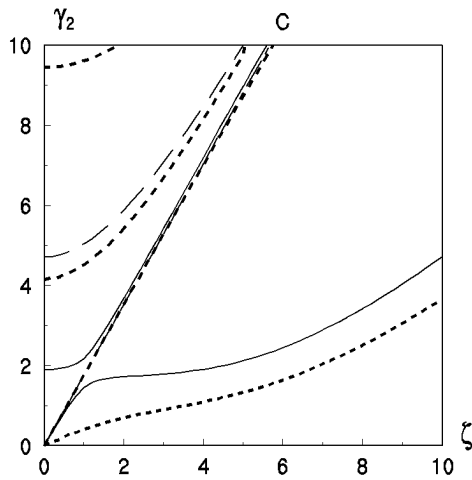


Рис. 2. Дисперсионные кривые нормальных волн в составном волноводе ПХВ–вода с $r_1=0.9$ (вещественные ветви)

(коэффициент Пуассона для несжимаемого материала).

На рис. 1, а и б представлены действительные ветви дисперсионных кривых для составных волноводов жесткая резина–вода с внутренними радиусами цилиндров $r_1=0.3$ и 0.9 соответственно. На рис. 2 представлены аналогичные данные для волновода ПХВ–вода с $r_1=0.9$. Плоскость (ζ, γ_2) делится прямой OC ($\chi=0$) на сектора в зависимости от значения χ (выше нее χ действительно, а ниже – мнимо). На рисунках дисперсионные кривые для составного волновода изображены жирными штриховыми, для пустого цилиндра – тонкими сплошными, а для акустического волновода с мягкими стенками – тонкими штриховыми линиями. Первая дисперсионная кривая пустого цилиндра расположена в том секторе, где χ является мнимым. Вторая и все последующие дисперсионные кривые пустого цилиндра, начинающиеся в секторе с действительным χ , при росте частоты переходят в сектор с мнимым χ .

Как видно из приведенных на рисунках данных для различных материалов, дисперсионные свойства нормальных волн упругого полого цилиндра не претерпевают существенных изменений при изменении коэффициента Пуассона. В частности, для всех случаев низшая нормальная волна на низких частотах соответствует практически чисто продольному стержневому движению. Для второй нормальной волны (см. рис. 1, а) при относительно большой толщине стенки цилиндра характерно наличие диапазона частот, для которых фазовые и групповые скорости имеют разные знаки (явле-

ние обратной волны). На частотах запираия нормальных волн пустого цилиндра волновые движения связаны либо с чисто продольными, либо с чисто сдвиговыми волнами.

Частоты запираия нормальных волн со сдвиговым типом движения для фиксированной безразмерной частоты не зависят ни от свойств материала цилиндра, ни от наличия жидкости внутри цилиндра [2]. Из представленных на рис. 1, а дисперсионных кривых к этому типу относится третья распространяющаяся волна для пустого цилиндра. Вторая распространяющаяся волна, показанная на рис. 1, и 2, на частотах запираия формируется за счет чисто продольной волны. Частота запираия γ_{r1} для этой радиальной моды при увеличении коэффициента Пуассона возрастает, как и в случае сплошного цилиндра [9]. Так, при $r_1=0.9$ для полого цилиндра из ПХВ ($\nu=0.38$) получаем $\gamma_{r1}=1.894$, из жесткой резины ($\nu=0.4$) – $\gamma_{r1}=1.925$, из мягкой ($\nu=0.45$) – $\gamma_{r1}=2.011$. Зависимость частот запираия первых радиальной и сдвиговой волн от величины относительного внутреннего радиуса цилиндра r_1 изучена в [10]. В этой работе подробно исследовано поведение частот запираия второй и третьей нормальных волн от толщины цилиндра. Для относительно тонких цилиндров вторая частота запираия связана с движением на продольных волнах. С уменьшением толщины эта критическая частота снижается. В то же время, критическая частота для третьей нормальной волны растет при уменьшении толщины.

Как видно из рис. 1 и 2, в рассмотренном диапазоне частот дисперсионные кривые, соответствующие введенным парциальным подсистемам, не пересекаются. Это объясняется тем, что скорость звука в жидкости значительно превосходит скорость сдвиговой волны в податливом материале цилиндрической оболочки. Частота запираия для второй нормальной жидкостной волны оказывается относительно очень высокой и пересечение дисперсионных кривых возможно лишь в области высоких частот. Поскольку при введении безразмерной частоты в качестве масштаба скорости выбрана скорость сдвиговой волны в материале цилиндрической оболочки, частота запираия низшей распространяющейся волны в акустическом волноводе с мягкими стенками принимает следующие значения: для составного волновода сталь–вода с $r_1=0.9$ – $\gamma_{f1}=1.25$, для волновода ПХВ–вода – $\gamma_{f1}=4.71$, для волновода жесткая резина–вода – $\gamma_{f1}=6.77$ и для волновода мягкая резина–вода – $\gamma_{f1}=55.66$.

Анализ дисперсионных кривых на приведенных

рисунках важен, прежде всего, с точки зрения оценки эффектов взаимодействия волновых движений в жидкости и упругой оболочке при формировании нормальной волны составного волновода. Если обратиться к случаю относительно жесткого цилиндра (случай сталь–вода [4]), то можно отметить следующее важное свойство нормальных волн: взаимодействие между волновыми движениями заметно только в очень узких частотных диапазонах, отвечающих окрестностям точек пересечения дисперсионных кривых для парциальных подсистем. Это справедливо даже для очень тонких стальных цилиндров. В случае податливых цилиндров картина взаимодействия принципиально меняется.

Рассмотрим вначале представленные на рис. 1, а данные, соответствующие случаю волновода жесткая резина–вода с толстостенным упругим цилиндром ($r_1=0.3$). Здесь приведены первые три дисперсионные кривые пустого цилиндра (сплошные) и четыре дисперсионные кривые составного волновода (штриховые). Отметим, что частота запираания первой нормальной волны акустического волновода с мягкими стенками существенно выше верхней границы рассматриваемого диапазона и равна $\gamma_{f1}=20.31$.

При анализе графика рис. 1, а прежде всего, обратим внимание на принципиальное отличие в проявлении взаимодействия волновых движений для податливого цилиндра и для случая жесткого цилиндра [4, рис. 1, б], изученного ранее. Эффекты взаимодействия для податливого цилиндра существенны для всех значений частоты (постоянной распространения). Наличие жидкости приводит к снижению фазовых скоростей всех нормальных волн. Интересно, что частота запираания второй нормальной волны уменьшается до нуля. Частота запираания третьей (сдвиговой) нормальной волны, естественно, не изменяется, однако замечательной ее особенностью в составном волноводе является возникновение обратной волны (движения с разными знаками групповой и фазовой скоростей). Можно сказать, что наличие жидкости выражается через эффект присоединенной массы, а ее динамические свойства в этом диапазоне не проявляются. Анализ кинематических и энергетических характеристик нормальных волн будет проведен ниже.

Обратимся к данным о дисперсионных характеристиках нормальных волн в составном тонкостенном волноводе ($r_1=0.9$) из тех же материалов (жесткая резина–вода). На рис. 1, б приведены первые две дисперсионные кривые пустого цилиндра (сплошные линии), первая дисперсионная кри-

вая акустического волновода с мягкими стенками (тонкая штриховая) и три дисперсионные кривые составного волновода (жирные штриховые). Частоты запираания для третьей нормальной волны пустого цилиндра ($\gamma_2=31.43$) находятся вне рассматриваемого диапазона.

Существенное изменение податливости цилиндра за счет уменьшения толщины стенки обуславливает некоторые специфические черты взаимодействия волновых движений. Что касается первой нормальной волны составного волновода, то ее дисперсионные свойства подобны свойствам волны в толстостенном цилиндре (кривая 1 на рис. 1, а). Эффект присоединенной массы здесь выражен сильнее. Для второй нормальной волны также наблюдается снижение частоты запираания до нуля, однако для более высоких частот эффект присоединенной массы практически не наблюдается. Что касается третьей нормальной волны, то она существенно связана с волновым движением в жидкости и здесь наличие упругого цилиндра обуславливает появление некоторой присоединенной массы. Перечисленные свойства нормальных волн остаются неизменными при замене в упругом цилиндре жесткой резины на мягкую.

В целом можно отметить, что влияние высокой податливости цилиндра, обусловленной геометрическим фактором тонкостенности, является определяющим. При некотором увеличении, по сравнению с резиной, жесткости тонкостенного цилиндра за счет использования такого материала как ПВХ дисперсионные свойства низших нормальных волн составного волновода практически не меняются (рис. 2). При уменьшении толщины r_1 с 0.9 до 0.99 аналогичным становится поведение нормальных волн в волноводе сталь–вода (см. [4, рис. 2, б]).

Характерной особенностью составного волновода является наличие двух нормальных волн, частота запираания которых равна нулю. Данные об их дисперсионных свойствах представлены на рис. 3. При изменении толщины цилиндра эти волны ведут себя по-разному. Одна из них (имеющая, как правило, более низкую фазовую скорость) характеризуется общей тенденцией снижения фазовой скорости с уменьшением толщины. Поскольку влияние взаимодействия с жидкостью для этой волны имеет характер присоединенной массы, такое поведение представляется естественным. Вторая нормальная волна существенно связана с волновыми движениями в упругом цилиндре. Об этом свидетельствует то обстоятельство, что в предельном случае низких частот эта волна всегда имеет фазовую скорость, равную скоро-

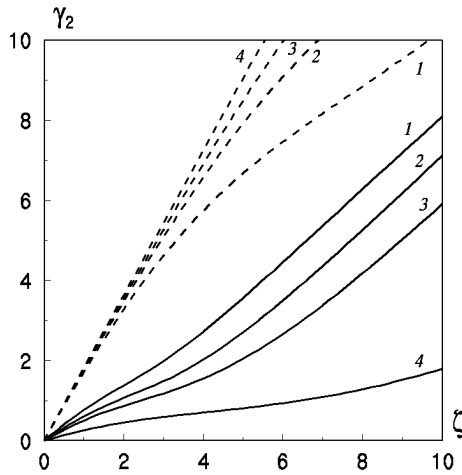


Рис. 3. Изменение дисперсионных свойств первых двух нормальных волн в составном волноводе жесткая резина – вода при изменении внутреннего радиуса цилиндра:

1 – $r_1 = 0.5$, 2 – $r_1 = 0.7$, 3 – $r_1 = 0.8$, 4 – $r_1 = 0.95$;
сплошные – низшие волны, штриховые – вторые волны

Табл. 2. Значения фазовой скорости низшей волны в зависимости от значения r_1 для низких частот

r_1	ЖЕСТКАЯ РЕЗИНА		СТАЛЬ
	C_1/C	C_p/C	C_p/C
0.8	0.2129	0.2133	0.950
0.9	0.1536	0.1529	0.906
0.95	0.1092	0.1088	0.833
0.99	0.0490	0.0488	0.559

сти стержневой волны в пустом упругом цилиндре и возрастающую с уменьшением толщины цилиндра.

Наклоны дисперсионных кривых первой нормальной волны на рис. 3 в окрестности начала координат хорошо аппроксимируются формулой, полученной Кортвегом [11, с. 393], позволяющей получать значения фазовой скорости в области частот, для которых длина волны в несколько раз превосходит радиус цилиндра:

$$\frac{C_1}{C} = \left[1 + \frac{\frac{2R_1}{h} \frac{\rho_0 C^2}{E}}{1 - \frac{5}{3} \frac{R_1}{h}} \right]^{-1/2} \quad (6)$$

Здесь C_1 – фазовая скорость волны Кортвега; h – толщина стенки цилиндра; E – модуль упругости материала цилиндра. Согласно уравнению (6), для малых частот эффект упруго-жидкостного взаимодействия связан только с упругостью цилин-

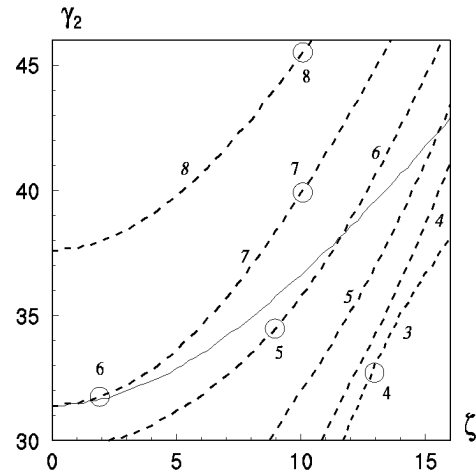


Рис. 4. Дисперсионные кривые нормальных волн в волноводе жесткая резина – вода с $r_1 = 0.9$ (вещественные ветви) для высоких частот

дра. Значение плотности материала цилиндра не существенно. В табл. 2 приведены значения C_1/C , C_p/C для составного волновода жесткая резина – вода и C_p/C для волновода сталь – вода в зависимости от значения величины r_1 . Здесь C_p/C – значение фазовой скорости низшей нормальной волны, полученное при решении задачи на основе уравнений теории упругости. Из приведенных в табл. 2 данных следует, что в случае цилиндра из податливого материала фазовая скорость низшей нормальной волны значительно меньше скорости звука в жидкости, чем для цилиндра из жесткого материала.

Зоны плоскости (ζ, γ_2) , в которых пересекаются дисперсионные кривые различных парциальных подсистем, в случае жестких материалов упругих цилиндров были интересны с точки зрения прояснения особенностей упруго-жидкостного взаимодействия [4]. Проведенный выше анализ показал определенную полезность выделения парциальных подсистем и при наличии податливых цилиндров. Однако в этом случае зоны пересечения уже не являются столь наглядными для интерпретации результатов расчета. Об этом свидетельствуют данные о дисперсионных свойствах нормальных волн высоких порядков для области очень высоких частот, приведенные на рис. 4 (физические свойства материалов и геометрия волновода те же, что и в расчетах, проведенных при построении графиков рис. 1, б). Только в этой области можно наблюдать пересечение дисперсионных кривых парциальных подсистем в случаях тонких податливых цилиндров.

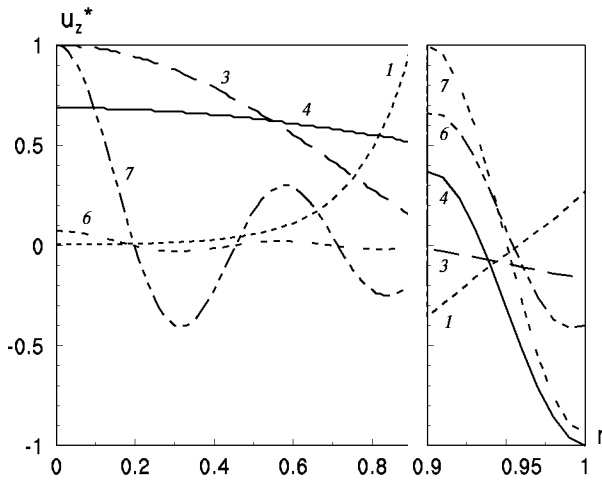


Рис. 5. Распределение по радиусу нормированных амплитуд осевых смещений для нормальных волн волновода жесткая резина–вода с $r_1=0.9$

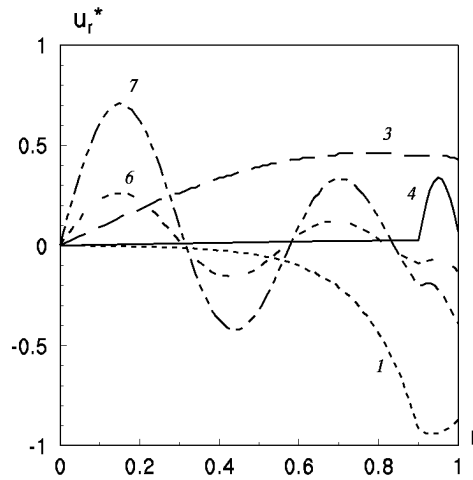


Рис. 6. Распределение по радиусу нормированных амплитуд радиальных смещений для нормальных волн волновода жесткая резина–вода с $r_1=0.9$

На рис. 4 штриховыми линиями показаны дисперсионные кривые нормальных волн составного волновода, имеющих номера 3–8. Здесь же приведена третья дисперсионная кривая для полого упругого цилиндра (сплошная), частота запираия которой равна $\gamma_2=31.43$. В диапазоне $0 \leq \gamma_2 \leq 48$ частоты запираия дисперсионных кривых составного волновода имеют следующие значения: 6.07, 13.84, 21.72, 29.66, 31.43, 37.64 и 45.55. Частоты запираия дисперсионных кривых для акустического волновода с мягкими стенками равны 6.71, 15.54, 24.36, 33.20 и 42.04, для волновода с жесткими стенками – 10.79, 19.75, 28.64, 37.51 и 46.37.

Из приведенных результатов следует, что частоты запираия дисперсионных кривых составного волновода с повышением порядкового номера удаляются от частот запираия дисперсионных кривых акустического волновода с мягкими стенками и приближаются к частотам запираия волновода с жесткими стенками. Так, уже восьмая дисперсионная кривая составного волновода в окрестности частоты запираия весьма близка к четвертой дисперсионной кривой акустического волновода с жесткими стенками. Отметим также, что вблизи точек пересечения дисперсионной кривой для сплошного цилиндра и дисперсионных кривых для составного волновода никаких особых эффектов взаимодействия не наблюдается. В процессе анализа свойств составных волноводов, содержащих податливые цилиндры, были выполнены расчеты для различных сочетаний геометрических и физических параметров. Полу-

ченные результаты дают достаточные основания для вывода о значительно меньшей эффективности, по сравнению со случаем жесткого цилиндра, методики выделения парциальных подсистем при анализе эффектов волнового взаимодействия в составных волноводах с податливыми стенками.

3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВОЛН

Данные о дисперсионных свойствах нормальных волн лишь частично раскрывают особенности волновых движений в составных волноводах. Дополнительные сведения об этом можно получить при анализе кинематических и энергетических характеристик распространяющихся волн. Эти характеристики будут вычислены для некоторых фиксированных значений частоты и постоянной распространения. Соответствующие точки показаны на рис. 1 и 4.

На рис. 5 и 6 показаны распределения по радиусу волновода осевых и радиальных смещений в нормальных волнах для случая жесткая резина–вода при $r_1=0.9$. Амплитуды смещений нормированы к максимальному смещению для каждой волны: $u_z^* = u_z/|u_{z \max}|$, $u_r^* = u_r/|u_{z \max}|$. Номера кривых на рис. 5 и 6 соответствуют номерам точек на дисперсионных кривых, отмеченных кружочками на рис. 1, б и 4. Представленные данные относятся как к области относительно низких частот $0 \leq \gamma_2 \leq 10$ (кривые 1, 3), так и к области высоких частот $30 \leq \gamma_2 \leq 46$ (кривые 4, 6, 7). Для

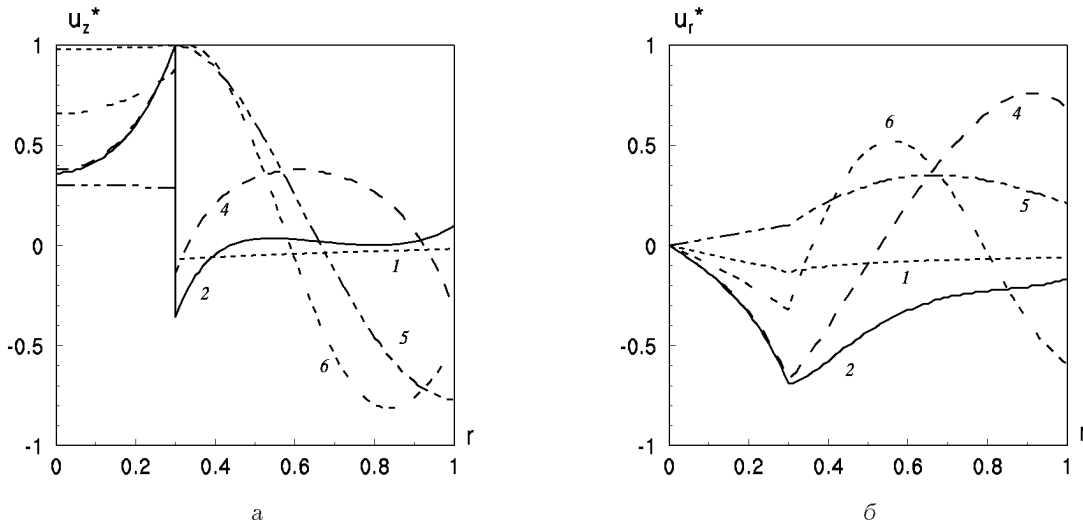


Рис. 7. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений для нормальных волн толстостенного волновода жесткая резина–вода с $r_1=0.3$ (вычисления выполнены для точек 1–6 с рис. 1, а):

а – осевые смещения б – радиальные смещения

частот $0 \leq \gamma_2 \leq 10$ характер изменения по радиусу волновода осевых и радиальных смещений практически такой же, как и для составного тонкостенного волновода из жесткого материала [4]. Смещения в жидкости для нижней нормальной волны (кривые 1) характеризуются локализацией зоны интенсивных движений вблизи поверхности контакта жидкости и цилиндра, что характерно для поверхностной волны Стоунли. Точке 2 (см. рис. 1, б) соответствует практически стержневая упругая волна (она не показана на рисунке). Третья нормальная волна составного волновода генетически связана с волной в жидком ядре, однако в волноводе из податливого материала осевые смещения в цилиндре заметно превосходят смещения в волноводе из более жесткого материала. Это характерно для проявления взаимодействия волн в случае оболочки из податливых материалов.

При анализе волновых движений в области высоких частот $30 \leq \gamma_2 \leq 46$ мы ограничиваемся лишь движениями с относительно большой длиной волны, т.е. рассматриваем нормальные волны, дисперсионные кривые которых расположены в области между осью частот и прямой OC . Из приведенных данных выделим, прежде всего, те, которые соответствуют точке 4 на рис. 4. Указанная точка находится практически на прямой OC , что определяет особенность кинематики соответствующей нормальной волны. Несмотря на довольно высокую частоту, распределение осевых смещений в жидкости почти равномерно. При этом радиаль-

ные смещения пренебрежимо малы. Здесь в жидкости распространяется практически плоская волна. В то же время следует отметить наличие довольно заметных по величине смещений в упругой оболочке.

Для волн, отвечающих точкам 6 и 7 на рис. 4, наблюдается характерная высокая изменчивость кинематических характеристик по радиусу. Однако, несмотря на то, что эти точки расположены на одной дисперсионной кривой, соотношения между амплитудами смещений в жидкости и оболочке существенно отличаются. Движения в волне, соответствующие точке 6, преимущественно сосредоточены в упругой оболочке. Осевые смещения в жидкости практически отсутствуют. Движение в той же волне, но соответствующее точке 7, уже преимущественно сосредоточено в жидкости. Однако и в этом случае осевые смещения в оболочке довольно значительны.

Увеличение толщины цилиндра несколько изменяет свойства нормальных волн. Их кинематические характеристики для цилиндра с внутренним радиусом $r_1=0.3$ приведены на рис. 7. Номера кривых здесь соответствуют номерам точек на рис. 1, а. Рассмотрим свойства нижней нормальной волны. Для частот (постоянных распространения), соответствующих точке 1, движение в нормальной волне является плоской волной в жидкости. Радиальные смещения в жидкости и оба компонента смещений в оболочке практически отсутствуют. Фазовая скорость такой плоской вол-

Табл. 3. Относительное распределение энергии по поперечному сечению жидкого ядра и упругого цилиндра

ТОЧКА	ζ	γ_2	W_0/W_z	W_1/W_0	$ u_{z\max}^c / u_{z\max}^f $
1	8	2.377	0.172	4.831	1.19
2	5	8.902	0.015	65.22	9.17
3	3	9.699	0.996	0.0043	0.17
4	13	33.072	0.911	0.0973	0.43
5	9	34.521	0.729	0.370	1.06
6	2	31.775	0.107	8.33	13.7
7	10	39.859	0.769	0.300	0.66
8	10	45.433	0.854	0.170	0.43

ны составляет 0.36 скорости звука в жидкостной среде.

Увеличение частоты (переход к точке 2) усложняет структуру волны. Осевые смещения в цилиндре остаются незначительными, однако возрастают радиальные, а в распределении осевых перемещений наблюдается значительная неравномерность. Для этой нормальной волны характерно наличие существенного разрыва в значениях осевых смещений точек жидкости и цилиндра на поверхности контакта. Такой разрыв не противоречит принятой модели сред и указывает на возможность резкого изменения свойств нормальной волны при наличии даже малой вязкости.

Движение в волне, отвечающей точке 3, является, по-сути, стержневой волной в цилиндре, для которой отличны от нуля только осевые смещения в цилиндре (на рис. 7 данные о ее свойствах не приведены). При переходе к точке 4 обнаруживается интересный факт: соответствующее ей движение в жидкости полностью совпадает с движением в нижней нормальной волне для точки 2. Движения же в упругом цилиндре отличаются существенно как по характеру радиального распределения, так и по величине.

Кинематические характеристики третьей нормальной волны в волноводе рассматриваются для двух точек 5 и 6 (см. рис. 1, а). Определенный интерес представляет точка 5, расположенная на участке дисперсионной кривой, соответствующему, так называемой, обратной волне. Как видно, движение в нормальной волне сосредоточено, преимущественно, в упругом цилиндре. Радиальные и осевые смещения в жидкости относительно малы. Интересно, что движение в жидком ядре является практически плоской волной. По распределению осевых смещений в цилиндре можно сделать вывод о преобладании изгибных деформаций с довольно значительным уровнем радиальных смеще-

ний, что обусловлено существенной толщиной цилиндра. В точке 6 движение в жидком ядре перестает быть плоским. Усложняется также кинематика волны в цилиндре за счет проявления эффектов пространственного деформирования.

Приведенные данные указывают на сложный характер взаимодействия волновых движений в жидкости и в цилиндре из податливого материала. Существенно меняются свойства нормальных волн одного порядка при изменении частоты (постоянной распространения). Движение становится особенно сильно связанным в случае тонкостенных оболочек, когда податливость, обусловленная физическими свойствами материала, усиливается за счет геометрического фактора.

Этот вывод о характере формирования волновых движений в составном волноводе из податливого материала подтверждается анализом энергетических характеристик нормальных волн. Общий поток энергии через поперечное сечение волновода W_z состоит из суммы потоков энергии в жидком ядре W_0 и упругом цилиндре W_1 :

$$W_z = W_0 + W_1.$$

Значения этих величин, согласно [4], определяем из выражений

$$W_0 = \frac{\omega\pi}{2} D^2 \zeta \frac{\rho_0}{\rho_1} \left(\frac{C_0}{V_S} \right)^2 \int_0^{r_1} J_0^2(\chi r) r dr, \quad (7)$$

$$W_1 = \omega h D^2 \int_{r_1}^1 (-\sigma_{zz} U_z + \sigma_{rz} U_r) r dr.$$

В табл. 3 приведены отношения величины потока энергии в жидком ядре к полному потоку энергии в нормальной волне W_0/W_z , а также величин потоков энергии в упругом цилиндре и жидком

ядре W_1/W_0 . Данные об энергетических характеристиках нормальных волн дополняются некоторыми кинематическими характеристиками, дающими дополнительную важную информацию о взаимодействии волновых движений в составном волноводе. Этими характеристиками являются отношения модулей максимальных осевых смещений в цилиндре и жидком ядре для точек, выделенных на рис. 1, б и 4.

Из приведенных данных видно, что распространяющиеся волны, соответствующие точкам 2 и 6 дисперсионных кривых составного волновода, можно классифицировать как упругие. Для них фазовая скорость связанной волны близка к фазовой скорости волны пустого цилиндра. Однако между этими волнами имеется существенное отличие. Нормальная волна, соответствующая точке 2, практически всю энергию переносит в упругой части волновода, а нормальная волна, соответствующая точке 6, около 11 % всей энергии переносит в жидком ядре. По мере удаления дисперсионной кривой составного волновода от дисперсионной кривой пустого цилиндра количество энергии, переносимой жидким ядром, заметно увеличивается. Связанная волна, соответствующая точке с $\zeta=4$, $\gamma_2=32.83$ для этой дисперсионной кривой, переносит в жидкости уже 34 % всей энергии.

Распространяющиеся волны, соответствующие точкам 3, 4 и 8, по данным табл. 3 можно рассматривать как жидкостные. Однако только нормальная волна, отвечающая точке 3, переносит практически всю энергию в жидком ядре. Нормальные волны, соответствующие точкам 4 и 8, переносят соответственно около 9 и 15 % энергии в упругой части волновода. При этом фазовая скорость связанной волны в точках 4 и 8 весьма близка к фазовой скорости нормальной волны акустического волновода с жесткой стенкой. В то же время, фазовая скорость связанной волны в точке 3 значительно отличается от фазовой скорости нормальной волны акустического волновода с мягкой стенкой. Точки 1, 5 и 7 расположены на тех участках дисперсионных кривых, которые значительно удалены от дисперсионных кривых парциальных подсистем. Естественно, что этим точкам соответствуют волны, для которых существенны эффекты связанности упругих и жидкостных движений. В этом случае фазовая скорость связанной волны заметно отличается от фазовых скоростей парциальных упругой и жидкостной волн. Точке 1 низшей дисперсионной кривой составного волновода соответствует поверхностная волна, также характеризующаяся существенной связанностью упругих и жидкостных движений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены данные о свойствах нормальных волн в упруго-жидкостном цилиндрическом волноводе с податливыми стенками. Характерной особенностью рассматриваемого волновода является то, что волновые сопротивления материалов упругой оболочки и заполняющей жидкости довольно близки. В этом случае формирование общего волнового движения в составном волноводе происходит на фоне сильного взаимодействия волновых движений в цилиндре и жидком ядре. Анализ дисперсионных характеристик, кинематических и энергетических свойств, а также фазовых скоростей нормальных волн выявил количественные и качественные эффекты взаимодействия упругих и жидкостных волновых движений при изменении геометрических параметров и частоты волны в широком диапазоне значений.

Проведенный анализ показывает, что в рассматриваемом случае составного волновода не удается использовать общий подход к систематизации результатов, основанный на выделении парциальных подсистем, показавший свою эффективность в случае относительно жесткого цилиндра [2, 4]. Особый интерес при изучении свойств волновода представляет низшая нормальная волна, фазовая скорость которой для низких частот довольно точно определяется формулой Кортевега [11]. Эта формула, отражающая влияние упругости оболочки на фазовую скорость нормальной волны, в равной мере пригодна для цилиндров из жестких и податливых материалов. Однако в случае податливых цилиндров фазовая скорость низшей нормальной волны оказывается существенно ниже скорости звука в жидкой среде. Кроме того, кинематические свойства плоской волны сохраняются лишь для более низких значений частоты. Следует также отметить существенное влияние податливости материала цилиндра на снижение фазовой скорости низшей волны. Если для относительно толстых цилиндров ($r_1=0.8$) ее фазовая скорость для волновода с податливыми стенками лишь в несколько раз меньше, чем для волновода с жесткими стенками, то для тонкостенных волноводов эти две скорости отличаются на порядок. При этом в случае тонкостенных цилиндров, независимо от свойств материалов, в диапазоне высоких частот низшая нормальная волна является волной Стоунли.

В случае волноводов с податливыми стенками эффекты волнового взаимодействия между возмущениями в жидкости и упругом цилиндре существенны для всех частот. Исключение составля-

ют лишь очень узкие частотные интервалы вблизи частот запертия для сдвиговых волн в упругом цилиндре. Наличие взаимодействия, прежде всего, выражается в характере распределения по радиусу компонент вектора смещений. Вместе с тем, распределение потока энергии по поперечному сечению волновода указывает на существование частотных диапазонов, в которых наблюдается концентрация энергии волны либо в жидком ядре, либо в цилиндрической оболочке.

1. Жуковский Н. Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах // Полное собр. соч.: том 7.– М.-Л.: ОНТИ, 1937.– С. 58–151.
2. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Распространение волн в полой упругой цилиндрической оболочке с жидкостью // Прикл. мех.– 1984.– **20**, N 1.– С. 21–26.
3. Комиссарова Г. Л. К решению задачи о распространении волн в цилиндре с жидкостью // Прикл. мех.– 1990.– **26**, N 8.– С. 25–29.
4. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Свойства нормальных волн в упруго-жидкостных цилиндрических волноводах // Акуст. вісн.– 2000.– **3**, N 3.– С. 44–55.
5. Fuller C. R., Fahy F. J. Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elastic shells filled with fluid // J. Sound Vib.– 1982.– **81**, N 4.– P. 501–518.
6. Laffeur L. D., Shields F. D. Low-frequency propagation modes in a liquid-filled elastic tube waveguide // J. Acoust. Soc. Amer.– 1995.– **97**, N 3.– P. 1435–1445.
7. Berliner M. J., Solecki R. Wave propagation in fluid-loaded, transversely isotropic cylinders. Part I. Analytical formulation // J. Acoust. Soc. Amer.– 1996.– **99**, N 4, Pt. I.– P. 1841–1847.
8. Berliner M. J., Solecki R. Wave propagation in fluid-loaded, transversely isotropic cylinders. Part II. Numerical results // J. Acoust. Soc. Amer.– 1996.– **99**, N 4, Pt. I.– P. 1848–1853.
9. Thurston R. N. Elastic waves in rod and clad rods J. Acoust. Soc. Amer. 1978 **64**, N 11–37
10. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Особенности динамического деформирования полого цилиндра // Прикл. мех.– 1986.– **22**, N 1.– С. 3–8.
11. Бергман Л. Ультразвук.– М.: ИИЛ, 1957.– 726 с.