

УДК 534.26

## К ВОПРОСУ ОБ УЧЕТЕ СИНГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ ДИФРАКЦИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ

В. Б. ГАЛАНЕНКО\*, Д. В. ГАЛАНЕНКО\*\*

\* Государственное научно-производственное предприятие “Дельта”, Киев

\*\* Научно-производственное предприятие “Ультракон-Сервис”, Киев

Получено 24.02.2000

Предложен способ учета сингулярности в производных решения задачи дифракции нормальных волн на угловых точках границы в плоском волноводе с жидким заполнением. Он заключается в разбиении решения на два слагаемых, одно из которых содержит сингулярность и при этом удовлетворяет граничным условиям на поверхностях волновода, а второе является регулярным. Предлагаемый способ расчета позволяет получить приближенное решение, содержащее сингулярность в явном виде. Проведены численные оценки точности метода по критериям баланса потоков мощности и невязки условий сшивания решений в частичных областях.

Запропоновано спосіб урахування сингулярності в похідних розв'язку задачі дифракції нормальних хвиль на кутових точках межі в плоскому хвилепроводі, заповненому рідиною. Він полягає в розбитті розв'язку на два доданки, один з яких містить сингулярність і при цьому задовольняє граничним умовам на поверхнях хвилепроводу, а інший є регулярним. Запропонований спосіб дозволяє отримати наближений розв'язок, який містить сингулярність в явному вигляді. Проведені чисельні розрахунки щодо точності методу за критеріями балансу потоків потужності та невязки умов зшивання розв'язків у часткових областях.

A method of accounting the singularity in the solution derivatives for a problem of the normal wave diffraction on the angle border points in the flat waveguide with liquid filling is offered. It lies in the solution subdivision in two terms, one of which contains the singularity, satisfying herewith the boundary conditions on the waveguide surfaces, and the other is a regular one. The offered computation method allows to obtain an approximate solution, that contains the singularity explicitly. The estimation of the method efficiency using the criteria of the power streams balance and the partial solutions matching deficiency in the subdomains is given.

### ВВЕДЕНИЕ

Известно, что наличие изломов границы области в задачах дифракции звука приводит к появлению особенности в производных решения. В ряде работ отмечалось, что это обстоятельство, приводя к вычислительным трудностям, одновременно создает возможность для улучшения сходимости численных методов [1–4], так как позволяет заменить простую редукцию бесконечных систем линейных алгебраических уравнений более совершенной вычислительной процедурой. Указанная

возможность основана на том, что асимптотическое поведение коэффициентов ряда, в виде которого обычно представляют решение, определяется порядком особенности. Это позволяет (с точностью до постоянного множителя, который определяется в ходе решения задачи) задать зависимость коэффициентов ряда от их номера, начиная с некоторого достаточно большого номера  $N$ .

В настоящей работе рассматривается иной прием, также использующий известный характер особенности решения и состоящий в выделении из искомого решения сингулярного слагаемого. Мы проиллюстрируем его на примере хорошо известной задачи о дифракции антисимметричной волноводной моды на продольном жестком экране в жидком плоском слое с жесткими границами. Геометрия задачи показана на рис. 1. Для простоты экран размещен посередине слоя ( $H_1 = H_2 = H$ ).

Представим решение в каждой из частичных областей I, II, III (см. рис. 1) в виде суммы двух слагаемых:

$$\varphi = \varphi_r + a\varphi_s,$$

где  $\varphi$  – акустический потенциал, удовлетворяющий волновому уравнению. Первое слагаемое регулярно, а второе содержит в себе требуемую осо-

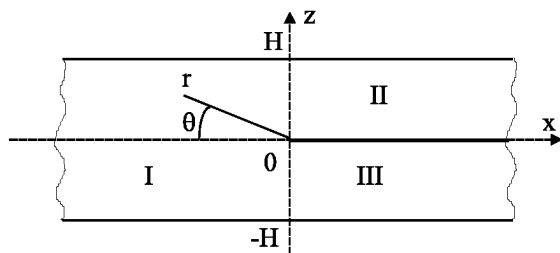


Рис. 1. Конфигурация задачи. Жидкий слой с жесткими границами, разделенный надвое жестким экраном в области  $x > 0$

бенность. Неизвестный масштабный множитель  $a$  определяется в ходе решения задачи. Ожидаемое преимущество рассматриваемого метода, основанного на явном выделении сингулярной части решения, заключается, главным образом, в том, что вид сингулярности определяется не в результате суммирования бесконечного ряда в окрестности особой точки, а закладывается в приближенное решение изначально.

Можно указать два подхода к заданию сингулярного слагаемого. В первом случае оно выбирается удовлетворяющим волновому уравнению. При этом каждое из слагаемых решения в отдельности может не удовлетворять граничным условиям. Устранение невязки по граничным условиям должно привести к уравнениям для отыскания неизвестных величин. В соответствии с другим подходом слагаемые следует выбрать так, чтобы каждое из них удовлетворяло граничным условиям, но могло не удовлетворять волновому уравнению. Тогда необходимые для определения неизвестных величин соотношения могут быть получены, исходя из требования, чтобы сумма слагаемых удовлетворяла уравнению. В данной работе используется второй подход.

### 1. ВЫДЕЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО СЛАГАЕМОГО ИЗ ИСКОМОГО РЕШЕНИЯ

Перепишем волновое уравнение следующим образом:

$$L\varphi = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2, \quad (1)$$

где  $L$  – оператор поперечного сечения. Поле в произвольном поперечном сечении  $x = \text{const}$  для каждой из трех областей может быть представлено в виде

$$\varphi(z) = \int_{z_1}^{z_2} G(z, z') \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) dz', \quad (2)$$

где  $G(z, z')$  – функция Грина оператора поперечного сечения,  $z_1 = 0$  или  $-H$ ,  $z_2 = H$ .

Разобьем вторую производную на два слагаемых:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, z)}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 \varphi_0(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z)}{\partial x^2}, \quad (3)$$

Здесь  $\varphi_0$  – решение волнового уравнения при  $k = 0$  (оно имеет в своих первых производных ту же сингулярность, что и  $\varphi$ ), а коэффициент  $a$  должен быть выбран таким, чтобы неизвестное второе слагаемое было регулярным. Соответственно,

искомое решение (функция  $\varphi(z, x)$ ) распадается на два слагаемых:

$$\varphi(z, x) = a\varphi_s(z, x) + \varphi_r(z, x), \quad (4)$$

имеющих вид интегралов типа (2). Наличие функции Грина в качестве ядра интеграла обеспечивает удовлетворение граничных условий каждым из слагаемых в отдельности.

Второе слагаемое в выражении (4) регулярно и, вследствие этого, при любом  $x$  может быть представлено равномерно сходящимся рядом по собственным функциям с неизвестными коэффициентами. Что касается первого слагаемого, то,  $\partial^2 \varphi_0(x, z) / \partial x^2$  имеет при  $x \rightarrow 0$  неинтегрируемую степенную особенность с показателем  $-3/2$ . Поэтому необходимо убедиться, что предельное (при  $x \rightarrow 0$ ) значение интеграла вида (2) существует во всех точках, за исключением кромки экрана, и, кроме того, демонстрирует нужную особенность (с показателем  $-1/2$ ) на самой кромке. Рассмотрим эти вопросы на примере частичной области II (см. рис. 1).

Используя явное выражение для функции Грина, после несложных преобразований приходим к следующему выражению для потенциала:

$$\begin{aligned} \varphi_s^{\text{II}} &= \mu^{\text{II}}(x) \cos k(z - H) + \varphi_{s2}^{\text{II}}, \\ \mu^{\text{II}}(x) &= \frac{1}{k \sin kH} \times \\ &\times \left( -\int_0^\infty \cos kz' \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} dz' + \int_H^\infty \cos kz' \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} dz' \right), \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{s2}^{\text{II}} &= \frac{1}{k \sin kH} \times \\ &\times \int_z^H (G_{<}^{\text{II}}(z, z') - G_{>}^{\text{II}}(z, z')) \left( -\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} \right) dz'. \end{aligned}$$

В последнем соотношении  $G_{<}^{\text{II}}(z, z')$  и  $G_{>}^{\text{II}}(z, z')$  – значения функции Грина для области II при  $z' < z$  и  $z' > z$  соответственно. Интегрируя по частям формулу для  $\varphi_{s2}$ , приводим ее к виду

$$\begin{aligned} \varphi_{s2} &= \varphi_0(z, x) + \frac{1}{k} \sin k(z - H) \frac{\partial \varphi_0(H, x)}{\partial z} - \\ &- \cos k(z - H) \varphi_0(H, x) + \\ &+ k \int_z^H \sin k(z - z') \varphi_0(z', x) dz', \quad (6) \end{aligned}$$

из чего ясно, что производные от  $\varphi_{s2}$  содержат нужную особенность на кромке и сходятся во всех

остальных точках области. Существование предельного при  $x \rightarrow 0$  значения  $\mu(x)$  зависит от первого из двух интегралов в формуле (5). После соответствующей замены переменной интегрирования его можно привести к выражению

$$I_0(x) = |x|^{1/2} \int_0^\infty (1+u^2)^{-3/4} \times \cos ku \sin\left(\frac{3}{2}(\pi - \arctg u)\right) du. \quad (7)$$

Следовательно, вопрос о существовании предельного (при  $x \rightarrow 0$ ) значения интеграла вида (2) сводится к вопросу о том, равен ли нулю интеграл в формуле (7) в указанном пределе. Несложные преобразования показывают, что это так. Аналогичные результаты получаем и при рассмотрении выражений для частичных областей I и III.

Итак, указан способ построения слагаемого  $\varphi_s$  в формуле (4), обладающего нужной сингулярностью производных и одновременно удовлетворяющего граничным условиям. В дальнейшем это позволит сформулировать метод расчета поля дифракции нормальной волны на кромке жесткого экрана в волноводе.

## 2. МЕТОД РАСЧЕТА ПОЛЯ ДИФРАКЦИИ

Представим слагаемое  $\varphi_r(z, x)$  равномерно сходящимся рядом по собственным функциям в каждом сечении  $x = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} \varphi^I(z, x) &= \sum_n B_n(x) u_n^I(z) + a\varphi_s^I(z, x) + \varphi_i, \\ \varphi^II(z, x) &= \sum_n C_n(x) u_n^{II}(z) + a\varphi_s^{II}(z, x). \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты  $B_n(x)$  и  $C_n(x)$  – суть функции продольной координаты. Члены рядов не описывают нормальные волны, так как регулярное и сингулярное слагаемые в отдельности не удовлетворяют волновому уравнению. Здесь следует указать на одно обстоятельство, используемое в дальнейшем. Существование интегралов вида (2) позволяет представить каждое слагаемое в формуле (4) (и все выражение в целом) в виде равномерно сходящихся рядов по собственным функциям. Для полного решения это приводит к разложению поля на нормальные волны. Таким образом, представление, заданное формулами (8), и разложение на нормальные волны эквивалентны. Коэффициенты ряда по собственным функциям для сингулярного слагаемого нетрудно вычислить. Таким образом,

существует возможность выделить из последовательности амплитуд нормальных волн (с точностью до неизвестного весового множителя  $a$ ) две подпоследовательности, одна из которых соответствует регулярной, а другая – сингулярной части.

Составим систему функциональных равенств, исходя из условий непрерывности потенциала и его нормальной производной в сечении  $x=0$ :

$$\begin{aligned} \sum_n B_n u_n^I + a\varphi_s^I + \varphi_i &= \sum_n C_n u_n^{II} + a\varphi_s^{II}, \\ \sum_n B'_n u_n^I + a \frac{\partial \varphi_s^I}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_I}{\partial x} &= \\ &= \sum_n C'_n u_n^{II} + a \frac{\partial \varphi_s^{II}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{где } B'_n = \frac{\partial B_n}{\partial x}, \quad C'_n = \frac{\partial C_n}{\partial x} \quad \text{при } x=0.$$

Установим связь между  $B'_n$  и  $B_n$ ,  $C'_n$  и  $C_n$ . Для этого представим поле в каждой из частичных областей в виде совокупностей нормальных волн с волновыми числами  $\gamma_n$ . В результате находим, что

$$\begin{aligned} B'_n &= -i\gamma_n^I B_n - a(\varphi_{sn}^{I'} + i\gamma_n^I \varphi_{sn}^I), \\ C'_n &= i\gamma_n^{II} C_n - a(\varphi_{sn}^{II'} - i\gamma_n^{II} \varphi_{sn}^{II}). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь для краткости введены обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_{sn} &= \frac{1}{\|u_n\|} (\varphi_s, u_n) \Big|_{x=0}; \\ \varphi'_{sn} &= \frac{1}{\|u_n\|} \left( \frac{\partial \varphi_s}{\partial x}, u_n \right) \Big|_{x=0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Запись  $(\cdot, \cdot)$  означает скалярное произведение, а  $\|\cdot\|$  – норму функции. Подставляя соотношения (10) в ряды (9) и учитывая, что  $\varphi_{sn}$  и  $\varphi'_{sn}$  – суть коэффициенты Фурье функции  $\varphi_s$  и ее производной по  $x$ , а

$$\varphi_s^I - \varphi_s^{II} = (\mu^I - \mu^{II}) \cos k(z - H),$$

получаем окончательное выражение для функционального равенства:

$$\begin{aligned} \sum_n B_n u_n^I - \sum_n C_n u_n^{II} + \\ + a(\mu^I - \mu^{II}) \cos k(z - H) &= -\varphi_i, \\ \sum_n \gamma_n^I B_n u_n^I + \sum_n \gamma_n^{II} C_n u_n^{II} + \\ + a \left( \sum_n \gamma_n^I \varphi_{sn}^I u_n^I + \sum_n \gamma_n^{II} \varphi_{sn}^{II} u_n^{II} \right) &= -i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}. \end{aligned} \quad (12)$$

Домножим скалярно первое из равенств в формулах (11) сначала на  $u_m^{\text{II}}$  ( $m=1, 2, \dots$ ), а затем на  $\cos k(z-H)$ . Кроме того, второе равенство скалярно умножим на  $u_m^{\text{I}}$ . В результате получим систему алгебраических уравнений относительно  $B_n, C_n$  и  $a$ :

$$\begin{aligned} & \sum_n B_n(u_n^{\text{I}}, u_m^{\text{II}}) - C_m \|u_m^{\text{II}}\| + \\ & + a(\mu^{\text{I}} - \mu^{\text{II}})(\cos k(z-H), u_m^{\text{II}}) = \\ & = -(\varphi_{\text{I}}, u_m^{\text{II}}), \\ & \gamma_m^{\text{I}} B_m \|u_m^{\text{I}}\| + \sum_n \gamma_n^{\text{II}} C_n(u_n^{\text{I}}, u_m^{\text{II}}) + \\ & + a(\gamma_m^{\text{I}} \varphi_{sm}^{\text{I}} \|u_m^{\text{I}}\| + \sum_n \gamma_n^{\text{II}} \varphi_{sn}^{\text{II}}(u_n^{\text{I}}, u_m^{\text{II}})) = \\ & = -i \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, u_m^{\text{I}} \right), \\ & \sum_n B_n(u_n^{\text{I}}, \cos k(z-H)) - \\ & - \sum_n C_n(u_n^{\text{II}}, \cos k(z-H)) + \\ & + a(\mu^{\text{I}} - \mu^{\text{II}}) \|\cos k(z-H)\| = \\ & = -(\varphi_i, \cos k(z-H)). \end{aligned} \tag{13}$$

После того, как неизвестные последовательно  $\{B_n\}$ ,  $\{C_n\}$  и коэффициент  $a$  найдены, ими можно распорядиться двояко. Первый подход заключается в том, что решение вида (8) для каждого из парциальных волноводов подставляют в волновое уравнение, приходя к дифференциальным уравнениям для неизвестных зависимостей  $B_n(x)$  и  $C_n(x)$  с начальными значениями  $B_n, C_n, B'_n, C'_n$ . Так, для области II уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 C_n}{dx^2} + \gamma_n^2 C_n = q_n(x), \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} q_n(x) &= \frac{1}{\|u_n\|} (q(z, x), u_n(z)), \\ q(z, x) &= \left( \frac{d^2 \mu}{dx^2} - \frac{\partial^2 \varphi_0(H, x)}{\partial x^2} \right) \cos k(z-H) + \\ & + \frac{\partial^3 \varphi_0(H, x)}{\partial x^2 \partial z} \frac{1}{k} \sin k(z-H) + \\ & + k \int_z^H \sin k(z-z') \frac{\partial^2 \varphi_0(z', x)}{\partial x^2} dz'. \end{aligned}$$

Решение уравнения (14), удовлетворяющее началь-

ным условиям, задается следующим выражением:

$$C_n(x) = C_n \exp(i\gamma_n x) - \frac{a}{\gamma_n} \left( g_n \sin \gamma_n x - \int_0^x q_n(x') \sin \gamma_n(x-x') dx' \right). \tag{15}$$

Здесь

$$g_n = \frac{1}{\|u_n\|} \left( \frac{\partial \varphi_s}{\partial x}, u_n \right) - i\gamma_n \frac{1}{\|u_n\|} (\varphi_s, u_n).$$

Найденные функции  $C_n(x)$  подставляем в формулу (8). В этом варианте, сопряженном с весьма громоздкими вычислениями, найденное решение содержит сингулярность первых производных по  $x$  или  $z$  в явном виде. Следует ожидать, что такая процедура решения окажется целесообразной при расчетах поля вблизи от ребра.

Если же интерес представляет исследование поля вдали от ребра, где возмущения, обусловленные сингулярностью, ослабевают, целесообразен второй подход, основанный на эквивалентности представлений (8) и соответствующих разложений по нормальным волнам. Приравнявая их друг другу в сечении  $x=0$ , без труда находим связь амплитуд нормальных волн  $b_n$  и  $c_n$  с найденными ранее коэффициентами  $B_n$  и  $C_n$ :

$$\begin{aligned} b_n &= B_n + a\varphi_{sn}^{\text{I}}, \\ c_n &= C_n + a\varphi_{sn}^{\text{II}}, \end{aligned} \tag{16}$$

где  $\varphi_{sn}$  определяются формулой (11).

Такой вариант расчета близок к методу, изложенному в [1], и отличается лишь способом учета влияния заранее известной сингулярности решения на поведение коэффициентов разложения решения в ряд по собственным функциям. Если в [1] неизвестные коэффициенты заменяются их асимптотическими формулами, начиная с некоторого достаточно большого номера, то здесь из полной последовательности неизвестных коэффициентов выделяется подпоследовательность, соответствующая сингулярному слагаемому. Естественно, что для достаточно больших номеров элементы этой подпоследовательности начинают доминировать над элементами подпоследовательности, соответствующей регулярной части решения.

### 3. РАСЧЕТНЫЙ ПРИМЕР

Цель расчетов, результаты которых приводятся в этом разделе, состояла в проверке сходимости предлагаемого способа расчета по следующим двум критериям:

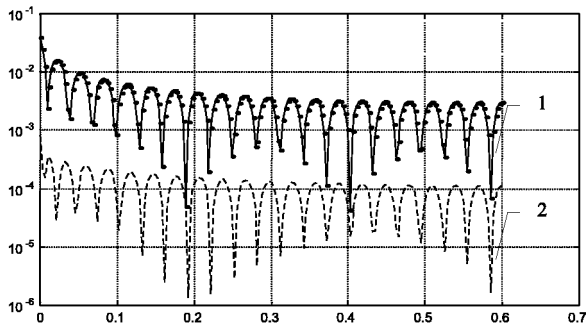


Рис. 2. Невязка по потенциалу в сечении  $x=0$  ( $H/\lambda=0.6$ ):  
1 – расчет без выделения сингулярности,  
2 – расчет с выделением сингулярности

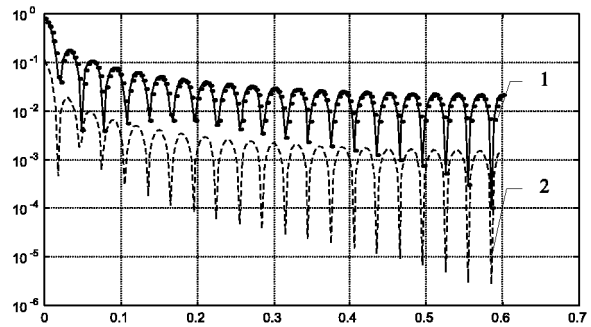


Рис. 3. Невязка по скорости в сечении  $x=0$  ( $H/\lambda=0.6$ ):  
1 – расчет без выделения сингулярности,  
2 – расчет с выделением сингулярности

- 1) по величине невязки решений, найденных для каждого из парциальных волноводов в сечении  $x=0$ ,
- 2) по энергетическому критерию, заключающемуся в сравнении потоков энергии падающей, отраженных и прошедших волн.

Нами были проведены расчеты дифракции антисимметричной моды на кромке жесткого экрана в волноводе. Для начала рассмотрим волновод толщины  $h/\lambda=0.6$ . При этом в широкой его части существует только одна распространяющаяся нормальная волна, которая и была выбрана в качестве падающей. В каждом из узких волноводов существуют по две распространяющиеся моды. Если представить падающую волну в виде наложения двух волн Бриллюэна, то каждая из них падает на кромку жесткого экрана под весьма малым углом скольжения по отношению к жесткому экрану. Естественно, что энергетический коэффициент отражения такой волны при ее переходе в узкие волноводы невелик и составляет около 0.013%. При этом баланс энергии в численном эксперименте выполняется с точностью порядка тысячных долей процента. Невязка по величине акустического потенциала и по горизонтальной проекции колебательной скорости в поперечном сечении  $x=0$  иллюстрируется рис. 2 и 3 (при расчете отраженного и прошедшего полей учитывалось по 20 мод).

Приведенные графики позволяют сравнить точность выполнения условий шивания полей в широкой и узкой частях волновода для двух вариантов расчета: без выделения особенности (методом простой редукции при решении бесконечной системы уравнений для амплитуд нормальных волн) и с предлагаемым способом выделения особенно-

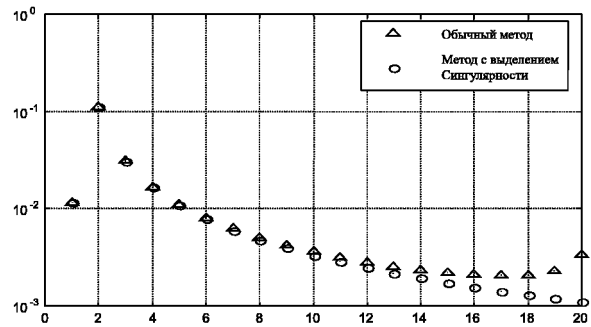


Рис. 4. Амплитуды мод отраженного поля, вычисленные обычным методом и с выделением сингулярности ( $H/\lambda=0.6$ )

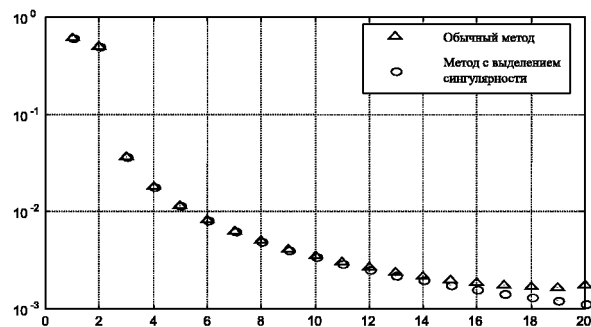


Рис. 5. Амплитуды мод прошедшего поля, вычисленные обычным методом и с выделением сингулярности ( $H/\lambda=0.6$ )

сти. Ясно, что в последнем случае невязка по скорости на порядок, а по потенциалу – на два порядка меньше. Заметим, что для обоих методов особенно значительной является невязка по скорости вблизи кромки экрана. Но и здесь расчет с выделением особенности обеспечивает на порядок лучшую сходимость. Как видно из графиков,

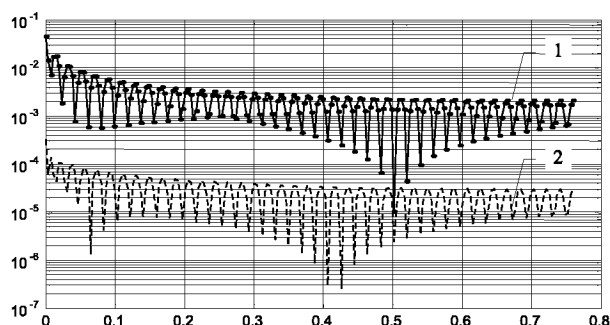


Рис. 6. Невязка по потенциалу в сечении  $x=0$  ( $H/\lambda=0.76$ ):

1 – расчет без выделения сингулярности,  
2 – расчет с выделением сингулярности

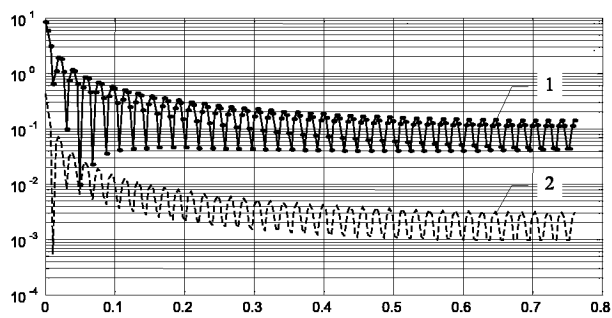


Рис. 7. Невязка по скорости в сечении  $x=0$  ( $H/\lambda=0.76$ ):

1 – расчет без выделения сингулярности,  
2 – расчет с выделением сингулярности

приведенных на рис. 4 и 5, расчетные значения амплитуд нормальных волн в отраженном и прошедшем полях, полученные двумя методами, довольно близки. Существенные расхождения наблюдаются лишь при расчете амплитуд волн высоких номеров.

Сходные результаты получены и во втором примере расчета (рис. 6–9), в котором предполагалось, что из широкого волновода – с  $H/\lambda=0.76$  – падает вторая антисимметричная мода (количество распространяющихся волн в широкой и в узкой частях – по две). При этом направления волн Бриллюэна, составляющих падающую волну, образуют угол около  $80^\circ$  с плоскостью экрана, что обуславливает значительное отражение. Энергия отраженных волн составляет около 44 %, а прошедших – 56 %. Для этого случая баланс потоков мощности при расчете соблюдается с точностью до сотых долей процента. Невязки по скорости и потенциалу, полученные при расчете с учетом сингулярности, более, чем на порядок меньше, чем при простой редукции. Как и следовало ожидать, это достигается за счет более точного вычисления вкладов высших мод в разложении решения по нормальным волнам (см. рис. 6, 9).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен способ решения задачи дифракции, основанный на разбиении искомого решения на два слагаемых, удовлетворяющих порознь граничным условиям, одно из которых содержит сингулярность в своих производных, а другое регулярно. Продемонстрирована приемлемая точность метода как по критерию баланса потоков мощности, так и по критерию проверки условий сшивания решений, полученных для частичных обла-

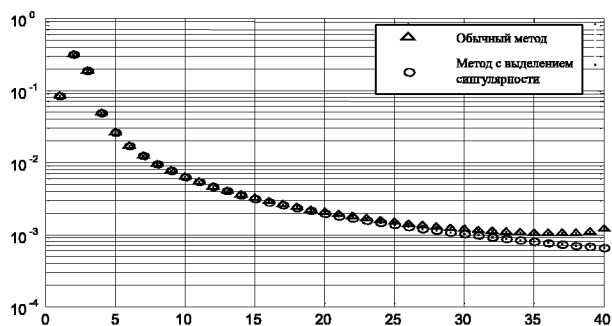


Рис. 8. Амплитуды мод отраженного поля, вычисленные обычным методом и с выделением сингулярности ( $H/\lambda=0.76$ )

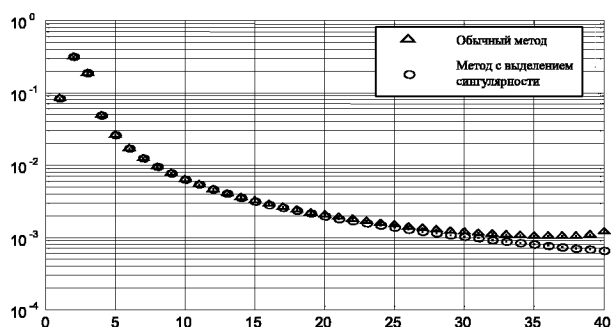


Рис. 9. Амплитуды мод прошедшего поля, вычисленные обычным методом и с выделением сингулярности ( $H/\lambda=0.76$ )

стей.

1. Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. – К.: Наук. думка, 1986. – 240 с.
2. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – К.: На-

- ук. думка, 1978.– 264 с.
3. *Городецкая Н. С.* Дифракция волн Рэлея – Лэмба на вертикальной границе в составном упругом волноводе // Акуст. вісн.– 2000.– **3**, N 1.– С. 23–35.
  4. *Вайнштейн Л. А., Белкина М. Г.* Метод двойной редукции и бесконечные системы линейных уравнений для коэффициентов разложения искомой функции с особенностями // Докл. АН СССР.– 1970.– **194**, N 46.– С. 794–797.