

УДК 533.6.011

РАСЧЕТ РАСШИРЕНИЯ КАНАЛА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА В ЖИДКОСТИ, ОПИСЫВАЕМОЙ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Л. А. КАМЕНСКАЯ, В. М. КОСЕНКОВ

*Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, Николаев**Получено 24.03.2001*

Предложен алгоритм расчета пространственного течения жидкости под действием импульсной нагрузки. Решение системы уравнений газовой динамики сводится к одному нелинейному уравнению относительно потенциала скорости. Приведены результаты тестирования алгоритма с использованием известных решений одномерных и двумерных задач. Сравнение результатов тестирования свидетельствует о приемлемой точности предлагаемого алгоритма и возможности его использования для исследования процессов, происходящих при электрических разрядах в жидкости.

Запропоновано алгоритм розрахунку просторової течії рідини під впливом імпульсного навантаження. Розв'язок системи рівнянь газової динаміки зведено до одного нелінійного рівняння відносно потенціалу швидкості. Наведено результати тестування алгоритма з використанням відомих розв'язків одновимірних і двовимірних задач. Порівняння результатів тестування свідчить про прийнятну точність запропонованого алгоритма та про можливість його використання для дослідження процесів, що відбуваються при електричних розрядах в рідині.

An algorithm of calculation of the space liquid flow affected by the pulse loading is proposed. Solution of a gas dynamics equations system is reduced to the solution of a non-linear equation with respect to a velocity potential. The results of an algorithm testing using the known solutions of 1D and 2D problems are presented. Comparison of the testing results gives evidence of an appropriate accuracy of the proposed algorithm and an applicability to use it for investigation of the processes occurring at the electric discharges in fluid.

ВВЕДЕНИЕ

Процессы распространения гидродинамических волн в разрядных камерах большинства устройств, использующих электрический разряд в воде (сейсмоакустические источники, устройства для очистки литья, интенсификации нефтедобычи, обработки кристаллизующегося металла), носят, как правило, трехмерный характер из-за достаточно сложной формы камеры и расположения в ней электродов. Этим обстоятельством определяется необходимость исследования взаимодействия возникающих в жидкости пространственных волн давления с преградами. Пространственные задачи возникают в различных исследованиях, в частности, при изучении движения жидкости в замкнутых объемах при наличии поверхности раздела жидкой и газообразной сред. Построению вычислительных моделей колебаний жидкости посвящено значительное количество публикаций, в большинстве из которых исследуется распространение двумерных гидродинамических волн, т.е. используются осесимметричная или плоская постановка задачи. Численная реализация пространственных задач, в которых движение жидкости описывается в рамках трехмерной модели, либо приводит к довольно громоздким алгоритмам, требующим при расчетах на ЭВМ

значительных затрат машинных ресурсов и вычислительного времени, либо позволяет получать решения только в частных случаях, как, например, в [1, 2].

В данной работе исследование динамики жидкости проводится с использованием допущения о безвихревом характере течения идеальной сжимаемой жидкости, оправданного при электрических разрядах в воде. Такой подход значительно упрощает алгоритм, позволяя свести решение задачи к одному нелинейному уравнению относительно потенциала скорости [3].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предлагаемый алгоритм расчета распространения в замкнутом объеме гидродинамических волн, образующихся при электрическом разряде, построен с использованием нескольких допущений: среда в канале электрического разряда полагается идеальной плазмой, плотность и давление которой однородны во всем объеме канала; в начальный момент объем и форма канала известны; жидкость, окружающая канал разряда, является идеальной сжимаемой, а ее движение – потенциальным. Учитывая эти допущения, задачу можно сформулировать следующим образом. Движение жидкости в замкнутом объеме описывается урав-

нениями движения, неразрывности и состояния:

$$\dot{\vec{v}} + \frac{1}{2}\nabla(\vec{v}^2) = -\frac{1}{\rho}\nabla p, \quad (1)$$

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}\vec{v} + \vec{v}\nabla\rho = 0, \quad (2)$$

$$\frac{p+B}{p_0+B} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\kappa. \quad (3)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени t ; \vec{v} – вектор скорости жидкости; p , ρ – давление и плотность жидкости в текущий момент времени соответственно; p_0 , ρ_0 – параметры жидкости, при которых определены константы B и κ в уравнении (3) (для воды $p_0 = 10^5$ Па, $\rho_0 = 10^3$ кг/м³, $B = 3.044 \cdot 10^8$ Па, $\kappa = 7.15$). При этом $\vec{v} = \nabla\Psi$, где Ψ – потенциал скорости жидкости.

На внутренней границе расчетной области – контактном разрыве плазма–вода – должно выполняться условие $p = p_k$ (p_k – давление в канале). На внешней границе, которой является неподвижная жесткая стенка, ставится условие

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \frac{\partial\Psi}{\partial n} = 0,$$

где \vec{n} – орт внешней нормали к границе. Начальные условия для потенциала при $t=0$ задаются как $\Psi = \Psi_0$. Уравнение движения жидкости в потенциальном приближении имеет вид [3]

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = a^2\nabla^2\Psi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Psi)^2, \quad (4)$$

где

$$a^2 = a_0^2 - (\kappa - 1)\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\kappa + 1)(\nabla\Psi)^2;$$

a_0 – скорость звука в невозмущенной жидкости. Давление и плотность выражаются через производные потенциала следующим образом:

$$p = -B + (p_0 + B)F_\Psi, \quad (5)$$

$$\rho = \rho_0 F_\Psi, \quad (6)$$

где

$$F_\Psi = \left\{ 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\rho_0}{p_0 + B} \left[\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Psi)^2 \right] \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}.$$

Связь между параметрами в канале разряда устанавливается уравнением баланса энергии [4]

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{d(p_k V_k)}{dt} + p_k \frac{dV_k}{dt} = N(t), \quad (7)$$

где p_k , V_k – давление в канале разряда и его объем соответственно; $\gamma = 1.26$; $N(t)$ – закон ввода энергии в канал разряда. Нормальная составляющая скорости движения границы контактного разрыва плазма–вода полагается равной нормальной составляющей скорости жидкости

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = \vec{w} \cdot \vec{n},$$

где \vec{w} – вектор скорости границы.

В принятой постановке задачи описание процессов, происходящих в разрядной камере, сводится к определению потенциала скорости Ψ (4), давления в канале разряда p_k и его объема V_k (7), давления в жидкости p (5) как функций пространственной координаты и времени.

2. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Для численного решения задачи используется метод конечных объемов [5], в соответствии с которым уравнение (4) записывается в виде

$$\int_V \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} dV = \int_V a^2 \nabla^2\Psi dV - \int_V \frac{\partial(\nabla\Psi)^2}{\partial t} dV, \quad (8)$$

где V – объем ячейки разностной сетки, на которой аппроксимируется уравнение (4).

Подвижная пространственная сетка, вводимая при этом в расчетной области, для задач с двумя пространственными переменными образуется двумя семействами линий, а для трехмерных задач – набором “двумерных сечений” при фиксированном значении одной пространственной координаты таким образом, что граничные узлы сетки лежат на границе области. В узлах сетки искомые величины, например потенциал, принимают значение $\Psi_{i,j,k}^n$, где i, j, k – номер узла по трехмерным пространственным координатам x_1, x_2, x_3 соответственно; n – номер временного слоя. Введение подвижной, неортогональной в общем случае, сетки расширяет возможности применения и точность аппроксимации разработанного алгоритма, в отличие от использовавшегося ранее при расчетах трехмерных волновых процессов в жидкости, описываемой в потенциальном приближении [6].

Члены уравнения (8), содержащие производные по времени, с учетом формулы дифференцирования по t интеграла, взятого по подвижному объ-

ему [7], принимают вид

$$\int_V \frac{\partial(\nabla\Psi)^2}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\nabla\Psi)^2 dV - \int_S (\nabla\Psi)^2 v_n dS,$$

$$\int_V \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} dV = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V \Psi dV -$$

$$- \int_S \frac{\partial\Psi}{\partial t} v_n dS - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \Psi v_n dS.$$

После подстановки этих выражений в уравнение (8) и его преобразования по теореме Остроградского–Гаусса получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V \Psi dV = \int_S a^2 \nabla\Psi dS - \int_V \nabla a^2 \nabla\Psi dV +$$

$$+ \int_S \frac{\partial\Psi}{\partial t} v_n dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \Psi v_n dS -$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\nabla\Psi)^2 dV + \int_S (\nabla\Psi)^2 v_n dS, \quad (9)$$

где S – поверхность, ограничивающая объем V ; v_n – скорость перемещения точек поверхности S в направлении внешней нормали \vec{n} к ней. Значения $\nabla\Psi$ и $\partial\Psi/\partial t$ определяются в центре объема V по формулам:

$$\nabla\Psi \approx \frac{1}{v} \int_S \Psi dS, \quad (10)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} \approx \frac{1}{v} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_V \Psi dV - \int_S \Psi v_n dS \right).$$

Интегралы в выражениях (9), (10) заменяются их аналогами для конечного объема $V_{i,j,k}$ – ячейки расчетной сетки с узлом (i,j,k) в ее центре. Вводя обозначения $A_{i,j,k}$, $B_{i,j,k}$, $C_{i,j,k}$, $D_{i,j,k}$, $E_{i,j,k}$, $F_{i,j,k}$, $G_{i,j,k}$ узловых значений соответствующих

величин, можно записать:

$$A_{i,j,k} = \int_S a^2 \nabla\Psi dS \approx$$

$$\approx \sum_{L=1}^6 a_L^2 \sum_{m=1}^3 (\partial\Psi/\partial x_m)_L (\Delta S^m)_L,$$

$$B_{i,j,k} = \int_V \nabla a^2 \nabla\Psi dV \approx$$

$$\approx V_{i,j,k} \sum_{m=1}^3 [(\partial a^2/\partial x_m)(\partial\Psi/\partial x_m)]_{i,j,k},$$

$$C_{i,j,k} = \int_S (\partial\Psi/\partial t) v_n dS \approx$$

$$\approx \sum_{L=1}^6 (\partial\Psi/\partial t)_L \sum_{m=1}^3 v_L^m (\Delta S^m)_L,$$

$$D_{i,j,k} = \int_S \Psi v_n dS \approx$$

$$\approx \sum_{L=1}^6 \Psi_L \sum_{m=1}^3 v_L^m (\Delta S^m)_L, \quad (11)$$

$$E_{i,j,k} = \int_V (\nabla\Psi)^2 dV \approx$$

$$\approx V_{i,j,k} (\nabla\Psi)_{i,j,k}^2,$$

$$F_{i,j,k} = \int_S (\nabla\Psi)^2 v_n dS \approx$$

$$\approx \sum_{L=1}^6 \sum_{m=1}^3 (\partial\Psi/\partial x_m)_L^2 v_L^m (\Delta S^m)_L,$$

$$G_{i,j,k} = \int_S \Psi dS \approx$$

$$\approx \sum_{L=1}^6 \Psi_L \sum_{m=1}^3 (\Delta S^m)_L.$$

Кроме того,

$$\int_V \Psi dV \approx V_{i,j,k} \Psi_{i,j,k}.$$

Пространственные производные, необходимые для вычисления величин, заданных выражениями (11), также заменяются конечными суммами вида

$$(\nabla\Psi)_{i,j,k} \approx \frac{1}{V_{i,j,k}} \sum_{L=1}^6 \Psi_L \sum_{m=1}^3 (\Delta S^m)_L. \quad (12)$$

Суммирование здесь проводится по поверхности рассматриваемой ячейки ($L=1, \dots, 6$ – грани ячейки) и трем пространственным координатам

($m=1, 2, 3$). Значения неизвестных величин в выражениях (11), (12), имеющих полуцелые индексы, получаем как средние арифметические для соседних узловых значений.

Площадь проекции $(\Delta S^m)_L$ каждой из граней ячейки сетки на соответствующую координатную поверхность определяется как ориентированная площадь в выбранной системе координат. Объемы $V_{i,j,k}$ находятся из решения уравнения (9) относительно $\int dV$ при подстановке в него значения потенциала для невозмущенной жидкости $\Psi = \text{const}$. В этом случае уравнение (9) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV - \int_S v_n dS = 0,$$

и решение его можно получить как

$$\left(\int_V dV \right)^{n+1} = \left(\int_V dV \right)^n + \frac{\Delta t_{(n+1)/2}}{2} \times \left[\left(\int_S V dS \right)^n + \left(\int_S V dS \right)^{n+1} \right].$$

Уравнение (9) решается относительно потенциала на новом временном слое по явной трехслойной схеме во всех внутренних точках расчетной области. Искомое выражение для узлового значения потенциала $\Psi_{i,j,k}^{n+1}$ с использованием обозначений интегральных сумм (11) и (12) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_{i,j,k}^{n+1} &= \frac{\Delta t_{n+1/2}}{V_{i,j,k}^{n+1}} \times \\ &\times \left[\frac{\Delta t_{n+1/2} + \Delta t_{n-1/2}}{\Delta t_{n+1/2} \Delta t_{n-1/2}} \Psi_{i,j,k}^n - \frac{\Psi_{i,j,k}^{n-1} V_{i,j,k}^{n-1}}{\Delta t_{n-1/2}} \right] + \\ &+ \frac{\Delta t_{n-1/2} + \Delta t_{n+1/2}}{2} \frac{\Delta t_{n+1/2}}{V_{i,j,k}^{n+1}} \times \\ &\times \left[A_{i,j,k}^n - B_{i,j,k}^n - \frac{E_{i,j,k}^n - E_{i,j,k}^{n-1}}{\Delta t_{n-1/2}} + \right. \\ &\left. + F_{i,j,k}^n + C_{i,j,k}^n + \frac{D_{i,j,k}^n - D_{i,j,k}^{n-1}}{\Delta t_{n-1/2}} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

В граничных узлах решение строится точно так же, путем подстановки в выражения (11) граничных условий для производной потенциала. Давление и плотность жидкости в любой точке расчетной области могут быть определены из аналогов уравнений (5), (6) в конечных объемах.

3. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА

Считая известными все величины в узлах пространственной сетки на n -ом и $(n-1)$ -ом слоях, можно описать их вычисление на $(n+1)$ -ом временном слое.

Вычисляются скорости перемещения подвижных границ и их новое положение. Одной из границ расчетной области является поверхность полости канала разряда. Скорости узлов, составляющих эту поверхность, находятся как результирующие касательных составляющих скоростей, определяемых по значениям потенциалов граничных узлов и нормальных ее составляющих, получаемых из решения задачи о распаде контактного разрыва [8]. Необходимые для этого значения параметров жидкости на расстоянии полшага от контактной границы вычисляются с достаточной степенью точности линейной интерполяцией.

Значение давления в канале разряда определяется из уравнения баланса энергии (7) путем дискретизации его по явной двухшаговой схеме Эйлера. Величину объема канала можно найти, зная площадь поверхности плазменной полости и скорости движения ее узловых точек.

Вычисляются значения координат всех внутренних узлов, соответствующие площади граней и объемы ячеек расчетной области, значения потенциала $\Psi_{i,j,k}$ во всех внутренних узлах из выражения (13) и других гидродинамических параметров в интересующих точках на $(n+1)$ -ом временном слое.

Шаг по времени определяется из условия устойчивости вычислений по предлагаемой схеме (аналогично условию Куранта).

При постоянном временном и пространственных шагах сетки эта схема имеет второй порядок точности. Вместе с тем известно, что в решениях задач динамики сжимающей жидкости, полученных с помощью разностных схем второго порядка точности, присутствуют осцилляции вычислительного характера, не соответствующие физике процесса. При необходимости для их устранения в данной работе используется способ добавления в правую часть уравнения движения жидкости (4) слагаемого

$$\sigma = \nu_H \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Psi),$$

аналогичного слагаемому, описывающему физическую вязкость. Коэффициент искусственной вязкости ν_H определяется на основе численных экспериментов.

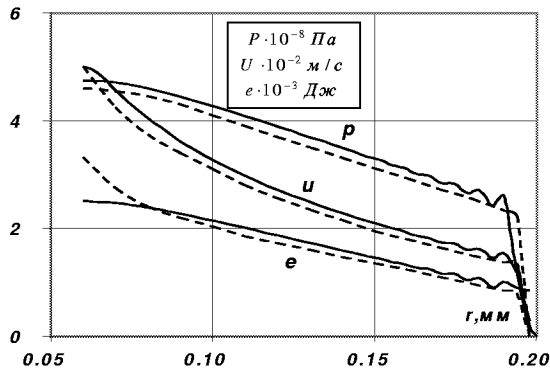


Рис. 1. Расширение цилиндрического поршня

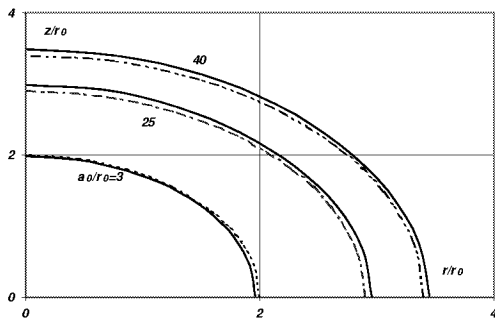


Рис. 2. Форма сферической полости

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ АЛГОРИТМА

Проверка точности разработанного алгоритма выполнялась путем сравнения с известными из литературы решениями одномерных и двумерных задач.

В качестве первого тестового примера рассмотрена задача о расширении в воде цилиндрического непроницаемого поршня с постоянной скоростью 500 м/с и начальным радиусом $r_0 = 0.01$ мм. На рис. 1 показано радиальное распределение параметров течения: давления p , скорости w , удельной внутренней энергии e в момент времени $t = 0.1$ мкс [9]. Сплошные линии соответствуют расчету по разработанному алгоритму, штриховые – расчету, приведенному в [9].

Второй тестовый пример представляет собой задачу о сферически симметричном адиабатическом расширении продуктов детонации тротила в воде [10]. Расчет по описанному алгоритму проводится в цилиндрической системе координат (r, z, θ) . В этом случае задача, имеющая цен-

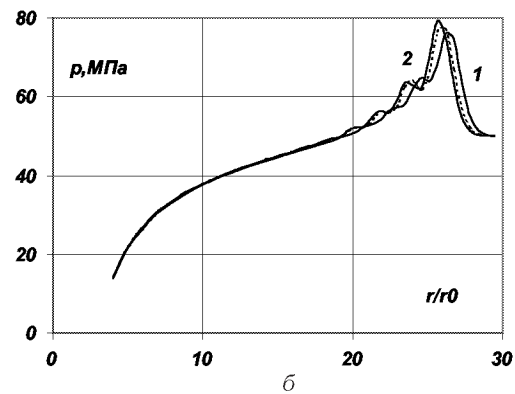
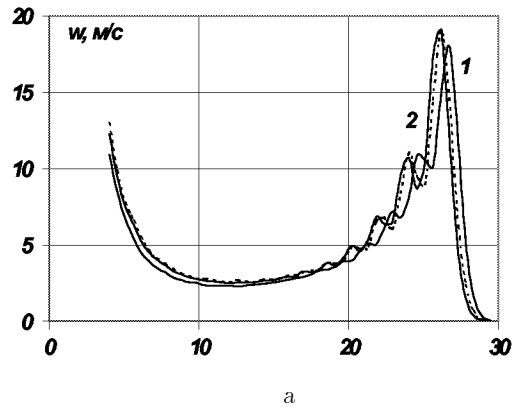


Рис. 3. Радиальное и осевое распределение давления и скорости:
а – скорость, б – давление

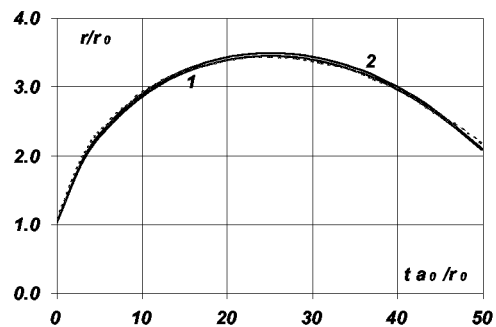


Рис. 4. Закон изменения радиуса газовой полости

тральную симметрию, становится осесимметричной, что дает возможность проверить данный алгоритм на известных результатах решения одномерной задачи. На рис. 2 приведена форма полости в моменты времени $\bar{t} = 3, 25, 40$ ($\bar{t} = t a_0 / r_0$, r_0 – начальный радиус полости). На рис. 3 кривые 1, 2 показывают распределения в момент времени $\bar{t} = 20$ давления и скорости в радиальном и осевом

направлениях соответственно. Для сравнения решений, полученных в одномерной и двумерной постановках, штриховыми линиями на рис. 2, 3 показаны величины соответствующих параметров, рассчитанные по описанному алгоритму в сферической системе координат. Рис. 4 демонстрирует закон изменения радиуса газовой полости в зависимости от времени при начальном давлении во внешней среде 50 МПа. Штриховой линией обозначено решение, приведенное в [10], а сплошными – радиус $\bar{r} = r/r_0$ полости в точках пересечения ее с неподвижными лучами расчетной сетки, полученный при расчете с помощью тестируемого алгоритма. Цифры на кривых, как и для рис. 3, соответствуют радиальному и осевому направлениям в цилиндрической системе координат.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан алгоритм расчета пространственного безвихревого течения жидкости под действием импульсной нагрузки. Сравнение результатов тестирования свидетельствует о приемлемой точности предлагаемого алгоритма и возможности его использования для исследования процессов, происходящих при электрических разрядах в жидкости. Предварительные оценки позволяют надеяться на то, что предложенный алгоритм окажется значительно более экономным с точки зрения затрат вычислительного времени и ресурсов ЭВМ, чем существующие аналоги.

1. Гавриленко В. В. Плоская несимметричная задача удара твердого тупого клина о поверхность сжимаемой жидкости // Акуст. вісн.– 1999.– 2, N 1.– С. 22–30.
2. Луковский И. А., Золотенко Г. Ф. Численное моделирование колебаний жидкости в закрытом подвижном прямоугольном сосуде // Гидромеханика.– 1998.– Вып. 72.– С. 72–87.
3. Галиев Ш. У. Динамика гидроупругопластических систем.– К.: Наук. думка, 1981.– 276 с.
4. Наугольных К. А., Рой Н. А. Электрические разряды в воде.– М.: Наука, 1977.– 151 с.
5. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: том 1.– М.: Мир, 1991.– 496 с.
6. Каменская Л. А., Косенков В. М. Алгоритм расчета трехмерных волновых процессов в жидкости при электрическом разряде // Теория, эксперимент, практика электроразрядных технологий – ИИПТ НАНУ.– Вып. 2.– 1995.– С. 60–64.
7. Седов Л. И. Механика сплошной среды: том 1.– М.: Наука, 1976.– 535 с.
8. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Ред. С. К. Годунова.– М.: Наука, 1976.– 400 с.
9. Куперштох А. Л. Численный метод расчета давления в канале электрического разряда в воде // Матер. Всесоюз. конф. “Студент и науч.-техн. прогресс”.– Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1987.– С. 115–126.
10. Замышляев Б. В., Яковлев Ю. С. Динамические нагрузки при подводном взрыве.– Л.: Судостроение, 1967.– 387 с.