

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ПЛОСКОСТЬЮ РАЗДЕЛА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕД

В. И. ГУЛЯЕВ*, Г. М. ИВАНЧЕНКО**, Е. В. ЯКОВЕНКО*

*Национальный транспортный университет, Киев

**Киевский национальный университет строительства и архитектуры

Получено 15.02.2001

Рассмотрена задача об определении интенсивностей отраженных и преломленных плоских квазипроходных и квазипоперечных ударных волн, образованных в результате нормального падения ударной волны на плоскость раздела двух трансверсально-изотропных упругих сред. На основе условий сохранения количества движения элементов системы, вовлеченных в движение в результате взаимодействия, построена система четырех алгебраических уравнений для определения разрывов скоростей частиц, вовлеченных в движение. Проанализированы частные случаи комбинаций параметров упругости деформируемых сред.

Розглянуто задачу про визначення інтенсивностей відбитих та заломлених плоских квазіпродовжних та квазіпоперечних ударних хвиль, які утворюються при нормальному падінні ударної хвилі на плоску межу двох трансверсально-ізотропних пружних середовищ. На основі умов збереження кількості руху елементів системи, що залучені до руху в результаті взаємодії, побудовано систему чотирьох алгебраїчних рівнянь для визначення розривів швидкостей рухомих частинок середовищ. Проаналізовані часткові випадки комбінацій параметрів пружності середовищ.

A problem of determination of intensities of reflected and refracted plane quasi-primary and quasi-secondary shock waves, generated by the shock wave normal incidence on a plane interface between two transversally isotropic elastic media is considered. A system of four algebraic equations for calculation of the velocity discontinuities of the particles involved into the motion are developed on the basis of the media elements momentum conservation conditions. Particular cases of combinations of the deformable media elasticity parameters are analysed.

ВВЕДЕНИЕ

Динамика упруго-деформируемых сред описывается гиперболическими дифференциальными уравнениями в частных производных. Если коэффициенты этих уравнений или действующая на среду нагрузка определяются функциями, содержащими разрывы по пространственным координатам, то разрывными могут оказаться и решения. Разрыв называется сильным, если он наблюдается у производной первого порядка от функции перемещений. Движущаяся поверхность сильных разрывов называется ударной волной [1].

На поверхностях разрыва, сохраняющихся в качестве изолированных поверхностей, отделяющих области непрерывных процессов, характеристики движения и состояния на различных сторонах связаны некоторыми универсальными интегральными соотношениями, называемыми кинематическими и динамическими условиями совместности [1–3]. Среди них особая роль принадлежит соотношению, представляющему собой одну из форм уравнения сохранения количества движения при переходе через поверхность разрыва, поскольку с его помощью можно вычислить величину разрыва на трансформируемой поверхности фронта.

Принятая при выводе условий совместности идея интегрального подхода, базирующаяся на теореме об изменении количества движения системы при импульсном взаимодействии, может быть использована в рамках лучевого метода [4–7] для описания динамического процесса взаимодействия сильного разрыва с границей раздела анизотропных сред с различными физическими свойствами. Вопросы численной реализации этого метода изложены в [8–11].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим две трансверсально-изотропные упругие среды I и II, в которых оси симметрии параметров упругости совпадают с осью Ox_2 (рис. 1, а), а плоскость их раздела G наклонена к этой оси под углом $90^\circ - \Theta$ (ось Ox_3 перпендикулярна плоскости рисунка). Движение каждой из сред описывается уравнениями типа [2, 12]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где u_1, u_2, u_3 – компоненты вектора упругих смещений; t – время; $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq} / \rho$, $c_{ik,pq}$ – параметры упругости; ρ – плотность.

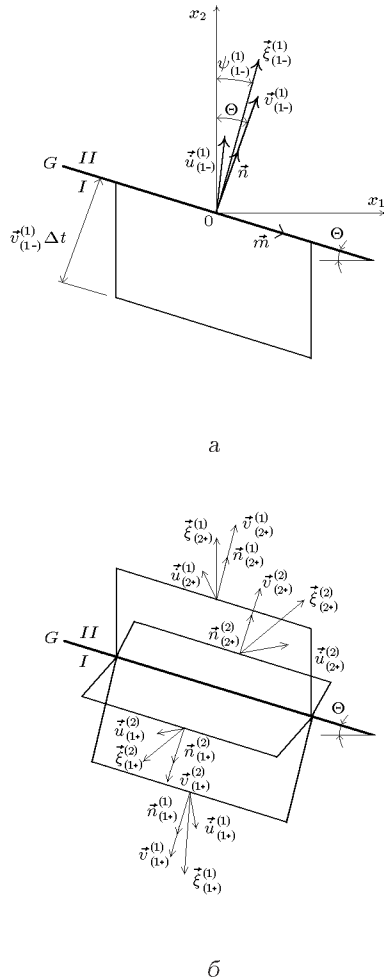


Рис. 1. Формирование плоских фронтов на плоской границе раздела:
а - до взаимодействия, б - после взаимодействия

Предположим, что в описанной механической системе движется плоский фронт постоянной фазы монохроматической волны с волновым числом k и фазовой скоростью v . На его площадках выполняются условия

$$\vec{n} \cdot \vec{r} - vt = \text{const},$$

где \vec{n} – нормаль к плоскости. Для выбранного \vec{n} вектор поляризации волны \vec{A} и фазовая скорость v определяются как собственный вектор и собственные значения уравнения

$$\left| \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq} \right| = 0. \quad (2)$$

Решая его, для каждого заданного направления на-

ходим три значения скорости

$$\left[v^{(1)}(\vec{n}) \right]^2 > \left[v^{(2)}(\vec{n}) \right]^2 \geq \left[v^{(3)}(\vec{n}) \right]^2 > 0,$$

соответствующих трем векторам поляризации $\vec{A}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, в общем случае произвольно ориентированным относительно вектора \vec{n} . Волны с вектором поляризации $\vec{A}^{(1)}$ принято называть квазипродольными (qP -волны), а волны с векторами поляризации $\vec{A}^{(2)}$ и $\vec{A}^{(3)}$ – квазипоперечными (qS -волны) [2]. Будем обозначать через $v_{(k\mp)}^{(t)}$ модуль вектора фазовой скорости фронта волны, а через $\xi_{(k\mp)}^{(t)}$ – модуль вектора лучевой скорости. Верхний индекс в скобках указывает тип волны, цифра в нижнем индексе в скобках – номер среды (знак “–” относится к состоянию системы до удара, знак “+” – к состоянию системы после удара). В обозначениях компонентов вектора поляризации $A_{j(k\mp)}^{(t)}$ индекс j соответствует номеру оси x_j , на которую спроектирован вектор.

Пусть на плоскость G нормально падает плоский фронт ударной qP -волны, распространяющейся в среде I со скоростью $v^{(1)}(\vec{n})$. В результате взаимодействия этой волны с плоскостью G образуются две отраженные ($qP_{(1+)}$, $qS_{(1+)}$) и две преломленные ($qP_{(2+)}$, $qS_{(2+)}$) волны, плоские фронты которых также параллельны плоскости G (рис. 1, б). Отметим, что в общем случае на плоскости раздела образуются по три вида отраженных и преломленных ударных волн, однако в рассматриваемом случае, благодаря симметрии параметров упругости сред, интенсивности третьих волн равны нулю. Воспользуемся методикой исследования косяго падения ударной волны на плоскость раздела изотропных упругих сред, основанной на идее нулевого приближения лучевого метода и условии сохранения количества движения элементов сред, вовлеченных в движение при ударном взаимодействии [8]. В соответствии с этим выделим промежуток времени Δt , настолько малый, что в течение его параметры определяющих полевых функций в окрестности фронта оказываются постоянными. Будем считать, что количество движения частиц сред I и II, вовлеченных в движение в окрестности плоскости G за время Δt остается неизменным. Подсчитаем его. До удара количество движения в тонком слое среды I, контактирующем с плоскостью G и имеющем единичную площадь и

толщину $v_{(1-)}^{(1)}\Delta t$, (см. рис. 1, а), составляет

$$\begin{aligned} \Delta\vec{Q}_{(1-)}^{(1)} &= \dot{u}_{(1-)}^{(1)}\rho_1 v_{(1-)}^{(1)}\Delta t = \\ &= \dot{u}_{(1-)}^{(1)}\rho_1 v_{(1-)}^{(1)}\Delta t (A_{1(1-)}^{(1)}\vec{i}_1 + A_{2(1-)}^{(1)}\vec{i}_2) = \\ &= \dot{u}_{(1-)}^{(1)}\rho_1 v_{(1-)}^{(1)}\Delta t \left[(A_{1(1-)}^{(1)}\cos\Theta - A_{2(1-)}^{(1)}\sin\Theta)\vec{m} + \right. \\ &\quad \left. + (A_{1(1-)}^{(1)}\sin\Theta + A_{2(1-)}^{(1)}\cos\Theta)\vec{n} \right] \end{aligned}$$

(орт \vec{m} направлен вдоль пересечения плоскостей G и Ox_1x_2).

После удара (рис. 1, б) это количество движения складывается из количеств движения, содержащихся:

- в слое отраженной $qP_{(1+)}$ -волны:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{Q}_{(1+)}^{(1)} &= \dot{u}_{(1+)}^{(1)}\rho_1 v_{(1+)}^{(1)}\Delta t = \\ &= \dot{u}_{(1+)}^{(1)}\rho_1 v_{(1+)}^{(1)}\Delta t (-A_{1(1-)}^{(1)}\vec{i}_1 - A_{2(1-)}^{(1)}\vec{i}_2) = \\ &= \dot{u}_{(1+)}^{(1)}\rho_1 v_{(1+)}^{(1)}\Delta t \left[(-A_{1(1-)}^{(1)}\cos\Theta + A_{2(1-)}^{(1)}\sin\Theta)\vec{m} + \right. \\ &\quad \left. + (-A_{1(1-)}^{(1)}\sin\Theta - A_{2(1-)}^{(1)}\cos\Theta)\vec{n} \right]; \end{aligned}$$

- в слое отраженной $qS_{(1+)}$ -волны:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{Q}_{(1+)}^{(2)} &= \dot{u}_{(1+)}^{(2)}\rho_1 v_{(1+)}^{(2)}\Delta t = \\ &= \dot{u}_{(1+)}^{(2)}\rho_1 v_{(1+)}^{(2)}\Delta t (-A_{1(1-)}^{(2)}\vec{i}_1 - A_{2(1-)}^{(2)}\vec{i}_2) = \\ &= \dot{u}_{(1+)}^{(2)}\rho_1 v_{(1+)}^{(2)}\Delta t \left[(-A_{1(1-)}^{(2)}\cos\Theta + A_{2(1-)}^{(2)}\sin\Theta)\vec{m} + \right. \\ &\quad \left. + (-A_{1(1-)}^{(2)}\sin\Theta - A_{2(1-)}^{(2)}\cos\Theta)\vec{n} \right]; \end{aligned}$$

- в слое преломленной $qP_{(2+)}$ -волны:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{Q}_{(2+)}^{(1)} &= \dot{u}_{(2+)}^{(1)}\rho_2 v_{(2+)}^{(1)}\Delta t = \\ &= \dot{u}_{(2+)}^{(1)}\rho_2 v_{(2+)}^{(1)}\Delta t (A_{1(2+)}^{(1)}\vec{i}_1 + A_{2(2+)}^{(1)}\vec{i}_2) = \\ &= \dot{u}_{(2+)}^{(1)}\rho_2 v_{(2+)}^{(1)}\Delta t \left[(A_{1(2+)}^{(1)}\cos\Theta - A_{2(2+)}^{(1)}\sin\Theta)\vec{m} + \right. \\ &\quad \left. + (A_{1(2+)}^{(1)}\sin\Theta + A_{2(2+)}^{(1)}\cos\Theta)\vec{n} \right]; \end{aligned}$$

- в слое преломленной $qS_{(2+)}$ -волны:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{Q}_{(2+)}^{(2)} &= \dot{u}_{(2+)}^{(2)}\rho_2 v_{(2+)}^{(2)}\Delta t = \\ &= \dot{u}_{(2+)}^{(2)}\rho_2 v_{(2+)}^{(2)}\Delta t (A_{1(2+)}^{(2)}\vec{i}_1 + A_{2(2+)}^{(2)}\vec{i}_2) = \\ &= \dot{u}_{(2+)}^{(2)}\rho_2 v_{(2+)}^{(2)}\Delta t \left[(A_{1(2+)}^{(2)}\cos\Theta - A_{2(2+)}^{(2)}\sin\Theta)\vec{m} + \right. \\ &\quad \left. + (A_{1(2+)}^{(2)}\sin\Theta + A_{2(2+)}^{(2)}\cos\Theta)\vec{n} \right]. \end{aligned}$$

В приведенных соотношениях принято

$$\vec{i}_1 = \cos\Theta\vec{m} + \sin\Theta\vec{n},$$

$$\vec{i}_2 = -\sin\Theta\vec{m} + \cos\Theta\vec{n}.$$

Из условия сохранения количества движения имеем [13]

$$\begin{aligned} \Delta\vec{Q}_{(1-)}^{(1)} &= \Delta\vec{Q}_{(1+)}^{(1)} + \Delta\vec{Q}_{(1+)}^{(2)} + \\ &\quad + \Delta\vec{Q}_{(2+)}^{(1)} + \Delta\vec{Q}_{(2+)}^{(2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Вместе с условием совместности скоростей частиц сред I и II на плоскости G

$$\left. \left(\dot{u}_{(1-)}^{(1)} + \dot{u}_{(1+)}^{(1)} \right) \right|_G = \left. \dot{u}_{(2+)}^{(1)} \right|_G \quad (4)$$

равенство (3) определяет (после проектирования на орты \vec{n} и \vec{m}) компоненты вектора неизвестных

$$\vec{w} = \left(\dot{u}_{(1+)}^{(1)}, \dot{u}_{(1+)}^{(2)}, \dot{u}_{(2+)}^{(1)}, \dot{u}_{(2+)}^{(2)} \right)^T.$$

Для построения разрешающей системы уравнений

выпишем равенства

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_{(1-)}^{(1)} &= \dot{u}_{(1-)}^{(1)} \left(A_{1(1-)}^{(1)} \vec{i}_1 + A_{2(1-)}^{(1)} \vec{i}_2 \right) = \\
 &= \dot{u}_{(1-)}^{(1)} \left[\left(A_{1(1-)}^{(1)} \cos \Theta - A_{2(1-)}^{(1)} \sin \Theta \right) \vec{m} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(A_{1(1-)}^{(1)} \sin \Theta + A_{2(1-)}^{(1)} \cos \Theta \right) \vec{n} \right], \\
 \dot{u}_{(1+)}^{(1)} &= \dot{u}_{(1+)}^{(1)} + \dot{u}_{(1+)}^{(2)} = \\
 &= \dot{u}_{(1+)}^{(1)} \left(-A_{1(1-)}^{(1)} \vec{i}_1 - A_{2(1-)}^{(1)} \vec{i}_2 \right) + \\
 &\quad + \dot{u}_{(1+)}^{(2)} \left(-A_{1(1-)}^{(2)} \vec{i}_1 - A_{2(1-)}^{(2)} \vec{i}_2 \right) = \\
 &= \dot{u}_{(1+)}^{(1)} \left[\left(-A_{1(1-)}^{(1)} \cos \Theta + A_{2(1-)}^{(1)} \sin \Theta \right) \vec{m} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(-A_{1(1-)}^{(1)} \sin \Theta - A_{2(1-)}^{(1)} \cos \Theta \right) \vec{n} \right] + \\
 &\quad + \dot{u}_{(1+)}^{(2)} \left[\left(-A_{1(1-)}^{(2)} \cos \Theta + A_{2(1-)}^{(2)} \sin \Theta \right) \vec{m} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(-A_{1(1-)}^{(2)} \sin \Theta - A_{2(1-)}^{(2)} \cos \Theta \right) \vec{n} \right], \\
 \dot{u}_{(2+)}^{(1)} &= \dot{u}_{(2+)}^{(1)} + \dot{u}_{(2+)}^{(2)} = \\
 &= \dot{u}_{(2+)}^{(1)} \left(A_{1(2+)}^{(1)} \vec{i}_1 + A_{2(2+)}^{(1)} \vec{i}_2 \right) + \\
 &\quad + \dot{u}_{(2+)}^{(2)} \left(A_{1(2+)}^{(2)} \vec{i}_1 + A_{2(2+)}^{(2)} \vec{i}_2 \right) = \\
 &= \dot{u}_{(2+)}^{(1)} \left[\left(A_{1(2+)}^{(1)} \cos \Theta - A_{2(2+)}^{(1)} \sin \Theta \right) \vec{m} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(A_{1(2+)}^{(1)} \sin \Theta + A_{2(2+)}^{(1)} \cos \Theta \right) \vec{n} \right] + \\
 &\quad + \dot{u}_{(2+)}^{(2)} \left[\left(A_{1(2+)}^{(2)} \cos \Theta - A_{2(2+)}^{(2)} \sin \Theta \right) \vec{m} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(A_{1(2+)}^{(2)} \sin \Theta + A_{2(2+)}^{(2)} \cos \Theta \right) \vec{n} \right].
 \end{aligned}$$

Подставляя их в условия (4) и проектируя выражения (3), (4) на направления \vec{n} и \vec{m} , получаем систему четырех скалярных уравнений для определения неизвестных $\dot{u}_{(1+)}^{(1)}$, $\dot{u}_{(1+)}^{(2)}$, $\dot{u}_{(2+)}^{(1)}$, $\dot{u}_{(2+)}^{(2)}$. В матричной форме она имеет вид

$$B \cdot \vec{w} = \vec{b}_p.$$

Компоненты матрицы

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} \quad (6)$$

вычисляем по формулам

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= \rho_1 v_{(1-)}^{(1)} \left(-A_{1(1-)}^{(1)} \sin \Theta - A_{2(1-)}^{(1)} \cos \Theta \right), \\
 b_{12} &= \rho_1 v_{(1-)}^{(2)} \left(-A_{1(1-)}^{(2)} \sin \Theta - A_{2(1-)}^{(2)} \cos \Theta \right), \\
 b_{13} &= \rho_2 v_{(2+)}^{(1)} \left(A_{1(2+)}^{(1)} \sin \Theta + A_{2(2+)}^{(1)} \cos \Theta \right), \\
 b_{14} &= \rho_2 v_{(2+)}^{(2)} \left(A_{1(2+)}^{(2)} \sin \Theta + A_{2(2+)}^{(2)} \cos \Theta \right), \\
 b_{21} &= \rho_1 v_{(1-)}^{(1)} \left(-A_{1(1-)}^{(1)} \cos \Theta + A_{2(1-)}^{(1)} \sin \Theta \right), \\
 b_{22} &= \rho_1 v_{(1-)}^{(2)} \left(-A_{1(1-)}^{(2)} \cos \Theta + A_{2(1-)}^{(2)} \sin \Theta \right), \\
 b_{23} &= \rho_2 v_{(2+)}^{(1)} \left(A_{1(2+)}^{(1)} \cos \Theta - A_{2(2+)}^{(1)} \sin \Theta \right), \\
 b_{24} &= \rho_2 v_{(2+)}^{(2)} \left(A_{1(2+)}^{(2)} \cos \Theta - A_{2(2+)}^{(2)} \sin \Theta \right), \\
 b_{31} &= A_{1(1-)}^{(1)} \sin \Theta + A_{2(1-)}^{(1)} \cos \Theta, \\
 b_{32} &= A_{1(1-)}^{(2)} \sin \Theta + A_{2(1-)}^{(2)} \cos \Theta, \\
 b_{33} &= A_{1(2+)}^{(1)} \sin \Theta + A_{2(2+)}^{(1)} \cos \Theta, \\
 b_{34} &= A_{1(2+)}^{(2)} \sin \Theta + A_{2(2+)}^{(2)} \cos \Theta, \\
 b_{41} &= A_{1(1-)}^{(1)} \cos \Theta - A_{2(1-)}^{(1)} \sin \Theta, \\
 b_{42} &= A_{1(1-)}^{(2)} \cos \Theta - A_{2(1-)}^{(2)} \sin \Theta, \\
 b_{43} &= A_{1(2+)}^{(1)} \cos \Theta - A_{2(2+)}^{(1)} \sin \Theta, \\
 b_{44} &= A_{1(2+)}^{(2)} \cos \Theta - A_{2(2+)}^{(2)} \sin \Theta.
 \end{aligned}$$

(5) Вектор правой части для случая падения $qP_{(1-)}$ -

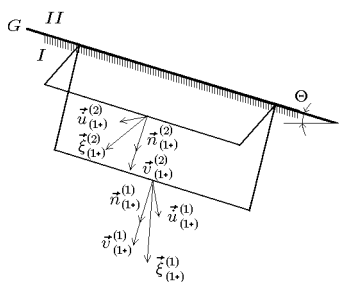


Рис. 2. Формирование плоских фронтов ударной волны после взаимодействия со свободной границей раздела

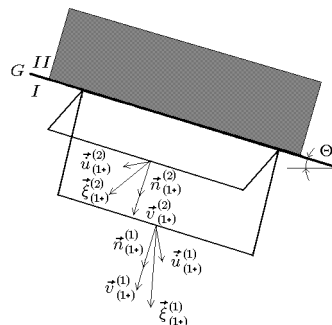


Рис. 3. Формирование плоских фронтов на плоской границе абсолютно твердого тела

волны запишем как

$$\vec{b}_p = \dot{u}_{(1-)}^{(1)} \left[\rho_1 v_{(1-)}^{(1)} \left(A_{1(1-)}^{(1)} \sin \Theta + A_{2(1-)}^{(1)} \cos \Theta \right), \right. \\ \left. \rho_1 v_{(1-)}^{(1)} \left(A_{1(1-)}^{(1)} \cos \Theta - A_{2(1-)}^{(1)} \sin \Theta \right), \right. \\ \left. \left(A_{1(1-)}^{(1)} \sin \Theta + A_{2(1-)}^{(1)} \cos \Theta \right), \right. \\ \left. \left(A_{1(1-)}^{(1)} \cos \Theta - A_{2(1-)}^{(1)} \sin \Theta \right) \right]^T.$$

Если падающей является $qS_{(1-)}$ -волна, то в системе (5) вместо \vec{b}_p следует подставить \vec{b}_s .

2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

2.1. Свободная граница

Пусть плоскость G является свободной границей среды I (рис. 2). В этом случае должно выполняться равенство $\Delta \vec{Q}_{(2+)} = 0$. Поэтому условие (3) можно заменить более простым соотношением

$$\Delta \vec{Q}_{(1-)}^{(1)} = \Delta \vec{Q}_{(1+)}^{(1)} + \Delta \vec{Q}_{(1+)}^{(2)}.$$

В связи с этим из четырех искомых величин остаются только две: $\dot{u}_{(1+)}^{(1)}$ и $\dot{u}_{(1+)}^{(2)}$, которые находятся

из системы

$$v_{(1-)}^{(1)} \left(-A_{1(1-)}^{(1)} \sin \Theta - A_{2(1-)}^{(1)} \cos \Theta \right) \dot{u}_{(1+)}^{(1)} + \\ + v_{(1-)}^{(2)} \left(-A_{1(1-)}^{(2)} \sin \Theta - A_{2(1-)}^{(2)} \cos \Theta \right) \dot{u}_{(1+)}^{(2)} = \\ = v_{(1-)}^{(1)} \left(A_{1(1-)}^{(1)} \sin \Theta + A_{2(1-)}^{(1)} \cos \Theta \right) \dot{u}_{(1-)}^{(1)}, \\ v_{(1-)}^{(1)} \left(-A_{1(1-)}^{(1)} \cos \Theta + A_{2(1-)}^{(1)} \sin \Theta \right) \dot{u}_{(1+)}^{(1)} + \\ + v_{(1-)}^{(2)} \left(-A_{1(1-)}^{(2)} \cos \Theta + A_{2(1-)}^{(2)} \sin \Theta \right) \dot{u}_{(1+)}^{(2)} = \\ = v_{(1-)}^{(1)} \left(A_{1(1-)}^{(1)} \cos \Theta + A_{2(1-)}^{(1)} \sin \Theta \right) \dot{u}_{(1-)}^{(1)}.$$

При этом уравнения вида (4) теряют смысл и исключаются из рассмотрения.

Структура коэффициентов построенной системы такова, что она имеет единственное решение:

$$\dot{u}_{(1+)}^{(1)} = -\dot{u}_{(1-)}^{(1)},$$

$$\dot{u}_{(1+)}^{(2)} = 0.$$

В связи с этим можно сделать вывод, что при нормальном падении плоской квазипродольной ($qP_{(1-)}$) ударной волны на свободную плоскость G от нее отражается только одна плоская ударная волна ($qP_{(1+)}$) с той же поляризацией, но с фазой, измененной на противоположную. Полученный вывод согласуется с аналогичным явлением, известным в теории изотропных ударных волн.

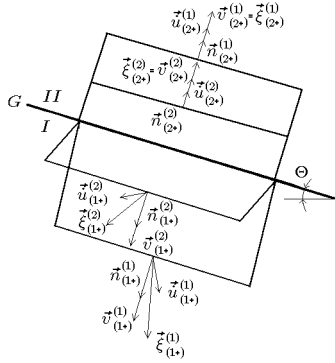


Рис. 4. Формирование плоских фронтов на плоской границе изотропной среды

2.2. Жестко закрепленная граница

Упругая среда I жестко связана на плоскости G с абсолютно твердым телом II (рис. 3). В этом случае ситуация оказывается обратной: теряют смысл условия сохранения количества движения (3) и, в силу равенств $\dot{u}_{(2+)}^{(1)} = 0$, $\dot{u}_{(2+)}^{(2)} = 0$, условие (4) принимает вид

$$\left(\dot{u}_{(1-)}^{(1)} + \dot{u}_{(1+)}^{(1)} \right) \Big|_G = 0.$$

При этом система (3) для нахождения неизвестных скоростей смещения приводится к виду

$$\begin{aligned} & \left(A_{1(1-)}^{(1)} \sin \Theta + A_{2(1-)}^{(1)} \cos \Theta \right) \dot{u}_{(1+)}^{(1)} + \\ & + \left(A_{1(1-)}^{(2)} \sin \Theta + A_{2(1-)}^{(2)} \cos \Theta \right) \dot{u}_{(1+)}^{(2)} = \\ & = \left(A_{1(1-)}^{(1)} \sin \Theta + A_{2(1-)}^{(1)} \cos \Theta \right) \dot{u}_{(1-)}^{(1)}, \\ & \left(A_{1(1-)}^{(1)} \cos \Theta - A_{2(1-)}^{(1)} \sin \Theta \right) \dot{u}_{(1+)}^{(1)} + \\ & + \left(A_{1(1-)}^{(2)} \cos \Theta - A_{2(1-)}^{(2)} \sin \Theta \right) \dot{u}_{(1+)}^{(2)} = \\ & = \left(A_{1(1-)}^{(1)} \cos \Theta - A_{2(1-)}^{(1)} \sin \Theta \right) \dot{u}_{(1-)}^{(1)}. \end{aligned}$$

Она имеет одно решение

$$\begin{aligned} \dot{u}_{(1+)}^{(1)} &= \dot{u}_{(1-)}^{(1)}, \\ \dot{u}_{(1+)}^{(2)} &= 0, \end{aligned}$$

свидетельствующее о том, что в этом случае также отражается только одна квазипродольная плоская ударная волна, поляризация, фаза и значение

разрыва на фронте которой совпадают с соответствующими характеристиками исходной падающей ударной волны. Подчеркнем, что такой же эффект имеет место и в теории изотропных ударных волн.

2.3. Контакт с изотропным телом

Среда II изотропна и характеризуется параметрами упругости λ_2 , μ_2 , ρ_2 . В этом случае все направления в среде II равноправны. Поэтому в ней могут распространяться волны двух видов – чисто продольная (P -волна), скорость которой $\alpha = \sqrt{(\lambda_2 + 2\mu_2)/\rho_2}$, и чисто поперечная (S -волна), скорость которой $\beta = \sqrt{\mu_2/\rho_2}$. При этом волновой фронт ортогонален лучам (лучевая скорость совпадает с фазовой по величине и направлению), а скорости смещения частиц направлены параллельно лучам в случае продольных волн и ортогональны им в случае поперечных (рис. 4). Подсчитаем количество движения элементов соответствующих частиц преломленных волн, которые опираются на площадку границы G единичной площади:

$$\Delta \vec{Q}_{(2+)} = \Delta \vec{Q}_{(2+)}^{(1)} + \Delta \vec{Q}_{(2+)}^{(2)},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \vec{Q}_{(2+)}^{(1)} &= \alpha \Delta t \cos \Theta_{(2+)}^{(1)} \dot{u}_{(2+)}^{(1)} = \\ &= \alpha \Delta t \cos \Theta_{(2+)}^{(1)} \dot{u}_{(2+)}^{(1)} \vec{n}; \\ \Delta \vec{Q}_{(2+)}^{(2)} &= \beta \Delta t \cos \Theta_{(2+)}^{(2)} \dot{u}_{(2+)}^{(2)} = \\ &= \beta \Delta t \cos \Theta_{(2+)}^{(2)} \dot{u}_{(2+)}^{(2)} \vec{m}. \end{aligned}$$

В этих равенствах поляризация волны деформаций $\dot{u}_{(2+)}^{(1)}$ является чисто продольной, поэтому вектор $\dot{u}_{(2+)}^{(1)}$ совпадает по направлению с вектором нормали \vec{n} . В то же время, волна деформаций $\dot{u}_{(2+)}^{(2)}$ – чисто поперечная, поэтому вектор $\dot{u}_{(2+)}^{(2)}$ коллинеарен \vec{m} . С учетом последних равенств коэффициенты матрицы B принимают следующий

вид:

$$b_{11} = \rho_1 v_{(1-)}^{(1)} \left(-A_{1(1-)}^{(1)} \sin \Theta - A_{2(1-)}^{(1)} \cos \Theta \right),$$

$$b_{12} = \rho_1 v_{(1-)}^{(2)} \left(-A_{1(1-)}^{(2)} \sin \Theta - A_{2(1-)}^{(2)} \cos \Theta \right),$$

$$b_{13} = \alpha \cos \Theta_{(2+)}^{(1)},$$

$$b_{14} = 0,$$

$$b_{21} = \rho_1 v_{(1-)}^{(1)} \left(-A_{1(1-)}^{(1)} \cos \Theta + A_{2(1-)}^{(1)} \sin \Theta \right),$$

$$b_{22} = \rho_1 v_{(1-)}^{(2)} \left(-A_{1(1-)}^{(2)} \cos \Theta + A_{2(1-)}^{(2)} \sin \Theta \right),$$

$$b_{23} = 0,$$

$$b_{24} = \beta \cos \Theta_{(2+)}^{(2)},$$

$$b_{31} = A_{1(1-)}^{(1)} \sin \Theta + A_{2(1-)}^{(1)} \cos \Theta,$$

$$b_{32} = A_{1(1-)}^{(2)} \sin \Theta + A_{2(1-)}^{(2)} \cos \Theta,$$

$$b_{33} = 1,$$

$$b_{34} = 0,$$

$$b_{41} = A_{1(1-)}^{(1)} \cos \Theta - A_{2(1-)}^{(1)} \sin \Theta,$$

$$b_{42} = A_{1(1-)}^{(2)} \cos \Theta - A_{2(1-)}^{(2)} \sin \Theta,$$

$$b_{43} = 0,$$

$$b_{44} = 1.$$

Углы $\Theta_{(2+)}^{(1)}$, $\Theta_{(2+)}^{(2)}$ элементарно определяются из соотношений Снеллиуса

$$\frac{\sin \Theta_{(1-)}^{(1)}}{v_{(1-)}^{(1)}} = \frac{\sin \Theta_{(2+)}^{(1)}}{\alpha} = \frac{\sin \Theta_{(2+)}^{(1)}}{\beta}.$$

Поскольку скорости α и β заранее известны, имеем

$$\Theta_{(2+)}^{(1)} = \arcsin \left(\frac{\alpha \sin \Theta_{(1-)}^{(1)}}{v_{(1-)}^{(1)}} \right),$$

$$\Theta_{(2+)}^{(2)} = \arcsin \left(\frac{\beta \sin \Theta_{(1-)}^{(1)}}{v_{(1-)}^{(1)}} \right).$$

Вид соответствующей системы алгебраических уравнений позволяет заключить, что при нор-

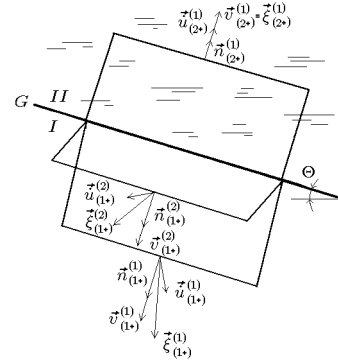


Рис. 5. Формирование плоских фронтов на плоской границе идеальной жидкости

мальном падении плоской ударной qP -волны в трансверсально-изотропной упругой среде I на плоскость G , отделяющую ее от изотропной среды II, в общем случае формируются две отраженные ($qP_{(1+)}$, $qS_{(1+)}$) и две преломленные ($P_{(2+)}$, $S_{(2+)}$) плоские ударные волны.

Аналогично обосновывается и утверждение о том, что если в изотропной упругой среде I чисто продольная P (или чисто поперечная S) плоская ударная волна нормально падает на плоскость G , отделяющую ее от трансверсально-изотропной упругой среды II, то в результате динамического взаимодействия образуются по две отраженные ($P_{(1+)}$, $S_{(1+)}$) и две преломленные ($qP_{(2+)}$, $qS_{(2+)}$) плоские ударные волны.

2.4. Контакт с идеальной жидкостью

Среда II – идеальная жидкость (рис. 5). Поскольку вода не может воспринимать касательные напряжения, поперечная S -волна отсутствует ($u_{(2+)}^{(2)} = 0$) и теряется сцепление между водой и упругим телом в направлении вектора \vec{m} . В этом случае перемещения и скорости частиц воды и тела вдоль направления вектора \vec{m} на разделяющей плоскости G не обязательно совпадают. Поэтому теряет силу третье уравнение из векторного соотношения (4), а в матрице B из предыдущего случая исключаются четвертая строка и четвертый столбец. Теперь она имеет вид

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

с компонентами, определяемыми как

$$\begin{aligned} b_{11} &= \rho_1 v_{(1-)}^{(1)} \left(-A_{1(1-)}^{(1)} \sin \Theta - A_{2(1-)}^{(1)} \cos \Theta \right), \\ b_{12} &= \rho_1 v_{(1-)}^{(2)} \left(-A_{1(1-)}^{(2)} \sin \Theta - A_{2(1-)}^{(2)} \cos \Theta \right), \\ b_{13} &= \alpha \cos \Theta_{(2+) }^{(1)}, \\ b_{21} &= \rho_1 v_{(1-)}^{(1)} \left(-A_{1(1-)}^{(1)} \cos \Theta + A_{2(1-)}^{(1)} \sin \Theta \right), \\ b_{22} &= \rho_1 v_{(1-)}^{(2)} \left(-A_{1(1-)}^{(2)} \cos \Theta + A_{2(1-)}^{(2)} \sin \Theta \right), \\ b_{23} &= 0, \\ b_{31} &= A_{1(1-)}^{(1)} \sin \Theta + A_{2(1-)}^{(1)} \cos \Theta, \\ b_{32} &= A_{1(1-)}^{(2)} \sin \Theta + A_{2(1-)}^{(2)} \cos \Theta, \\ b_{33} &= 1. \end{aligned}$$

Вектор неизвестных \vec{w} и вектор правой части \vec{b}_p для рассматриваемой постановки, соответственно, примут вид

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \left[\dot{u}_{(1+)}^{(1)}, \dot{u}_{(1+)}^{(2)}, \dot{u}_{(2+)}^{(1)} \right]^T, \\ \vec{b}_p &= \left[\rho_1 \xi_{(1-)}^{(1)} \cos \psi_{(1-)}^{(1)} A_{1(1-)}^{(1)} \dot{u}_{(1-)}^{(1)}, \right. \\ &\quad \left. \rho_1 \xi_{(1-)}^{(1)} \cos \psi_{(1-)}^{(1)} A_{2(1-)}^{(1)} \dot{u}_{(1-)}^{(1)}, \right. \\ &\quad \left. A_{2(1-)}^{(1)} \dot{u}_{(1-)}^{(1)} \right]^T. \end{aligned}$$

Анализируя построенную для этого случая систему уравнений, отметим, что падение плоской $qP_{(1-)}$ -волны на плоскость G приводит к образованию двух отраженных ($qP_{(1+)}$, $qS_{(1+)}$) и одной преломленной ($P_{(2+)}$) плоских ударных волн.

Аналогично можно заключить, что если среды I и II поменять местами и считать, что исходная падающая ударная $P_{(1-)}$ -волна распространяется в жидкости, то после ее взаимодействия с плоскостью G будут сформированы одна отраженная $P_{(1+)}$ плоская ударная волна и две ($qP_{(2+)}$ и $qS_{(2+)}$) преломленные плоские ударные волны.

Для подтверждения достоверности выполненных преобразований и построенных соотношений, рассмотрим случай, когда $\Theta=0$ (плоский фронт движется вдоль оси Ox_2 , являющейся осью симметрии свойств упругих сред, а нормаль коллинеарна этой оси). Тогда падающая, отраженная

и преломленная квазипродольные qP -волны становятся строго продольными, интенсивности квазипоперечных qS -волн становятся равными нулю и для рассматриваемого процесса дифракции должны быть справедливы известные соотношения взаимодействия плоской продольной волны с плоской границей раздела изотропных упругих сред при нормальном падении [1]. Действительно, поскольку при этом

$$\begin{aligned} A_{1(1-)}^{(1)} &= A_{1(1+)}^{(1)} = A_{1(2+)}^{(1)} = 0, \\ A_{2(1-)}^{(1)} &= A_{2(2+)}^{(1)} = -A_{2(1+)}^{(1)} = 1, \\ A_{1(1-)}^{(2)} &= A_{1(1+)}^{(2)} = A_{1(2+)}^{(2)} = 0, \\ A_{2(1-)}^{(2)} &= A_{2(1+)}^{(2)} = A_{2(2+)}^{(2)} = 0, \end{aligned}$$

то система четырех уравнений вида (5) с матрицей (6) распадается на две несвязанные системы двух уравнений с решениями

$$\begin{aligned} \dot{u}_{(1+)}^{(1)} &= \frac{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1}{\rho_2 v_2 + \rho_1 v_1} \dot{u}_{(1-)}^{(1)}, \quad \dot{u}_{(1+)}^{(2)} = 0, \\ \dot{u}_{(2+)}^{(1)} &= \frac{2\rho_1 v_1}{\rho_2 v_2 + \rho_1 v_1} \dot{u}_{(1-)}^{(1)}, \quad \dot{u}_{(2+)}^{(2)} = 0. \end{aligned}$$

Они с точностью до обозначений совпадают с решением, приведенным в [13] относительно напряжений для случая изотропных упругих сред.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы.

1. При нормальном падении плоской ударной волны произвольной поляризации на плоскость раздела двух трансверсально-изотропных упругих сред от нее в общем случае излучаются по одной квазипродольной и по одной квазипоперечной отраженной и преломленной плоской упругой волне.
2. Интенсивности этих волн на их фронтах могут быть подсчитаны с помощью системы четырех алгебраических уравнений, построенной на базе условия сохранения количества движения элементов сред, вовлеченных в движение на границе раздела.
3. При рассмотрении частных случаев установлено, что при падении плоской ударной волны на плоскость свободной границы от нее отражается одна плоская ударная волна с той

же поляризацій, но с протилежною фазою. При падінні ударної хвилі на плоску межу абсолютно твердого тіла відбивається одна плоска ударна хвиля з тими ж поляризацією і фазою.

4. Якщо ударна хвиля падає на плоску межу, що відокремлює трансверсально-ізотропну середу від ізотропної, то відбиваються по одній квазіпродольній і квазіпоперечній хвилі, а проникають через межу в ізотропну середу по одній чисто продольній і чисто поперечній хвилі.
5. Якщо плоска межа відокремлює трансверсально-ізотропну еластичну середу від ідеальної рідини, то відбиваються одна квазіпродольна і одна квазіпоперечна ударні хвилі, а в рідину проникає тільки одна чисто продольна ударна хвиля.

Для визначення інтенсивностей всіх цих хвиль побудовані системи лінійних алгебраїчних рівнянь, порядки яких, в залежності від типів серед, становлять від двох до чотирьох.

1. Бленд Д. Нелінійна динамічна теорія еластичності. – М.: Мир, 1972. – 183 с.
2. Петрашєв Г. И. Розповсюдження хвиль в анізотропних еластичних серед. – Л.: Наука, 1980. – 280 с.
3. Седов Л. И. Механіка сплошної серед: том 1. – М.: Наука, 1970. – 492 с.

4. Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. – К.: Наук. думка, 1988. – 220 с.
5. Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К. Применение лучевых методов в задачах распространения и рассеяния волн (обзор) // Прикл. мех. – 1996. – **32**, N 12. – С. 3–27.
6. Hanyda A., Seredynska M. Asymptotic ray theory in poro- and viscoelastic media // Wave Motion. – 1999. – **30**. – P. 175–195.
7. Shuvalov A. L., Gorkunova A. S. Cutting-of at reflection-transmission of acoustic waves in anisotropic media with sliding- contact interface // Wave Motion. – 1999. – **30**. – P. 345–365.
8. Гуляев В. И., Луговой П. З., Иванченко Г. М. Дифракция сферической ударной волны на плоскости раздела упругих сред // Прикл. мех. – 1997. – **33**, N 10. – С. 51–58.
9. Гуляев В. И., Луговой П. З., Иванченко Г. М., Яковенко Е. В. Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // ПММ. – 2000. – **64**, N 3. – С. 394–402.
10. Lugovoy P. Z., Gouliaev V. I. Propagation of shock wave fronts in anisotropic layered media // Shock Compression of Condensed Matter – 1999. Proc. Conf. Amer. Phys. Soc. Topical Group on Shock Compression of Condensed Matter. Pt. 2. – Snowbird, Utah, USA, June 27 – July 2. – 1999. – P. 1287–1290.
11. Гуляев В. И., Иванченко Г. М., Луговой П. З., Яковенко Е. В. Кинематика взаимодействия ударной волны с поверхностью раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Акуст. вісн. – 2000. – **3**, N 2. – С. 72–80.
12. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. – М.: Наука, 1965. – 386 с.
13. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Издательство литературы по строительству, 1965. – 448 с.