

УДК 539.1

## ПРОНИКНОВЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ В СЖИМАЕМУЮ НЕОДНОРОДНУЮ ЖИДКОСТЬ

А. Г. БАГДОЕВ, С. Г. СААКЯН

*Институт механики НАН Армении, Ереван**Получено 24.01.1999 ◊ Пересмотрено 2.07.2001*

Развит метод последовательных приближений для решения смешанных граничных задач, возникающих при моделировании процесса распространения возмущений в идеальной неоднородной жидкости. Рассмотрена двумерная задача с переменной во времени частью границы, на которой приложены внешние воздействия. Конкретные выкладки проведены для случая неоднородной по глубине жидкости с экспоненциальным изменением плотности. Построены решения в двух приближениях относительно малого параметра, связанного с показателем экспоненты. Решение представлено в виде квадратур. Проведен асимптотический анализ решений для оценки характера поведения давления и скорости частиц жидкости вблизи края площадки нагружения. Показано влияние неоднородности на физические характеристики волнового процесса.

Розвинуто метод послідовних наближень для розв'язання змішаних граничних задач, що виникають при моделюванні процесу розповсюдження збурень в ідеальній неоднорідній рідині. Розглянуті двовимірні задачі зі змінною в часі скінченною частиною поверхні, до якої прикладено зовнішні зусилля. Конкретні розв'язки наведено для випадку неоднорідної по глибині рідини з експоненціальною зміною густини. Побудовані розв'язки з точністю до двох наближень відносно малого параметру, пов'язаного з показником експоненти. Розв'язки представлені у вигляді квадратур. Проведено асимптотичний аналіз розв'язків з метою визначення характеру поведінки функції тиску та швидкості частинок рідини поблизу границі області, до якої прикладено зовнішнє навантаження. Показано вплив неоднорідності рідини на вказані характеристики хвильового процесу.

A method of successive approximations for the solution of mixed boundary problems, arising at modeling of the disturbances propagation process in ideal non-uniform liquid, is developed. The two-dimensional problems are considered with changing in time boundary part, where the external forces are applied. The numerical examples are derived for case of liquid that is non-uniform on depth with exponential change of density. The solution in two approximations with respect to a small parameter related with the non-homogeneity parameter are developed. The solutions are given in form of integrals. Asymptotic analysis of the solutions is carried out to study specific features of the pressure and liquid particle velocity distribution near edges of a loaded area. The influence of a non-homogeneity on specified physical characteristics of the wave process is shown.

### ВВЕДЕНИЕ

Изучение закономерностей распространения возмущений в сжимаемой жидкости стимулируется большим количеством прикладных задач. Значительный интерес представляет случай генерации возмущений в процессе удара тела о воду [1–3]. При этом важную роль играют различные факторы, включая форму тела, его инерционные свойства и начальную скорость. Среди них одними из важнейших являются изменение во времени площадки контакта, величины контактных нагрузок и свойств жидкости по глубине. Эти факторы предопределяют сложности в математическом моделировании процесса распространения возмущений внутри жидкости. Именно разработке математического аппарата для описания этого процесса и посвящена данная работа.

Рассматривается двумерная задача о проникании в неоднородную по глубине жидкость фронта возмущений, вызванных нестационарной нагрузкой на поверхности. С течением времени изменяется не только величина нагрузки, но и размер

площадки нагружения. Вне области приложения давления предполагается наличие жесткой крышки, препятствующей движению жидкости в направлении нормали к поверхности. Такие ограничения могут частично моделировать случай наличия ледового покрова в натуральных условиях. Скорость расширения площадки нагружения в начале процесса считается сверхзвуковой с последующим уменьшением до дозвуковых значений.

Рассмотрено решение для тех моментов времени, когда скорость фронта является дозвуковой с произвольным законом изменения во времени. Полученная смешанная краевая задача решается методами интегральных уравнений и свертки [4–8].

Учет влияния неоднородности жидкости проведен в рамках традиционных подходов теории возмущений. В приближении первого порядка относительно параметра неоднородности получены значения для давления (потенциала) на поверхности вне площадки нагружения и нормальной к границе скорости частиц на поверхности этой площадки.

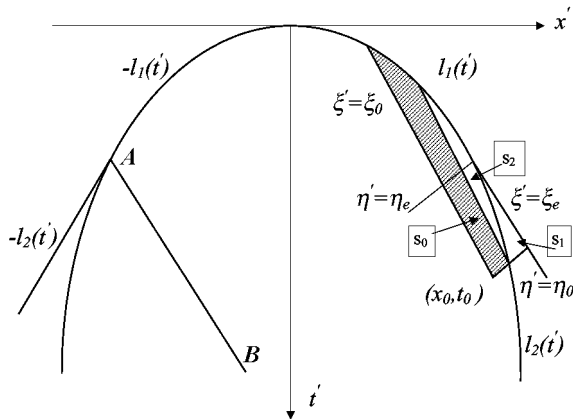


Рисунок. Картина характеристик в задаче о распространении давления в сжимаемую жидкость

### 1. ФОРМУЛИРОВКА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается двумерная задача о распространении возмущений в идеальной сжимаемой жидкости, генерируемых изменением давления на поверхности. Жидкость заполняет нижнюю полуплоскость. Ось  $x$  совпадает с невозмущенной границей жидкости, а ось  $y$  направлена вертикально вниз. Жидкость предполагается неоднородной с заданной функцией изменения плотности по глубине  $\rho = \rho(y)$ .

Из линейных уравнений движения жидкости можно получить для возмущенного давления  $p$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) - a^2 \frac{\partial p}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right), \quad (1)$$

где  $a = \text{const}$  – скорость звука, вычисленная по значению плотности на поверхности;  $t$  – время. В последующих выкладках удобно вместо давления  $p$  использовать функцию, аналогичную потенциалу скоростей частиц жидкости  $\varphi$ :

$$p = -\rho(0) \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (2)$$

Очевидно, что эта функция также удовлетворяет уравнению (1). Используя уравнение движения

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y},$$

можно получить для нормальной к поверхности скорости частицы следующее выражение:

$$v_y = \frac{\rho(0)}{\rho(y)} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (3)$$

При рассмотрении экспоненциального закона изменения плотности

$$\rho(y) = \rho(0)e^{ky}$$

из равенства (3) следует соотношение для определения скорости на поверхности  $y = 0$ :

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (4)$$

Введением новой искомой функции  $\phi = \varphi e^{-ky/2}$  из уравнения (1) находим

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \frac{a^2 k^2}{4} \phi. \quad (5)$$

При этом нормальная компонента скорости вычисляется по формуле

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{k}{2} \phi.$$

Обозначая длину площадки нагружения как  $2l(t)$ , граничные условия на поверхности  $y = 0$  представим в виде

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1(x, t), & |x| < l(t), \\ v &= 0, & |x| > l(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Хотя в задаче проникания имеют место две точки раздела граничных условий  $x = \pm l(t)$ , в работе рассмотрены лишь те моменты времени, когда отсутствует взаимное влияние возмущений на краях площадки нагружения. Точнее, предполагается, что имеются дозвуковой ( $dl(t)/dt < a$  при  $t > t_0$ ) и сверхзвуковой ( $dl(t)/dt > a$  при  $t < t_0$ ) режимы изменения длины площадки нагружения. Для второго случая полагаем  $l(t) = l_1(t)$ , а для первого –  $l = l_2(t)$ .

Как видно из рисунка, на характеристики поля вблизи  $x = l_2(t)$  может влиять сверхзвуковая часть возмущений в окрестности кривой  $x = -l_1(t)$ . Отметим, что в этом случае решение, которое будет получено ниже, сохраняет физический смысл. Оно справедливо всюду правее характеристики  $AB$ . Рассмотрим моменты времени  $t > t_0$  и точки  $x, t$  в плоскости  $(x', t')$ , для которых характеристики пересекают дозвуковую часть фронта, а именно,  $x = l_2(t)$ . При  $k = 0$  (т.е. для однородной жидкости) решение данной задачи совпадает с решением задачи о крыле [8].

Для произвольного показателя экспоненты  $k$  задача может быть решена методом свертки [4, 7],

однако получаемые при этом квадратуры довольно сложны, что затрудняет физический анализ решения. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать случай, когда параметры жидкости таковы, что величина  $ka$  мала. Анализ волнового поля проведем, принимая во внимание лишь бесконечно малые первого порядка. Тогда в уравнении (4) можно опустить слагаемое с  $k^2 a^2$  и использовать для определения функции  $v$  уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (7)$$

В таком приближении возмущающее влияние неоднородности сохраняется только в граничных условиях при  $y=0$ , которые принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= f(x, t) + \frac{k}{2}v, & x < l_2(t), \\ v &= 0, & x > l_2(t), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}, \\ \phi_1(x, t) &= -\frac{1}{\rho(0)} \int_{F(x)}^t p_1(x, t') dt'. \end{aligned}$$

Здесь функция  $p_1(x, t')$  – заданное давление на границе. Таким образом, для функции  $v$  граничная задача аналогична антиплоской задаче о трещине в изотропной упругой среде [4-7]. Влияние неоднородности жидкости несколько усложнило граничное условие за счет связи значений искомой функции и ее нормальной производной.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ ЖИДКОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ НАГРУЖЕНИЯ

Решение уравнения (7) при граничных условиях (8) можно искать методом, описанным в [6-8]. Согласно [8], для искомой функции при  $y=0$  можно записать интеграл Поиссо

$$\begin{aligned} v &= -\frac{a}{\pi} \iint \frac{(\partial v / \partial y)_{y=0}}{\sqrt{T}} dx' dt', \\ T &= a^2(t - t')^2 - (x - x')^2, \end{aligned} \quad (9)$$

где, исходя из граничных условий (8), при  $x < l_2(t)$  справедливо

$$\left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0} = f(x', t') + \frac{k}{2}v(x', t'). \quad (10)$$

При этом интегрирование в соотношении (9), исходя из рассуждений, приведенных в [5, 8], в которых рассмотрены аналогичные задачи о трещине и крыле в характеристических координатах

$$\begin{aligned} \xi' &= at' - x', & \eta' &= at' + x', \\ \xi_0 &= at - x, & \eta_0 &= at + x, \end{aligned} \quad (11)$$

должно вестись по заштрихованной области  $s_0$  (см. рисунок), в пределах

$$\xi_a(\eta_0) < \xi' < \xi_0, \quad \eta_1(\xi') < \eta' < \eta_0. \quad (12)$$

Здесь значение  $\xi_a$  соответствует точке пересечения характеристики  $\eta' = \eta_0 = at_2 + l_2(t_2)$  с кривой  $x' = l_2(t')$ :

$$\xi_a(\eta_0) = at_2 - l(t_2), \quad at + x = at_2 + l_2(t_2), \quad (13)$$

а  $\eta' = \eta_1(\xi')$  – пересечению характеристики  $\xi' = at_1 - x_1$  с кривой  $x_1 = l_1(t_1)$ :

$$\eta_1(\xi') = l_1(t_1) + at_1, \quad \xi' = at_1 - l_1(t_1). \quad (14)$$

То, что интегрирование в соотношении (9) следует проводить по области  $s_0$ , вытекает из граничного условия  $v=0$  при  $x > l_2(t)$  [5, 8]. При этом, обозначая

$$\left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0} = \tau_1(\xi', \eta'),$$

можно получить следующее равенство:

$$\int_{\eta_1(\xi')}^{\eta_2(\xi')} \frac{\tau_1(\xi', \eta')}{\sqrt{\eta_0 - \eta'}} d\eta' + \int_{\eta_2(\xi')}^{\eta_0} \frac{\tau_1(\xi', \eta')}{\sqrt{\eta_0 - \eta'}} d\eta' = 0, \quad (15)$$

где

$$\eta_2(\xi') = l_2(t'_2) + at'_2, \quad l_2(t'_2) - at'_2 = \xi'. \quad (16)$$

Отсюда следует, что отличным от нуля в выражении (9) будет лишь вклад интеграла по области  $s_0$ . Аналогичное заключение было получено в [5] для случая  $t_1=0, k=0$  и в [8] для  $k=0$ .

Проведя интегрирование в формуле (9) аналогично [8], с учетом условия (10) получим при  $x < l_2(t)$  интегральное уравнение для скорости частиц на площадке нагружения

$$V(\xi_0, \eta_0) = v(x', t'),$$

$$\begin{aligned} V_-(\xi_0, \eta_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_a(\eta_0)}^{\xi_0} \frac{d\xi'}{\sqrt{\xi_0 - \xi'}} \times \\ &\times \int_{\eta_1(\xi')}^{\eta_0} \frac{f_1(\xi', \eta') + kV_-(\xi', \eta')/2}{\sqrt{\eta_0 - \eta'}} d\eta', \end{aligned} \quad (17)$$

где  $f_1(\xi', \eta') = f(x', t')$ . Индекс “минус” указывает на то, что функция обращается в нуль при  $x > l_2(t)$ . В случае однородной жидкости  $k=0$  из соотношения (17) получаем следующее решение:

$$V_-^0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_a(\eta_0)}^{\xi_0} \frac{d\xi'}{\sqrt{\xi_0 - \xi'}} \int_{\eta_1(\xi')}^{\eta_0} \frac{f_1(\xi', \eta')}{\sqrt{\eta_0 - \eta'}} d\eta'. \quad (18)$$

В приближении первого порядка относительно  $k$  из интеграла (17) получим замкнутое решение для  $v$ , причем под знаком интеграла следует положить  $V_-(\xi', \eta') = V_-^0(\xi', \eta')$ , где значение скорости в нулевом приближении дается формулой

$$\begin{aligned} V_-(\xi', \eta') &\approx V_-^0(\xi', \eta') = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_a(\eta')}^{\xi'} \frac{d\xi''}{\sqrt{\xi' - \xi''}} \int_{\eta_1(\xi'')}^{\eta'} \frac{f_1(\xi'', \eta'')}{\sqrt{\eta' - \eta''}} d\eta''. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь область интегрирования ограничена характеристиками  $\eta'' = \eta'$ ,  $\xi'' = \xi'$ ,  $\xi'' = \xi_a(\eta')$ , где

$$\begin{aligned} \xi_a(\eta') &= at'_3 - l_2(t'_3), \quad \eta' = at'_3 + l_2(t'_3), \\ \eta_1(\xi'') &= l_1(t'_1) + at'_1, \quad \xi'' = at'_1 - l_1(t'_1). \end{aligned}$$

Формула (19) справедлива для точек интегрирования  $(\xi', \eta')$  в (17), для которых характеристика  $\eta'' = \eta'$  пересекает кривую  $x' = l_2(t')$ , т.е. для  $\eta' > \eta_e = l_2(\bar{t}) + c\bar{t}$  (см. рисунок). Для точек  $(\xi', \eta')$ , для которых она пересечет кривую  $x' = l_1(t')$  в области  $x' < l_2(\bar{t})$ , т.е. для  $\eta' < \eta_e$ , в (19) нужно интегрировать по  $\xi''$  в пределах  $\xi_1(\eta') < \xi'' < \xi'$ , где

$$\xi_1(\eta') = c\bar{t}_3 - l_1(\bar{t}_3), \quad \eta' = c\bar{t}_3 + l_1(\bar{t}_3).$$

Таким образом, формула (17) дает для произвольной точки  $(x, t)$ , находящейся правее характеристики  $AB$ , значение  $v_-(x, t) = V_-(\xi_0, \eta_0)$  на участке нагружения, причем для малых  $k$  значение скорости под знаком интеграла  $V_-^0(\xi', \eta')$  определяется выражением (19).

Для  $x \approx l_2(t)$  вновь имеет место соотношение (17), которое можно упростить, приведя при  $x < l_2(t)$  к виду

$$\begin{aligned} v(x, t) &= -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{l(t_2) - x}{1 + \dot{l}_2(t)/a}} \times \\ &\times \int_{l_1(t_1^0)}^x \left\{ f\left(x', t + \frac{x'}{a} - \frac{x}{a}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{k}{2} V_-^0(\xi_0, \xi_0 + 2x') \right\} \frac{dx'}{\sqrt{x - x'}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Полученное решение дает правильную корневую особенность для скорости частиц жидкости на площадке контакта только для граничной функции  $\phi_1(x', t')$ , гладкой в точке  $x' = l_2(t')$ . В случае разрывной по производной функции  $\phi_1(x', t')$  в точке  $x' = l_2(t')$  интеграл (20) приводит к завышенной оценке сингулярности в распределении скоростей частиц при  $x = l_2(t)$ , причем особенность в  $v(x, t)$  обусловлена слагаемым с

$$f(x', t') = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x'^2}.$$

Если использовать это выражение при вычислении скорости, то для слагаемого при нулевой степени  $k$  после интегрирования по частям получаем следующее выражение:

$$v^0(x, t) = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{\phi_1(x', t')}{T^{3/2}} dx' dt'. \quad (21)$$

Для вычисления скорости в точках, близких к краю площадки нагружения  $x \approx l_2(t)$ , после однократного интегрирования получим формулу

$$\begin{aligned} v_-^0(x', t') &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1 + \dot{l}_2(t)/a}}{\sqrt{l_2(t) - x}} \times \\ &\times \int_{l_1(t_1^0)}^x \frac{\phi_1(x', t - x/a + x'/a)}{(x - x')^{3/2}} dx'. \end{aligned} \quad (22)$$

Множитель вне интеграла содержит классическую корневую сингулярность. Отметим, что в случае отличной от нуля функции  $\phi_1(x', t')$  на конце интервала  $x = l_2(t)$  интеграл дает вклад в увеличение сингулярности. Для этого случая нагружения можно получить следующую оценку для поля скоростей:

$$\begin{aligned} v^0 &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1 - \dot{l}_2^2(t)/a^2}{\sqrt{1 + \dot{l}_2(t)/a} (l_2(t) - x)^{3/2}} \times \\ &\times \int_{l_1(t_1^0)}^x \phi_1(x', t - x/a + x'/a) \frac{dx'}{\sqrt{x - x'}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Приведенные оценки относятся только к независящему от показателя неоднородности жидкости первому слагаемому, стоящему в фигурных скобках в общем выражении (20) для скорости под площадкой нагружения. Что касается второго слагаемого, соответствующего первой степени  $k$ , то можно показать, что вблизи  $x = l_2(t)$  в случае граничного условия с ненулевым значением давления в конце интервала оно дает особенность порядка

$$\sqrt{\xi_0 - \xi_a(\eta_0)} \sim \sqrt{-x + l_2(t)}.$$

Таким образом, в старших порядках разложения характер сингулярности в поле скоростей вблизи края площадки нагружения не зависит от  $k$ .

Полученные соотношения справедливы для тех точек  $(x, t)$ , для которых характеристика  $\xi' = \xi_0$  пересекает правую ветвь сверхзвуковой части граничной кривой  $x' = l_1(t')$ . Для тех же точек, для которых она пересечет левую ветвь  $x' = -l_1(t')$ , следует в указанных соотношениях заменить  $l_1(t')$  на  $-l_1(t')$  и вообще считать во всех, в том числе и последующих формулах, что в качестве "передней кромки" следует брать  $x' = -l_1(t')$  [8].

### 3. ЗНАЧЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ВНЕ ФРОНТА ДАВЛЕНИЯ

Другой важной физической характеристикой процесса распространения возмущений в неоднородной жидкости является давление под жестким экраном вне площадки нагружения. Для того, чтобы найти на указанной части границы  $y=0$  значения потенциала, можно применить метод свертки [4,7]. Введем обозначение  $\psi = \partial\phi/\partial y$  и представим две искомые функции в виде

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_+(t, x) + \phi_-(t, x), \\ \psi &= \psi_+(t, x) + \psi_-(t, x).\end{aligned}$$

Определим преобразование Лапласа по времени  $t$  как

$$\phi_L(x, y, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \phi(x, y, t') dt'.$$

Учитывая, что в принятом приближении для искомой функции  $\phi(x, y, t)$  справедливо классическое волновое уравнение (7), для преобразованной по Лапласу функции можно использовать представление

$$\phi_L = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha_1 x - i\beta y} \phi_{LF} d\alpha_1,$$

где  $\phi_{LF}$  – преобразование Фурье от  $\phi_L(x, 0, s)$  по координате  $x$ . При этом для параметра  $\beta$  получаем значение  $\beta = i\sqrt{s^2/a^2 + \alpha_1^2}$ . На границе полуплоскости имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\phi_{LF} &= S_{LF} \psi_{LF}, \\ S_{LF} &= -\frac{1}{\sqrt{s^2/a^2 + \alpha_1^2}}.\end{aligned}\tag{24}$$

Используя известную факторизацию функции  $S_{LF} = S_{LF+} S_{LF-}$  [7],

$$\begin{aligned}S_{LF+} &= \frac{1}{\sqrt{s/a - i\alpha_1}}, \\ S_{LF-} &= -\frac{1}{\sqrt{s/a + i\alpha_1}},\end{aligned}\tag{25}$$

и введя вспомогательные функции  $P_{LF\pm} = 1/S_{LF\pm}$ , можно, аналогично [4,7], получить решения для потенциала вне площадки нагружения и скорости внутри нее:

$$\begin{aligned}\phi_+ &= S_+ ** \{(S_- ** \psi_+ - P_+ ** \phi_-) \times \\ &\quad \times H(x - l_2)\}, \\ \psi_- &= -P_- ** \{(S_- ** \psi_+ - P_+ ** \phi_-) \times \\ &\quad \times H(l_2 - x)\},\end{aligned}\tag{26}$$

где  $H(x)$  – единичная функция Хевисайда;  $l_2 = l_2(t)$ . Звездочки обозначают свертки по  $x', t'$ . Здесь  $\phi_- = \phi_1(t, x)$  и  $\psi_+(t, x)$  задаются граничными условиями (6), причем  $\psi_+ = -k\phi_+/2$ , где  $\phi_+$  подлежит определению. При этом первое равенство (26) дает интегральное уравнение для определения

$$\begin{aligned}\phi_+(t, x) &= -\frac{a}{2\pi} k \iint \frac{\phi_+(t', x')}{\sqrt{T}} dx' dt' - \\ &\quad - S_+ ** \{(P_+ ** \phi_-) H(x - l_2)\}.\end{aligned}\tag{27}$$

Слагаемое вне интеграла, которое в дальнейшем будем обозначать как  $\phi_+^1(t, x)$ , является, по-сути, нулевым приближением решения, независящим от показателя неоднородности  $k$ . В соответствии с процедурой метода последовательных приближений значение потенциала вне площадки нагружения получим, заменив в подынтегральном выражении формулы (27)  $\phi_+(t', x')$  на  $\phi_+^1(t', x')$ . Функции  $S_+, P_+$  могут быть определены из выражений (25) в результате применения обратных преобразований по Лапласу и Фурье [7]:

$$\begin{aligned}S_+(t, x) &= -\frac{H(x) \delta(t - x/a)}{\sqrt{\pi} \sqrt{x}}, \\ P_+(t, x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \delta(t - x/a) H(x) x^{-3/2}.\end{aligned}\tag{28}$$

Рассмотрим полученное общее решение для частного случая сосредоточенной нагрузки, когда

$$\phi_1 = \phi_{0-} = -\delta(x - \xi) H(t - \tau).\tag{29}$$

Это дает возможность получить более удобное выражение для  $\phi_+^1(t, x)$ . В этом частном случае для внутренней свертки во втором слагаемом в соотношении (27) имеем

$$P_+ ** \phi_{0-} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{H(x-\xi)}{(x-\xi)^{3/2}} \times H\left(t-\tau-\frac{x}{a}+\frac{\xi}{a}\right). \quad (30)$$

При этом потенциал под жестким экраном для однородной жидкости определяется интегралом

$$\phi_{0+}^1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(x') H(x-x'-\xi)}{\sqrt{x'}} \times \frac{H(t-\tau-x/a+\xi/a)}{(x-x'-\xi)^{3/2}} \times H\{x-x'-l_2(t-x'/a)\} dx'. \quad (31)$$

После преобразований для искомой функции находим явное выражение

$$\phi_{0+}^1 = -\frac{1}{\pi} \frac{H(t-\tau-x/a+\xi/a)}{x-\xi} \frac{\sqrt{x-l_2(t_0)}}{\sqrt{l_2(t_0)-\xi}}. \quad (31)$$

Для произвольной граничной функции  $\phi_- = \phi_1(t, x)$ , пользуясь [4], получаем интегральное представление

$$\phi_+^1(t, x) = \frac{\sqrt{x-l_2(t_0)}}{\pi\sqrt{a}} \times \int_0^t \phi_1\{\tau, x-(t-\tau)a\} \frac{d\tau}{\sqrt{t_0-\tau(t-\tau)}}, \quad (32)$$

где учтено соотношение, справедливое на характеристике

$$l_2(t_0) - x + a(t-\tau) = a(t_0 - \tau). \quad (33)$$

Таким образом, для обращаемой в нуль функции  $\phi_1(t, x)$  в точке  $x=l_2(t)$  получаем известное поведение  $\phi_+^1(t, x)$  вблизи  $x=l_2(t)$  при подходе к точке со стороны экранированной поверхности. Однако для частного случая равномерного распределения давления по поверхности  $\phi_1 = \text{const}$  из (32) находим

$$\phi_+^1(t, x) = \frac{2}{\pi} \phi_1 \arctg \sqrt{\frac{t_0}{t-t_0}}, \quad (34)$$

откуда при  $x \approx l_2(t)$ ,  $t=t_0$  следует  $\phi_+^1(t, x) = \phi_1$ .

Для неоднородной жидкости в первом порядке относительно  $k$  из соотношений (27) и (32) следует

$$\phi_+(t, x) = \phi_+^1(t, x) - \frac{k}{4\pi} \int_{\xi_a(\eta_0)}^{\xi_0} \frac{d\xi'}{\sqrt{\xi_0-\xi'}} \int_{\eta_1(\xi')}^{\eta_0} \frac{\phi_+^1(t', x')}{\sqrt{\eta_0-\eta'}} d\eta', \quad (35)$$

где  $\phi_+^1(t, x)$  задается формулой (32). Интегрирование во втором слагаемом правой части выбрано по области  $s_0$  (см. рисунок), поскольку, согласно соотношению (9), в однородной жидкости, решение для которой следует подставить в интеграл, справедливо  $v^0(t, x) = 0$  при  $x > l_2(t)$  и

$$v \approx \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v^0(t, x) = -\frac{a}{\pi} \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \times \quad (36)$$

$$\times \iint \frac{\phi(t', x')}{\sqrt{T}} dx' dt'.$$

Это позволяет использовать соотношение (15) для упрощения вычисления интегралов.

Как видно из формулы (35), для  $x \approx l_2(t)$  получаем известный характер поведения вблизи края:  $\phi_+(t, x) \sim \sqrt{x-l_2(t)}$ . Для  $x \approx l_2(t)$  в случае  $\phi_1 = \text{const}$  первое слагаемое в правой части формулы (35) равно  $\phi_1$ , а второе -

$$-\frac{k}{\pi} \phi_1 \sqrt{\eta_0 + \eta_1(\xi_0)} \sqrt{\xi_0 - \xi_a(\eta_0)}.$$

Таким образом, в этом случае неоднородность жидкости не влияет на распределение потенциала вблизи края площадки нагружения. В случае  $\phi_1 = B\{t-F(x)\}$  в выражении (32) особенность при  $x=l_2(t)$ ,  $t_0 \approx t$  может дать только значение  $\tau \approx t$ . Вблизи верхнего предела интегрирования имеет место соотношение

$$\tau - F\{l_2(t) - (t-\tau)a\} \approx \dot{F}\{l_2(t)\} \{a - \dot{l}_2(t)\} (t-\tau).$$

Следовательно, интеграл в представлении (32) будет сходящимся, а значит  $\phi_+^1(t, x) \sim \sqrt{x-l_2(t)}$ . Точно так же, можно показать, что слагаемое с  $k$  в выражении (35) имеет порядок  $\sqrt{x-l_2(t)}$ , поскольку интеграл по  $\eta'$  конечен. Отсюда видно, что в отличие от поведения  $v$ , указанного в конце предыдущего раздела, неоднородность существенно влияет на поведение потенциала  $\phi_+(t, x)$  вблизи края площадки нагружения на поверхности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развит метод решения смешанных граничных задач, возникающих при моделировании процесса распространения возмущений в неоднородной по глубине идеальной жидкости. При разработке метода существенным образом использованы результаты, полученные в классических задачах теории упругости и задачах обтекания крыла. Отметим, что данный метод может быть использован при рассмотрении задачи о проникании затупленных тел в жидкость с дозвуковой скоростью движения точек границы смоченной поверхности.

Основное место в работе отведено анализу выражений для скорости частиц жидкости на площадке нагружения и для потенциала скоростей (давления) под жестким экраном вне площадки нагружения. Поскольку общие решения представлены в виде довольно сложных квадратур, значительное внимание уделено асимптотическим оценкам искомых величин вблизи края площадки нагружения. При этом изучено влияние характера распределения давления на площадке нагружения на характер сингулярности в выражении для скорости частиц жидкости вблизи края площадки. Установлено, что неоднородность жидкости в первом приближении не влияет на характер сингуляр-

ности в выражении для скорости. Однако распределение давления под жестким экраном существенно зависит от параметра неоднородности жидкости.

1. Кубенко В. Д. Об ударе упругой оболочки о поверхность жидкости // Доповіді АН УРСР. Сер. А.– 1974.– № 2.– С. 164–167.
2. Сагомонян А. Я. Удар и проникновение тел в жидкость.– М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.– 172 с.
3. Гавриленко В. В. Вертикальный несимметричный удар параболического цилиндра о поверхность сжимаемой жидкости // Акуст. вісн.– 2000.– 3, № 1.– С. 10–22.
4. Сарайкин В. А., Слепян Л. И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле // Известия АН СССР. МТТ.– 1979.– № 4.– С. 54–73.
5. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: в двух томах.– М.: Мир, 1980.– 880 с.
6. Костров Б. В. Неустановившаяся трещина продольного сдвига // ПММ.– 1966.– 30, вып. 6.– С. 1048–1050.
7. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости.– М.: Наука, 1986.– 328 с.
8. Красильщикова Е. А. Тонкое крыло в сжимаемом потоке.– М.: Наука, 1978.– 223 с.