

УДК 534.1+539.3

## СОВМЕСТНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ВИДЕ СФЕРИЧЕСКИХ КУПОЛОВ НА ОПОРНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

Л. Б. ЛЕРМАН

СКТБ Института механики НАН Украины имени С. П. Тимошенко, Киев

Получено 26.03.2001

В рамках теории оболочек рассматриваются задачи определения характеристик напряженно-деформированного состояния упругих деформируемых систем при нестационарных колебаниях, возникающих под действием импульсных распределенных поверхностных нагрузок. Решения динамической задачи представляются в виде разложений искоемых величин в ряды по специальным системам ортогональных векторных функций. Эти функции описывают стационарные состояния, возникающие при гармонических колебаниях элементов системы с общей частотой в отсутствие внешних и краевых нагрузок, и строятся как решения так называемых "неклассических задач на собственные значения", причем последние определяют спектр собственных частот колебаний системы в целом. Такой подход позволяет в рамках единого алгоритма учесть различный физический характер взаимодействия элементов системы в процессе совместного нестационарного деформирования. Представлены общие оценки сходимости разложений по системам векторных функций, и приведены конкретные примеры расчетов, позволяющие составить представление о скорости их сходимости. На основе общих представлений решений уравнений движения оболочек получены асимптотические оценки при больших и малых (по отношению к основному периоду колебаний механической системы) промежутках времени при действии импульсных нагрузок большой и малой длительности. Общая схема решения задач реализована для механических систем, состоящих из оболочек вращения с общей осью. Возможности разработанных алгоритмов иллюстрируются примерами расчетов для пологих сферических куполов, связанных с опорными цилиндрическими оболочками меньшего радиуса.

У рамках теорії оболонок розглядаються задачі визначення характеристик напружено-деформованого стану пружних деформованих систем при нестационарних коливаннях, що виникають під дією імпульсних розподілених поверхневих навантажень. Розв'язки динамічної задачі представляються у вигляді розкладів шуканих величин у ряди за спеціальними системами ортогональних векторних функцій. Ці функції описують стаціонарні стани, що виникають при гармонічних коливаннях елементів системи зі спільною частотою за відсутності зовнішніх і крайових навантажень, і будуються як розв'язки так званих "некласичних задач на власні значення", причому останні визначають спектр власних частот коливань системи в цілому. Такий підхід дозволяє в рамках єдиного алгоритму врахувати різний фізичний характер взаємодії елементів системи в процесі спільного нестационарного деформування. Представлені загальні оцінки збіжності розкладів за системами векторних функцій, і наведені конкретні приклади розрахунків, що дозволяють скласти уявлення про швидкість їхньої збіжності. На основі загальних представлень розв'язків рівнянь руху оболонок отримані асимптотичні оцінки при великих і малих (відносно до основного періоду коливань механічної системи) проміжках часу при дії імпульсних навантажень великої і малої тривалості. Загальна схема розв'язання задач реалізована для механічних систем, що складаються з оболонок обертання зі спільною віссю. Можливості розроблених алгоритмів ілюструються прикладами розрахунків для пологіх сферичних куполів, зв'язаних з опорними циліндричними оболочками меншого радіуса.

Within the frameworks of the theory of shells the problems of determination of the stress-strain state for the elastic deformable systems, non-stationary oscillating under the impulsive distributed surface loadings action, are considered. The dynamic problem solutions are presented as decompositions of the desired values to series with respect to special systems of the orthogonal vector-functions. These functions describe the stationary states, arising under the harmonic system elements oscillations of a general frequency in absence of the external and boundary loadings, and are built as the solutions of the so called "non-classic problems on the eigen-values". In doing so, the last determine the eigen-oscillation frequency spectrum for the system as a whole. Such an approach allows to account within the single algorithm the diverse nature of the physical system elements interaction during the joint non-stationary deformation. The general convergence estimations of decompositions with respect to systems of the vector-functions are represented, and the particular computation examples are offered, allowing to put together a conception of their convergence speed. On the basis of the general representation of the motion equations solutions the asymptotic estimations are obtained for big and small (with respect to the basic oscillations period of mechanical system) time intervals under the impulsive loadings of long and short duration. The general problem solution scheme is shown for mechanical systems, consisting of the shells of revolution with common axis. The potentials of developed algorithms are illustrated by numerical examples for the flat spherical cupolas, connected with supporting cylindrical shells of the smaller radius.

### ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на наличие многочисленных программных комплексов, реализующих различные модификации методов конечных или граничных элементов, а также конечных разностей [1–3], разработка эффективных подходов к решению не-

стационарных задач для деформируемых механических систем, состоящих из связанных между собой тонкостенных элементов типа стержней, пластин и оболочек, и в настоящее время представляет актуальную задачу. Как известно, одним из наиболее общих аналитических методов решения начально-краевых задач, рассматриваемых в ме-

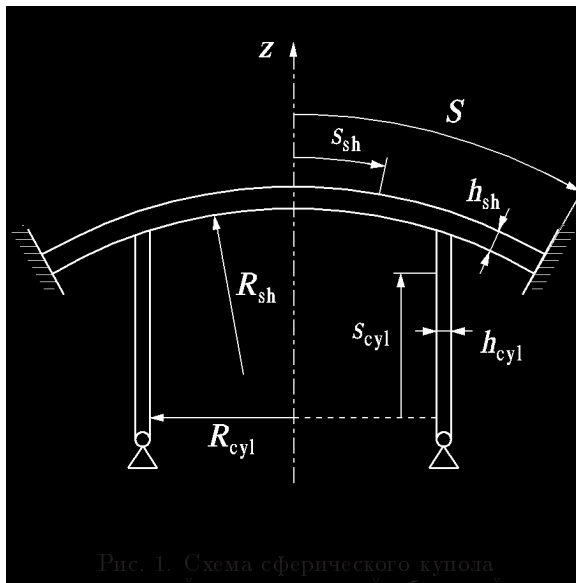


Рис. 1. Схема сферического купола с опорной цилиндрической оболочкой

ханике, является представление искомых величин в виде разложений в ряды по собственным формам колебаний (СФК). Данный метод служит обобщением классической схемы Фурье разделения переменных на гиперболические системы высокого порядка. Независимо от использованного способа построения собственных форм, он по своей сути аналитический. Для отдельных упругих элементов имеются две эквивалентные возможности эффективной реализации этого метода. Одна из них основана на применении преобразования Лапласа по времени и построении решений краевых задач в пространстве изображений в виде рядов по собственным формам. При этом возврат в пространство оригиналов достигается использованием теоремы о свертке для каждого члена ряда независимо [4, 5]. В результате, определение коэффициентов разложений сводится к решению интегральных уравнений Вольтерра типа свертки. В то же время, эти же уравнения нетрудно получить и непосредственно (без привлечения преобразования Лапласа), если использовать разложения по СФК в пространстве оригиналов и последующую запись решений модальных уравнений в виде интегралов Дюамеля [6–8].

В случае составных механических систем собственные формы отдельных элементов в пространстве изображений оказываются связанными, и возвращение в пространство оригиналов становится весьма затруднительным. В то же время, отыскание функций, определяющих СФК составного тела сложной конфигурации в рамках трехмерной теории упругости, также представляет со-

бой нетривиальную задачу механики.

Использование принципов теории оболочек за счет определенной потери точности модели позволяет существенно упростить задачу. При этом движение отдельных элементов системы в общем случае будет описываться различными системами дифференциальных уравнений. Поэтому, фактически, можно говорить лишь о функциях, определяющих некоторые стационарные состояния системы в целом, возникающие при совместных колебаниях элементов в случае отсутствия внешних и краевых нагрузок. В работах [9, 10] показано, что такие функции могут быть найдены при решении так называемых “неклассических задач на собственные значения” [11], которые, наряду с обычными однородными краевыми условиями, включают дополнительные условия сопряжения, отражающие физический характер взаимодействия элементов системы. Найденные в процессе решения собственные значения определяют спектр собственных частот колебаний системы в целом, а соответствующие им системы функций обладают свойствами ортогональности и полноты (в соответствующих функциональных пространствах), что позволяет использовать их в качестве базиса при решении нестационарных задач. Применимость такого подхода обсуждалась в [10], а некоторые численные результаты, полученные при его реализации, приведены в [8, 12]. Одно из главных преимуществ указанной схемы состоит в том, что появляется возможность в рамках единого алгоритма учесть различный физический характер взаимодействия элементов в процессе совместного деформирования рассматриваемой системы.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются деформируемые системы, состоящие из оболочек вращения с общей осью типа показанных на рис. 1. Сферическая оболочка выступает как несущая (в дальнейшем – основная оболочка), а цилиндрическая – как опорный элемент. Предполагается, что система подвержена действию нестационарных нагрузок, которые могут быть приложены как к несущей, так и к опорной оболочке.

Для оболочек вращения координатная поверхность обычно описывается в криволинейной ортогональной системе координат  $s, \theta$ , где  $s$  – длина дуги меридиана;  $\theta$  – центральный угол в параллельном круге. Кроме того,  $s = \text{const}$  и  $\theta = \text{const}$  являются линиями главных кривизн. Для каждой из оболочек длина дуги меридиана отсчитывается независимо, в направлении, показанном на рис. 1.

Соответственно, коэффициенты первой квадратичной формы поверхности (для каждой из оболочек они свои) будут  $A=1$ ,  $B=r$ . Здесь  $r=r(s)$  – расстояние от точки на координатной поверхности до оси вращения,  $\varphi=\varphi(s)$  – угол между нормалью к координатной поверхности и осью вращения.

Движение каждой из оболочек удобно описывать одной и той же системой дифференциальных уравнений теории оболочек типа С. П. Тимошенко [11], дополненных силами сопротивления, пропорциональными скорости. Например, для основной оболочки разрешающая система дифференциальных уравнений [11] может быть представлена в виде

$$Lu = C_\rho \ddot{u} + B_\rho \dot{u} + p, \quad (1)$$

где  $L$  – матрица дифференциальных операторов с частными производными, не содержащими временной переменной  $t$ ;  $C_\rho$  – матрица инерции;  $B_\rho$  – матрица демпфирования;  $p$  – заданные поверхностные нагрузки; точками обозначено дифференцирование по времени. Формальный (числовой) вектор основных неизвестных  $u = u(s, \theta, t)$  – это, например, вектор, который включает в себя, наряду с компонентами физического вектора перемещений срединной поверхности, также углы поворота или функции сдвига. Для удобства численного интегрирования система (1) обычно преобразовывается к системе уравнений первого порядка. При этом в качестве основных неизвестных выбираются функции, сохраняющие непрерывность в точках изменения формы меридиана (см., например, [11]). В частности, в вектор основных неизвестных вместо нормальной и меридиональной компонент вектора перемещений включают перемещения  $u_z$  и  $u_r$ , направленные вдоль и перпендикулярно оси вращения. Соответственно, вместо меридионального усилия и перерезывающей силы используются усилия, действующие вдоль и перпендикулярно оси вращения.

Как и ранее (см. [8]), дополнительно предполагается, что матрица инерции имеет диагональное строение, а матрица демпфирования пропорциональна ей:  $B_\rho = bC_\rho$ , где  $b$  – некоторая постоянная. Такое допущение обеспечивает получение независимых модальных уравнений. Оно аналогично одному из достаточных условий, сформулированных в [13] для системы с конечным числом степеней свободы, предполагающему, что матрица демпфирования пропорциональна матрице масс.

Аналогичная система уравнений записывается и для опорной оболочки относительно вектора  $v = v(s, \theta, t)$ .

Искомые функции должны удовлетворять начальным и краевым условиям. Последние обычно формулируются в усилиях или в перемещениях, и, в общем случае, могут быть неоднородными. Для оболочек вращения, замкнутых в полюсе, принимаются специальные условия, которые отражают ограниченность решений вблизи  $r=0$ . При численном интегрировании в этих случаях целесообразно использовать прием, реализованный в [14].

Начальные условия при исследовании переходных процессов, не ограничивая общности, можно принять нулевыми.

Для связанных систем оболочек необходимо также дополнительно обеспечить выполнение так называемых условий сопряжения [8, 11], выражающих физический характер взаимодействия элементов. При использовании общей схемы метода сил эти условия могут быть разделены на силовые и кинематические. Первые должны обеспечивать равновесие в зоне контакта оболочек, а вторые – совместность деформирования.

Следует отметить, что для связанных оболочек силовые условия могут быть сформулированы различным образом. При использовании подхода В. З. Власова [15] рассматриваемая система расчленяется на две оболочки и в рассмотрение вводится вектор реакций опорного элемента. В этом случае неизвестные реакции войдут в виде поверхностных (локальных) нагрузок в уравнение движения основной оболочки, и в виде краевых нагрузок (интегральных усилий и моментов) – в уравнение для опорной оболочки. Другой подход связан с расчленением системы на три оболочки (см., например, [16]). Тогда реакции будут входить только в краевые условия.

Для решения рассматриваемого класса задач удобно использовать первый подход, так как при этом сокращается число неизвестных, и, в соответствии с принятым методом решения, при построении собственных форм [6–10] уменьшается порядок частотного определителя. Следует иметь в виду, что в правые части уравнений движения основной оболочки войдут нагрузки, соответствующие усилиям и моментам  $N_x, N_z, Q_s, M_s, M_\theta$ , в то время как граничные условия для опорных оболочек должны быть сформулированы относительно другой группы усилий и моментов  $N_x, N_z, N_{s\theta}, M_s, H$  (здесь использованы общепринятые обозначения, см. [6–11]). Таким образом, силовые условия совместности имеют вид

$$N_x^I = N_x^{II}, \quad N_z^I = N_z^{II}, \quad M_s^I = M_s^{II}, \quad (2)$$

$$N_\theta^I = N_{s\theta}^{II}, \quad M_\theta^I = M_{s\theta}^{II}. \quad (3)$$

Римскими цифрами I и II в формулах (2), (3) и далее обозначены силовые факторы для основной и опорной оболочек соответственно. Условия (3) используются только в случае несимметричного напряженно-деформированного состояния.

Кинематические условия совместности записываются в виде

$$u_x^I = u_x^{II} = 0, \quad u_z^I = u_z^{II} = 0, \quad v^I = v^{II} = 0, \quad (4)$$

$$\psi_s^I = \psi_s^{II}, \quad \psi_\theta^I = \psi_\theta^{II},$$

где  $v$ ,  $\psi_s$ ,  $\psi_\theta$  – окружное перемещение и углы поворота нормали соответственно. В осесимметричном случае

$$v^I = v^{II} = 0,$$

$$\psi_\theta^I = \psi_\theta^{II} = 0.$$

Разрешающая система уравнений оболочек вращения допускает разделение переменных. Естественным представлением искомых функций и действующих на оболочку нагрузок являются ряды Фурье по окружной координате  $\theta$ :

$$\{N_x, N_s, M_s, u_x, u_z, \psi_s, q_x, q_z\} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \{N_x^{(m)}(s, t), N_s^{(m)}(s, t), \dots, q_z^{(m)}(s, t)\} \times$$

$$\times \cos m\theta +$$

$$+ \{N_x^{(m)'}(s, t), N_s^{(m)'}(s, t), \dots, q_z^{(m)'}(s, t)\} \times$$

$$\times \sin m\theta, \quad (5)$$

$$\{N_{s\theta}, M_{s\theta}, v, \psi_\theta, q_\theta\} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \{N_{s\theta}^{(m)}(s, t), M_{s\theta}^{(m)}(s, t), \dots, q_\theta^{(m)}(s, t)\} \times$$

$$\times \cos m\theta +$$

$$+ \{N_{s\theta}^{(m)'}(s, t), M_{s\theta}^{(m)'}(s, t), \dots, q_\theta^{(m)'}(s, t)\} \times$$

$$\times \sin m\theta.$$

После разделения переменных в разрешающей системе в случае ортотропного материала получаем две независимые системы дифференциальных уравнений десятого порядка для величин со штрихами и без штрихов (симметричные и антисимметричные компоненты). Например, для величин без штрихов такая система может быть записана

в виде

$$\frac{\partial \mathbf{Y}_m}{\partial s} = A(s)\mathbf{Y}_m - B_\rho \frac{\partial \mathbf{Y}_m}{\partial t} - C_\rho \frac{\partial^2 \mathbf{Y}_m}{\partial t^2} + \mathbf{f}_m, \quad (6)$$

$$A(s) = \|a_{ij}(s)\|, \quad i, j = 1, 2, \dots, 10,$$

где  $\mathbf{Y}_m = \mathbf{Y}_m(s)$  – вектор основных неизвестных, а элементы матриц,  $A(s)$  приведены в [11]. Вектор  $\mathbf{f}_m$ , входящий в уравнение (6), для основной оболочки включает заданные нагрузки и реакции, а для опорной – только заданные нагрузки. Уравнения для величин со штрихами аналогичны, см. [11]. Частные случаи системы (6) при  $m=0$  и  $m=1$  соответствуют практически важным случаям симметричной и антисимметричной деформаций.

Подставляя представления (5) в условия совместности (2)–(4), нетрудно убедиться, что для оболочек вращения с общей осью эти условия имеют место при любом  $\theta$ . Это означает, что условия совместности должны выполняться для каждого члена разложений (5) независимо, т.е. ситуация совершенно аналогична случаю оболочек, образованных вращением состыкованных кривых [11]. Требование соосности оболочек здесь является естественным, так как в противном случае все коэффициенты разложений (5) оказываются связанными.

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФОРМАМ КОЛЕБАНИЙ. ОЦЕНКИ ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ МАЛЫХ И БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ

Решение сформулированной задачи будем строить в виде рядов по функциям, описывающим стационарные состояния системы. В общем случае, для ограниченного тела стационарные состояния при моногармонических колебаниях определяются набором собственных форм (плюс смещения и повороты тела в целом, если оно не закреплено) и дискретным спектром собственных частот колебаний.

Для отдельного элемента механической системы частоты  $\omega_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) и формы  $\mathbf{U}_n = \mathbf{U}_n(s, \theta)$  представляют собой квадратные корни из собственных чисел и соответствующие им собственные функции (в общем случае векторные), которые определяются как решения классической задачи на собственные значения типа Штурма–Лиувилля [11, 13]. Тогда при заданных граничных условиях, которые в общем случае могут зависеть от времени, решение задачи динамики для уравне-

ний теории оболочек может быть представлено в виде

$$\mathbf{u}(\alpha, t) = \sum_n \frac{1}{\kappa_n \|\mathbf{U}_n\|^2} \left\{ \int_0^t [q_n(\tau) - p_n(\tau)] \times \right. \\ \left. \times e^{-c_n(t-\tau)} \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \right\} \mathbf{U}_n(\alpha), \quad (7)$$

где  $\kappa_n^2 = \omega_n^2 - c_n^2$ ;  $c_n$  – коэффициенты в модальных уравнениях, отражающие учет сил сопротивления, пропорциональных скорости;  $\|\mathbf{U}_n\|$  – нормы функций;  $q_n(t)$ ,  $p_n(t)$  – коэффициенты разложений краевых и поверхностных нагрузок по СФК соответственно (выражения для которых приведены в [12]). В фигурных скобках записано решение модальных уравнений при нулевых начальных условиях, представленное в виде интеграла Дюамеля. Уместно подчеркнуть, что именно использование СФК в качестве базиса разложений позволяет получать независимые модальные уравнения. Это существенно упрощает решение нестационарных задач.

С помощью представлений (7) нетрудно установить асимптотическое поведение решений, как при больших временах, так и в начальный период приложения динамической нагрузки для тех случаев, когда воздействия можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от времени, а вторая – только от координат.

В качестве первого примера рассмотрим практически важный случай мгновенного приложения нагрузки, распределенной в соответствии с заданным законом и определяемой формулой  $\mathbf{f}(s, \theta, t) = H(t)\mathbf{F}(s, \theta)$ , где  $H(t)$  – функция Хевисайда. Выражениями такого вида обычно моделируют импульсные нагрузки относительно большой длительности (ступенчатый импульс). В этом случае интегралы Дюамеля нетрудно вычислить аналитически, и вместо формулы (7) получаем представление

$$\mathbf{u}(\alpha, t) = \sum_n \frac{Q_n - P_n}{\kappa_n \|\mathbf{U}_n\|^2} \mathbf{U}_n(\alpha) \times \\ \times \frac{\omega_n(1 - e^{-c_n t} \cos \omega_n t) - c_n e^{-c_n t} \sin \omega_n t}{\omega_n^2 + c_n^2}, \quad (8)$$

где  $P_n$ ,  $Q_n$  – независимые от времени коэффициенты разложений заданных функций по СФК. Если диссипация энергии не учитывается, то ряд (8) принимает вид

$$\mathbf{u}(\alpha, t) = \sum_n \frac{P_n - Q_n}{\kappa_n \|\mathbf{U}_n\|^2} \mathbf{U}_n(\alpha) \frac{1 - \cos \omega_n t}{\omega_n^2}. \quad (9)$$

При больших временах ( $t \rightarrow \infty$ ) из (8) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{u}(\alpha, t) = \sum_n \frac{P_n - Q_n}{\kappa_n \|\mathbf{U}_n\|^2} \mathbf{U}_n(\alpha) \times \\ \times \frac{1}{\omega_n^2 + c_n^2} \frac{\omega_n}{\sqrt{\omega_n^2 - c_n^2}}. \quad (10)$$

При малых потерях, т.е. если  $c_n \ll \omega_n$ , решение, записанное в виде ряда (10), будет лишь незначительно отличаться от решения статической задачи, представленного в виде разложения по собственным формам:

$$\mathbf{u}_{ст}(\alpha, t) = \sum_n \frac{1}{\omega_n^2} \frac{P_n - Q_n}{\kappa_n \|\mathbf{U}_n\|^2} \mathbf{U}_n(\alpha). \quad (11)$$

В начальный период деформирования оболочки, т.е. при  $t \rightarrow 0$ , потерями обычно можно пренебречь. Если считать выполненными сильные неравенства  $\omega_n t \ll 1$ , то из формулы (9) следует представление

$$\mathbf{u}(\alpha, t) = \frac{t^2}{2} \sum_n \frac{P_n - Q_n}{\kappa_n \|\mathbf{U}_n\|^2} \mathbf{U}_n(\alpha). \quad (12)$$

В качестве второго примера рассмотрим действие короткого импульса, который в пределе описывается временной  $\delta$ -функцией, и примем, что  $\mathbf{f}(s, \theta, t) = \delta(t)\mathbf{F}(s, \theta)$ . Тогда, в соответствии с соотношением (7), решение задачи будет даваться рядом

$$\mathbf{u}(\alpha, t) = \sum_n \frac{Q_n - P_n}{\kappa_n \|\mathbf{U}_n\|^2} \mathbf{U}_n(\alpha) \{e^{-c_n t} \sin \omega_n t\}, \quad (13)$$

который при малых временах можно представить в виде

$$\mathbf{u}(\alpha, t) = t \sum_n \frac{P_n - Q_n}{\kappa_n \|\mathbf{U}_n\|^2} \mathbf{U}_n(\alpha). \quad (14)$$

При больших временах ( $t \rightarrow \infty$ ) из выражения (13) следует, что  $\mathbf{u}(\alpha, t) \rightarrow 0$ , т.е. напряженно-деформированное состояние стремится к своему невозмущенному состоянию.

Таким образом, в начале переходного процесса характеристики напряженно-деформированного состояния оболочки при действии импульсов конечной длительности возрастают пропорционально квадрату времени, в то время как при действии коротких импульсов те же характеристики изменяются во времени линейно. При больших временах в первом случае напряженно-деформированное состояние стремится к положению статического равновесия, а во втором

случае – к невозмущенному состоянию. Эти результаты имеют общий характер, так как основаны на представлениях (7) для произвольной оболочки, и полностью согласуются с данными, полученными в [17] с помощью преобразования Лапласа для стержней. Уместно отметить, что указанные асимптотические оценки удобно использовать для контроля сходимости решений при больших временах.

Представление решения нестационарной задачи для системы связанных оболочек аналогично рассмотренному выше, однако смысл величин и параметров, входящих в выражение (7), несколько изменяется. В этом случае функции, описывающие стационарные состояния системы, представляют собой решения так называемых “неклассических задач на собственные значения” [11]. Их удобно строить, рассматривая совместные гармонические колебания элементов системы [9, 10]. Тогда задачу можно свести к определению элементов матрицы линейной системы алгебраических уравнений, которые представляют собой решения краевых задач при локальных нагрузках единичной интенсивности, и последующему решению трансцендентного частотного уравнения, записанного в виде определителя упомянутой системы. В настоящей работе для построения этих решений используются численно-аналитические методы решения краевых задач, хорошо зарекомендовавшие себя при исследовании колебаний оболочек [9–11].

Функции, описывающие стационарные состояния механической системы, обладают свойствами ортогональности и полноты, что, в общем случае, является следствием закона сохранения энергии. Проверка выполнения этих свойств для рассматриваемых систем, обосновывающих их использование в качестве базисных функций при нахождении решений нестационарных задач, проведена автором в [9]. При этом, поскольку рассматривается составная механическая система, коэффициенты общего модального уравнения оказываются одновременно зависящими от характеристик контактирующих оболочек и нагрузок, действующих на отдельные элементы системы. Например, в рассматриваемой задаче норма функций должна вычисляться по формуле

$$\begin{aligned} \|W_n\|^2 = & \int_{\Gamma_I} r^I U_n^* C_\rho^I U_n ds d\theta + \\ & + \int_{\Gamma_{II}} r^{II} V_n^* C_\rho^I V_n ds d\theta, \end{aligned} \quad (15)$$

где интегрирование выполняется в срединных по-

верхностях оболочек  $\Gamma_I, \Gamma_{II}$ ; звездочкой обозначены транспонированные векторы [9]. В свою очередь, грузовые члены в модальных уравнениях будут задаваться выражениями

$$\begin{aligned} p_n(t) = & \int_{\Gamma_I} r^I U_n^* C_\rho^I p_I ds d\theta + \\ & + \int_{\Gamma_{II}} r^{II} V_n^* C_\rho^I p_{II} ds d\theta, \end{aligned} \quad (16)$$

и таким образом будут учтены нагрузки, действующие на отдельные элементы. Уместно подчеркнуть, что векторы  $U_n, V_n$  – это не СФК отдельных элементов, а результат решения задачи на собственные значения для системы в целом [9].

Асимптотические оценки поведения решений, полученные для отдельного элемента, без изменений переносятся и на оценку поведения решений для системы в целом. Аналогично можно получить соответствующие оценки при воздействии импульса произвольного вида.

### 3. ОЦЕНКИ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СТАЦИОНАРНЫМ СОСТОЯНИЯМ

Полученные выше решения описывают неустановившиеся колебания при воздействии динамических нагрузок. При этом решения для динамической нагрузки произвольного вида нетрудно построить с помощью операции свертки [17] на основе представлений решений задачи (8) для ступенчатого импульса, описываемого функцией Хевисайда. Вместе с тем, эффективность применения данного подхода будет зависеть от возможности его практической реализации, связанной со сходимостью рядов типа (7).

Из общей теории гиперболических систем дифференциальных уравнений известно, что ряды (7) будут заведомо сходиться внутри области построения решений (в данном случае – в срединных поверхностях оболочек). Использование этих рядов для вычисления искомых величин на границе области связано с возможностью аналитического продолжения построенных решений и их производных на границу и требует специальных исследований, на что указывалось в [18] (соответствующие примеры приведены в [12]). При проведении практических расчетов важную роль играет скорость сходимости рядов, поэтому целесообразно привести некоторые общие оценки, а также примеры расчетов для рассматриваемых систем оболочек.

Оценим, например, скорость сходимости ряда (9), определяющего решение задачи при действии ступенчатого импульса. Прежде всего, заметим, что СФК – это функции, непрерывные в замкнутой области, и поэтому ограниченные в своей совокупности. Коэффициенты разложения нагрузок  $Q_n, P_n$  как коэффициенты рядов Фурье также ограничены. Действительно, для гладких функций они стремятся к нулю и, значит, ограничены в совокупности. В случае локальных нагрузок ограниченность следует из непрерывности функций, описывающих СФК. Пусть, например, локальная нагрузка задается с помощью  $\delta$ -функции. Тогда соответствующий коэффициент Фурье в силу фильтрующих свойств  $\delta$ -функции будет просто равен значению собственной формы в точке, а следовательно, ограничен, хотя сам ряд может и расходиться. Эти рассуждения показывают, что, существует такая константа  $M > 0$ , что

$$\left| \frac{(P_n - Q_n)U_n(\alpha)}{\|U_n\|^2} \right| < M.$$

Поэтому функциональный ряд (11), определяющий статическое решение задачи, мажорируется числовым рядом

$$|u_{ст}(\alpha)| < M \sum_n \frac{1}{\omega_n^2}. \quad (17)$$

Из сходимости ряда в правой части немедленно следует равномерная сходимость ряда (11) в замкнутой области существования решений, что позволяет его почленно дифференцировать. При этом следует иметь в виду, что равномерная сходимость ряда из производных может нарушаться на границе.

Так как  $|1 - \cos \omega_n t| \leq 2$  при любых  $t$  и  $n$ , то для ряда (9), определяющего решение динамической задачи, получаем аналогичную оценку, независимую от времени. При этом для каждого члена ряда можно записать неравенство

$$\left| \frac{1 - \cos \omega_n t}{\omega_n^2} \frac{(P_n - Q_n)U_n(\alpha)}{\|U_n\|^2} \right| \leq 2M \frac{1}{\omega_n^2}. \quad (18)$$

Отсюда следует, что скорость сходимости ряда (9), по крайней мере, не хуже, чем ряда (11), а неравенство (18) показывает, что порядок малости коэффициентов рядов (9) и (11) соответствует величине  $O(1/\omega_n^2)$ . Это означает, что коэффициенты ряда убывают не медленнее, чем числа, обратно пропорциональные квадратам собственных частот. Полученные оценки справедливы для нагрузок любого вида, в том числе и сосредоточенных.

В случае гладких нагрузок ряды фактически будут сходиться еще быстрее, так как коэффициенты Фурье в разложениях таких нагрузок убывают с ростом номера  $n$ , а скорость их убывания, как известно, зависит от дифференциальных свойств функций, описывающих нагрузки.

Проиллюстрируем вышеизложенные соображения некоторыми числовыми результатами, полученными в процессе решения нестационарных задач для рассматриваемых в настоящей статье механических систем. Приводимые результаты соответствуют сферическому куполу, связанному с круговой цилиндрической оболочкой. В качестве характерного геометрического размера была принята длина половины дуги  $S$  сферического сегмента (от полюса до закрепления  $S = 1$  м), которая в расчетах сохранялась неизменной, а варьировалась только кривизна сегмента. Для остальных значений параметров задачи были приняты следующие значения: относительная толщина стенки сферической оболочки  $h_{sh}/S = 0.01$ , радиус цилиндрической оболочки  $R_{cyl}/S = 0.5$ , а относительная толщина ее стенки  $h_{cyl}/R_{cyl} = 0.01$ . Предполагалось, что оболочки изготовлены из изотропных материалов с отношением модулей упругости  $E_{sh}/E_{cyl} = 1$  ( $E_{sh} = 10$  ГПа) и плотностей  $\rho_{sh}/\rho_{cyl} = 1$  ( $\rho_{sh} = 1200$  кг/м<sup>3</sup>).

В табл. 1 и 2 приведены значения нескольких первых частот и коэффициентов разложений равномерно распределенной нормальной поверхностной нагрузки по СФК для двух значений кривизны сферического купола. В первом случае принято, что безразмерная кривизна купола составляет  $k_{sh} = S/R_{sh} = 0.2$ , а во втором –  $k_{sh} = 0.4$ . Расчеты показали, что своих максимальных значений расчетные величины достигают в центре купола. Поэтому для иллюстрации сходимости рядов в целом в табл. 1 дополнительно приведены значения прогиба, вычисленные в полюсе сферического купола при различном количестве удержанных членов ряда, а в табл. 2 – также значения меридионального усилия и изгибающего момента. При этом значения прогибов вычислены в момент времени  $t = 0.5T$ , а усилий и моментов – при  $t = 0.4T$ , где  $T$  – основной период колебаний системы в целом.

Приведенные численные результаты подтверждают общие оценки сходимости, приведенные выше, и показывают, что для рассматриваемых механических систем в практических расчетах (с погрешностью до 5 %) достаточно удерживать в рядах пять–шесть форм при вычислении максимальных значений как прогиба, так и силовых факторов. При этом сходимость улучшается с уменьшением кривизны оболочки. Обращает на себя

Табл. 1. Собственные частоты, коэффициенты разложений равномерной нагрузки и максимальные значения прогиба в полюсе при различном числе членов ряда (для сферы с относительной кривизной  $k_{sh}=0.2$ )

| $n$ | $\omega_n$ , кГц | $\alpha_n \cdot 10^{-4}$ , с <sup>2</sup> | $\alpha_n/\omega_n^2 \cdot 10^3$ | $w_{max}/h$ |
|-----|------------------|---|----------------------------------|-------------|
| 1   | 0.595            | -0.434                                    | -1.228                           | -0.95       |
| 2   | 0.985            | -3.972                                    | -4.098                           | -4.26       |
| 3   | 1.334            | 3.439                                     | 1.932                            | -4.03       |
| 4   | 1.918            | 0.399                                     | 0.108                            | -4.09       |
| 5   | 2.741            | 0.293                                     | 0.039                            | -4.10       |
| 6   | 3.681            | -1.886                                    | -0.139                           | -4.23       |
| 7   | 4.808            | 1.057                                     | 0.046                            | -4.19       |
| 8   | 7.301            | 0.103                                     | 0.002                            | -4.19       |
| 9   | 8.712            | -0.741                                    | -0.009                           | -4.20       |
| 10  | 10.360           | 0.373                                     | 0.003                            | -4.20       |
| 11  | 10.520           | 0.146                                     | 0.001                            | -4.20       |

Табл. 2. Собственные частоты, коэффициенты разложений равномерной нагрузки и максимальные значения прогиба в полюсе при различном числе членов ряда (для сферы с относительной кривизной  $k_{sh}=0.4$ )

| $n$ | $\omega_n$ , кГц | $\alpha_n \cdot 10^{-4}$ , с <sup>2</sup> | $\alpha_n/\omega_n^2 \cdot 10^3$ | $w_{max}/h$ | $N_s/(hp_0) \cdot 10^{-2}$ | $M_s/(h^2p_0) \cdot 10^{-2}$ |
|-----|------------------|---|----------------------------------|-------------|----------------------------|------------------------------|
| 1   | 1.126            | 0.132                                     | -1.043                           | -0.072      | -0.144                     | -0.095                       |
| 2   | 1.505            | -1.588                                    | -7.008                           | -1.141      | -2.441                     | -0.779                       |
| 3   | 2.159            | 0.819                                     | 1.757                            | -1.199      | -2.564                     | -0.863                       |
| 4   | 2.912            | 3.418                                     | 0.403                            | -1.200      | -2.565                     | -0.865                       |
| 5   | 3.834            | -2.068                                    | -1.407                           | -1.315      | -2.841                     | -1.192                       |
| 6   | 4.917            | 1.125                                     | 0.466                            | -1.270      | -2.757                     | -1.024                       |
| 7   | 7.377            | 0.100                                     | 0.018                            | -1.267      | -2.751                     | -1.006                       |
| 8   | 8.778            | -0.730                                    | -0.095                           | -1.268      | -2.754                     | -1.017                       |
| 9   | 11.660           | -0.088                                    | -0.006                           | -1.268      | -2.756                     | -1.107                       |

внимание тот факт, что для рассмотренных значений кривизны абсолютная величина коэффициента, соответствующего второй собственной форме, значительно превосходит остальные. Вместе с тем расчеты показывают, что в предельном случае нулевой кривизны купола (для круглой пластины) первые два коэффициента примерно равны [10]. Такое соотношение коэффициентов разложений во многом предопределяет форму динамического деформирования купола.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ДИНАМИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Графический материал, представленный в статье [8], позволяет составить определенное представление о характере возникающего динамического напряженно-деформированного состояния круглой пластины (как предельного случая сферического купола), связанной с цилиндрической

опорной оболочкой. Известно, что наличие у пологой оболочки даже незначительной кривизны существенно повышает ее жесткость. Поэтому в настоящей работе приводятся дальнейшие результаты, полученные в этом направлении для оболочек с ненулевой Гауссовой кривизной, находящихся в условиях осесимметричного деформирования.

На рис. 2–4 приведены кривые распределения прогиба, меридионального перемещения и изгибающего момента для сферического купола с безразмерной кривизной  $k_{sh}=0.1$  в различные моменты времени, а на рис. 5, 6 – перемещения сферического купола с безразмерной кривизной  $k_{sh}=0.2$ . Динамические кривые перемещений опорной оболочки повторяют зависимости, полученные в [8], и поэтому не приводятся. Эти результаты соответствуют внезапно приложенной равномерно распределенной нормальной поверхностной нагрузке (ступенчатому импульсу). При расчетах учитывались все составляющие реакций, что обеспечивает наиболее строгое выполнение условий кон-



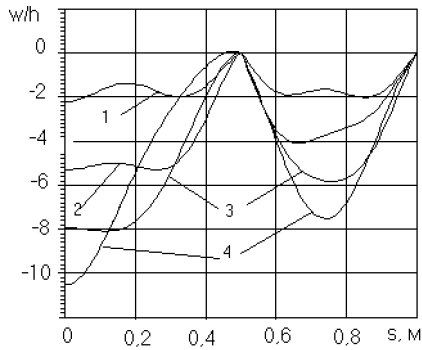


Рис. 2. Распределение нормального перемещения в поперечном сечении сферического купола с  $k_{sh}=0.1$  для различных моментов времени: 1 -  $t/T=0.2$ , 2 -  $t/T=0.3$ , 3 -  $t/T=0.4$ , 4 -  $t/T=0.5$

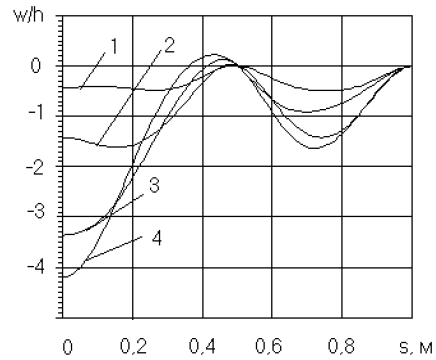


Рис. 5. Распределение нормального перемещения в поперечном сечении сферического купола с  $k_{sh}=0.2$  для различных моментов времени: 1 -  $t/T=0.2$ , 2 -  $t/T=0.3$ , 3 -  $t/T=0.4$ , 4 -  $t/T=0.5$

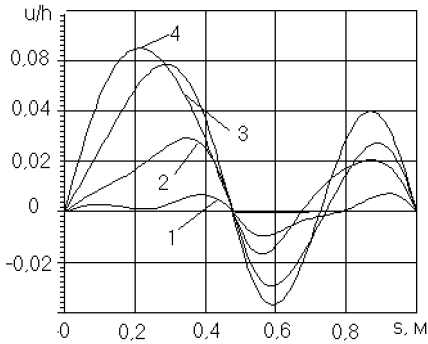


Рис. 3. Распределение меридионального перемещения в поперечном сечении сферического купола с  $k_{sh}=0.1$  для различных моментов времени: 1 -  $t/T=0.2$ , 2 -  $t/T=0.3$ , 3 -  $t/T=0.4$ , 4 -  $t/T=0.5$

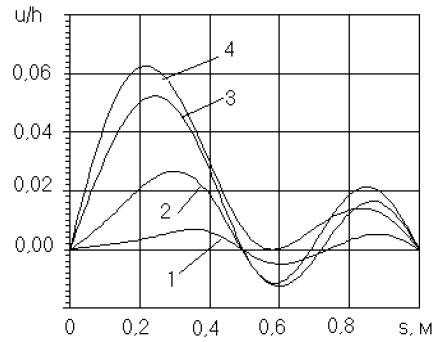


Рис. 6. Распределение меридионального перемещения в поперечном сечении сферического купола с  $k_{sh}=0.2$  для различных моментов времени: 1 -  $t/T=0.2$ , 2 -  $t/T=0.3$ , 3 -  $t/T=0.4$ , 4 -  $t/T=0.5$

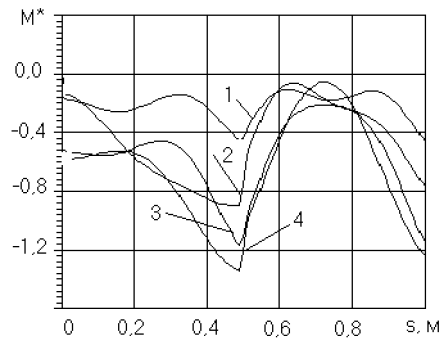


Рис. 4. Меридиональный изгибающий момент  $M^* = M_s / (h^2 p_0)$  в поперечном сечении сферического купола с  $k_{sh}=0.1$  для различных моментов времени: 1 -  $t/T=0.2$ , 2 -  $t/T=0.3$ , 3 -  $t/T=0.4$ , 4 -  $t/T=0.5$

такта при жестком соединении элементов. Кроме того, принималось, что контур купола жестко заземлен, а второй край опорной оболочки шарнирно оперт. Все расчеты были выполнены при удержании в рядах девяти членов. Для контроля достоверности в разработанных алгоритмах преду-

смотрена проверка условия ортогональности собственных форм (при выборе собственных частот из множества корней частотного уравнения), а также динамических условий совместности. Следует отметить, что приводимые результаты получены без учета демпфирования.

Представленные результаты показывают качественное совпадение кривых перемещений для куполов различной кривизны. Относительно полюса кривые распределения прогиба имеют осесимметричный, а меридионального перемещения – антисимметричный характер. Как и следовало ожидать, увеличение кривизны существенно уменьшает значения динамических перемещений (примерно в 2.4 раза по максимальному значению нормального прогиба). Для сравнения, нормальное безразмерное перемещение пластины в полюсе  $w/h=62.6$ , т.е. почти в шесть раз больше, чем для купола с наименьшей из рассматриваемых кривизн. При выбранных значениях физико-механических характеристик оболочек перемеще-

ния в зоне контакта (при  $s = 0.5$  м) малы по сравнению с нормальным перемещением полюса и на графиках не видны, однако они не равны нулю. Даже малые меридиональные перемещения вызывают реактивные моменты в опорной оболочке, что приводит в процессе деформирования к возникновению динамических перемещений противоположного знака в зоне опорной оболочки, возрастающих с ростом ее кривизны. Изгибающий момент достигает своего максимального значения в зоне опоры, однако при вычислении напряжений необходимо учитывать меридиональные усилия, которые, в отличие от случая пластины, могут достигать существенной величины (см. табл. 2). В зоне соединения элементов имеют место краевые эффекты, которые при увеличении кривизны проявляются более отчетливо. Уместно отметить, что приведенные данные позволяют одновременно оценить напряженно-деформированное состояние кольцевой в плане пологой оболочки, с упругой заделкой внутреннего края.

В рассмотренных примерах нагрузка прикладывалась к сферическому куполу, а опорная цилиндрическая оболочка предполагалась ненагруженной. Случай, когда купол свободен от нагрузок, а опорная цилиндрическая оболочка подвержена воздействию внезапно приложенной, нормальной, антисимметричной нагрузки  $H(t) \cos \theta$  (типа ветровой) рассмотрен в [19]. Данный пример иллюстрирует возможности применения разработанных алгоритмов к решению неосесимметричных задач. Для рассматриваемого вида нагрузки в соответствующих тригонометрических рядах так же, как и в осесимметричном случае, будет присутствовать по одному слагаемому, однако разрешающая система уравнений будет иметь десятый порядок. Зависимость расчетных величин от окружной координаты будет задаваться функциями вида  $\cos \theta$  или  $\sin \theta$ . Для каждой собственной частоты системы формы колебаний ее элементов будут характеризоваться различным количеством изгибных волн в радиальном направлении, так как в окружном направлении для рассматриваемой нагрузки их изменение описывается функциями  $\cos \theta$  или  $\sin \theta$  для всех мод.

Примечательным является тот факт, что при воздействии нагрузки только на опорную оболочку в несущей оболочке все равно возникают весьма значительные изгибные напряжения, вызванные наличием неоднородности. Перерезывающая сила терпит разрыв при переходе через сечение расположения опорной оболочки, причем величина скачка равна осевому усилию на краю опорной оболочки. Качественно такой характер имеют

эпюры перерезывающих сил в балках при наличии сосредоточенных сил.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные примеры подтверждают возможность практической реализации метода разложения по собственным формам колебаний применительно к сложным системам оболочек. С его помощью оказывается возможным (в рамках принятых допущений о строении матриц инерции и демпфирования и условий взаимодействия элементов) полностью решить задачу определения характеристик динамического деформирования элементов сложных механических систем. Это позволяет с помощью численных экспериментов формулировать практические рекомендации при рассмотрении конкретных прикладных задач, и, в частности, рассматривать задачи рационального проектирования.

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
2. Богданов С. Ю., Луговой П. З., Мейш В. Ф., Шульга Н. А. О численном решении динамических задач нелинейной теории подкрепленных оболочек // Прикл. мех. – 1996. – **32**, N 7. – С. 46–51.
3. Рассказов А. О., Козлов А. В. Численное исследование неосесимметричных колебаний оболочки вращения при нестационарном нагружении // Прикл. мех. – 1998. – **34**, N 5. – С. 68–75.
4. Кубенко В. Д., Гавриленко В. В. Плоская несимметричная задача погружения жесткого кругового цилиндра в жидкость // Прикл. мех. – 1999. – **35**, N 8. – С. 61–70.
5. Гавриленко В. В. Вертикальный несимметричный удар параболического цилиндра о поверхность сжимаемой жидкости // Акуст. вісн. – 2000. – **3**, N 1. – С. 10–22.
6. Лерман Л. Б. Прохождение импульсов давления через упругие пластины конечных размеров // Акуст. вісн. – 1998. – **1**, N 4. – С. 47–55.
7. Лерман Л. Б. Упругое деформирование пластины в жестком экране и акустическом волноводе при воздействии слабых ударных волн // Прикл. мех. – 1998. – **34**, N 5. – С. 104–110.
8. Лерман Л. Б. О решении задач динамики пластин и оболочек с конструктивными неоднородностями // Прикл. мех. – 1999. – **35**, N 9. – С. 46–53.
9. Лерман Л. Б. Об определении стационарных состояний систем тонкостенных элементов при распространении гармонических возмущений // Акуст. вісн. – 2000. – **3**, N 1. – С. 61–72.
10. Лерман Л. Б. Колебания круглых в плане пологих оболочек с локальными опорами // Прикл. мех. – 1999. – **35**, N 3. – С. 69–75.

11. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Клитайгородский А. Б., Шинкарь А. И.– К.: Наук. думка, 1986.– 172 с.
12. Лерман Л. Б. К решению задач динамики тонкостенных элементов конструкций с неоднородными динамическими краевыми условиями // Прикл. мех.– 2000.– 36, N 9.– С. 97–103.
13. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уинер У. Колебания в инженерном деле.– М.: Машиностроение, 1985.– 472 с.
14. Лерман Л. Б. Расчет характеристик деформирования стеклопластиковых параболических оболочек // Прикл. мех.– 1993.– 29, N 4.– С. 55–60.
15. Власов В. З. Избранные труды: том 1.– М.: Изд-во АН СССР, 1962.– 528 с.
16. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трех томах / Ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко: том 2.– М.: Машиностроение, 1968.– 464 с.
17. Слепая Л. И. Нестационарные упругие волны.– Л.: Судостроение, 1972.– 376 с.
18. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
19. Zarutsky V. A., Lerman L. B. The realization of modal superposition method in shell dynamic problems with constructive heterogeneities // Zeszyty naukowe politechniki rzeszowskiej. Folia scientiarum universitatis technicae resoviensis.– 1999.– N 174, Mechanica, z. 52. Problemy dynamiki konstrukcji.– S. 127–132.